



**Università
degli Studi
di Ferrara**

**DOTTORATO DI RICERCA IN
"SCIENZE DELL'INGEGNERIA"**

CICLO XXXIV

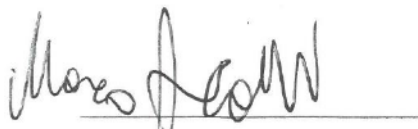
COORDINATORE Prof. Trillo Stefano

***Modellazione statica di telai aventi fondazioni superficiali
poggianti su un semispazio elastico***

Settore Scientifico Disciplinare ICAR/09

Dottorando


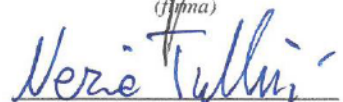
Dott. Accolli Marco


(firma)

Tutore

Prof. Minghini Fabio

Prof. Tullini Nerio


(firma)

(firma)

Anni 2018/2021

Modellazione statica di telai aventi fondazioni superficiali poggianti su un semispazio elastico

Tesi di dottorato di Marco Accolli

Tutori

Prof. Fabio Minghini

Prof. Nerio Tullini

Febbraio 2022

Università degli Studi di Ferrara

Dottorato di Ricerca in Scienze dell'Ingegneria

Ingegneria Civile – Tecnica delle Costruzioni

XXXIV ciclo

Esaminatori:

Prof. Daniele Baraldi, Università IUAV di Venezia

Prof. Andrea Belleri, Università di Bergamo

Indice

Introduzione	1
1 Formulazione del problema dell'interazione tra trave di fondazione e substrato elastico	4
1.1 Introduzione.....	4
1.2 Semispazio elastico	5
1.3 Galerkin Boundary Element Method (GBEM).....	6
1.3.1 Discretizzazione della superficie di contatto	7
1.4 Modello di trave di Eulero Bernoulli – Vlasov su suolo	9
1.4.1 Formulazione variazionale	9
1.4.2 Funzioni di forma	16
1.4.3 Modello agli elementi finiti di Barsoum-Gallagher su suolo	18
1.4.4 Caso delle sezioni compatte con torsione alla De Saint Venant.....	22
1.5 Equazioni risolutive per casi particolari	23
1.5.1 Trave con sezione rettangolare soggetta a torsione	23
1.5.2 Trave in parete sottile su suolo soggetta a coppia torcente.....	25
1.5.3 Instabilità torsionale di una trave su suolo con carico di punta.....	27
1.5.4 Instabilità flessionale di una trave su suolo con carico di punta.....	30
1.5.5 Instabilità flesso-torsionale di un trave su suolo con coppie concentrate agli estremi e carico distribuito	32
2 Analisi statica di travi su semispazio elastico	36
2.1 Trave di fondazione soggetta a flessione.....	38
2.1.1 Trave di fondazione soggetta a carico verticale in mezzeria	38
2.1.2 Trave di fondazione soggetta a carico distribuito	40
2.1.3 Trave di fondazione soggetta a coppia flettente in mezzeria.....	41
2.2 Trave di fondazione soggetta a torsione	43
2.2.1 Trave rettangolare di fondazione soggetta a coppia torcente in mezzeria	43
2.2.2 Trave rettangolare di fondazione soggetta agli estremi a coppie torcenti antisimmetriche	48
2.2.3 Torsione su profili aperti in parete sottile.....	53
2.3 Travi di fondazione parallele.....	67
2.4 Grigliato di travi di fondazione	70
2.4.1 Travi di fondazione incrociate con carico verticale.....	73
2.4.2 Travi di fondazione incrociate con coppia applicata	78
2.4.3 Grigliato di travi soggetto a quattro carichi concentrati	80
2.4.4 Grigliato di travi soggetto a due carichi concentrati.....	83
3 Instabilità di travi di Eulero Bernoulli-Vlasov su semispazio	85
3.1 Introduzione.....	85
3.2 Instabilità torsionale di travi su semispazio.....	86
3.2.1 Instabilità torsionale di una trave su semispazio con stessa rotazione torsionale agli estremi	86
3.2.2 Instabilità torsionale di una trave su semispazio priva di vincoli alle estremità.....	89
3.2.3 Confronto tra instabilità flessionale e torsionale	92
3.2.4 Confronto tra modelli FE-BIE e modelli FEM (carico di punta)	94

3.2.5	Confronto dell'instabilità flessionale tra una trave appoggiata su suolo elastico e di Winkler	98
3.2.6	Confronto dell'instabilità torsionale per una trave appoggiata su suolo elastico e di Winkler	100
3.3	Instabilità flesso-torsionale di travi su semispazio	103
3.3.1	Instabilità flesso-torsionale per una trave con coppie concentrate agli estremi e vincoli laterali	103
3.3.2	Instabilità flesso-torsionale per una trave con coppia concentrata ad un estremo in presenza di vincoli laterali	106
3.3.3	Instabilità flesso-torsionale per una trave con coppia concentrata al centro in presenza di vincoli laterali	109
3.3.4	Instabilità flesso-torsionale per una trave con coppie concentrate agli estremi priva di vincoli laterali	112
3.3.5	Instabilità flesso-torsionale per una trave con carico uniformemente distribuito in presenza di vincoli laterali	114
3.3.6	Confronto tra FE-BIE e modelli FEM (Instabilità flesso-torsionale)	119
4	Analisi lineare di telai su suolo elastico.....	122
4.1	Modelli di interazione suolo-struttura	122
4.1.1	Modelli semplificati.....	122
4.1.2	Modello di Winkler	123
4.2	Analisi di telai su suolo elastico	125
4.2.1	Influenza della rigidità del terreno e della lunghezza dello sbalzo	125
4.2.2	Influenza della rigidità strutturale.....	127
4.3	Telaio monopiano	131
4.4	Telaio monopiano con sbalzo	133
4.5	Telaio multipiano.....	137
4.5.1	Confronto tra FE-BIE e FEM 3D	140
4.5.2	Confronto tra FE-BIE e Winkler	143
4.5.3	Confronto con modelli semplificati.....	146
4.6	Canale prefabbricato.....	148
4.6.1	Condizione di carico C_1	149
4.6.2	Condizione di carico C_2	151
5	Analisi non lineare di telai su suolo elastico	153
5.1	Introduzione.....	153
5.2	Modello di Shakourzadeh per nodi semi-rigidi	155
5.3	Plasticità	158
5.4	Algoritmo incrementale in spostamento per problemi non lineari	160
5.5	Validazione dell'algoritmo implementato	163
5.6	Analisi non lineare di un telaio su suolo elastico	165
5.6.1	Influenza della rigidità orizzontale	167
5.6.2	Influenza della rigidità del suolo	169
5.7	Analisi non lineare di una struttura a pilastri isostatici.....	173
5.7.1	Influenza degli effetti del secondo ordine e del contatto in sola compressione.....	173
5.7.2	Analisi pushover con contatto non lineare al variare dello sforzo normale.....	176

5.7.3	Momento rotazione della fondazione al variare dello sforzo normale	178
5.8	Analisi di strutture monopiano considerando il rocking isolation.....	181
5.9	Rigidezza del giunto di base del telaio	187
5.9.1	Rigidezza rotazionale di fondazione rigida su suolo elastico	188
5.9.2	Influenza della rigidezza del giunto di base sull'instabilità.....	192
Conclusioni.....		194
Appendici.....		198
	Appendice A1: matrice di rigidezza K_e	198
	Appendice A2: matrice di rigidezza K_g	200
	Appendice A3: matrice H_r punch rigido.....	202
	Appendice A4: matrice H trave	203
	Appendice A5: matrice G	205
Bibliografia.....		206

INTRODUZIONE

L'interesse per problemi di contatto tra struttura e substrato è rilevante in diversi campi come: geologia, applicazioni aeronautiche, rinforzo strutturale, ingegneria meccanica. Nel campo dell'ingegneria civile, la valutazione dell'interazione suolo-struttura è stata oggetto di indagine per lungo tempo. I risultati dell'interazione suolo-struttura possono essere utilizzati nella progettazione delle fondazioni e della sovrastruttura o nell'analisi di tensioni e deformazioni che si sviluppano nel terreno. Lo scopo del presente lavoro è quello di presentare un approccio numerico in grado di risolvere l'interazione tridimensionale terreno-struttura, analizzando in particolare travi di fondazione e telai variamente caricati, tenendo conto delle non linearità geometriche e di materiale. Sono presentati confronti tra vari modelli di suolo più o meno complessi. Il modello più semplice di suolo è stato definito da Winkler (1867), il quale assunse che lo spostamento superficiale del semispazio in ogni punto sia proporzionale alla sola pressione applicata nello stesso punto. Il semispazio di tipo Winkler è rappresentato fisicamente da un letto di molle indipendenti sotto la fondazione ed è adottato per modellare vari problemi. Modelli simili a quello presentato da Winkler sono stati sviluppati successivamente e prevedono l'utilizzo di due costanti elastiche (Hetenyi 1946, Pasternak 1954, Vlasov e Leonitiev 1966). Una limitazione, all'applicabilità di tali modelli, è rappresentata dall'aver le deformazioni limitate alla sola regione caricata, questo comporta un comportamento della struttura diverso da quello reale e rende necessaria l'adozione di un modello elastico continuo. I primi studi in questo contesto furono fatti da Boussinesq (1885), che analizzò il problema di un solido elastico lineare omogeneo ed isotropo soggetto ad una forza concentrata che agisce perpendicolarmente alla sua superficie. Un caso simile è dato dal problema piano di un carico lineare applicato alla superficie del semispazio, studiato per la prima volta da Flamant (Timoshenko e Goodier 1951, Johnson 1985). L'interazione tra le fondazioni e il terreno è spesso analizzata accoppiando i metodi degli elementi finiti (*finite element* FE) e degli elementi al contorno (*boundary element* BE) (Brebba e Georgiou 1979, Mendonca e Paiva 2003, Gonzalez et al. 2007). Il metodo FEM è appropriato per l'analisi strutturale, mentre il metodo BEM è appropriato per lo studio di domini illimitati. Inoltre, adottando procedure di accoppiamento di Galerkin BEM-FEM (Leung et al. 1995, Springhetti et al. 2007), si possono ottenere matrici con coefficienti simmetrici per le formulazioni BEM. Considerando il semipiano o il semispazio elastico, la formulazione BEM può essere semplificata adottando rispettivamente una soluzione di Boussinesq o una soluzione di Flamant. In questi casi, la

discretizzazione della superficie di contatto genera una matrice simmetrica e definita positiva. La prima applicazione dell'approccio FE-BE è stata effettuata da Cheung e Zinkiewicz (1965) per l'analisi statica di piastre su fondazioni elastiche. Gli autori hanno discretizzato la reazione del terreno con forze concentrate nei nodi dell'elemento della piastra ed hanno ottenuto la matrice di flessibilità del terreno utilizzando sia la soluzione di Boussinesq che quella di Winkler. Lo stesso approccio è stato adottato da Cheung e Nag (1968) per la determinazione della matrice di rigidezza di un semipiano elastico (soluzione Flamant) e semispazio (soluzione Boussinesq). Baraldi e Tullini (2020) utilizzando il metodo di Galerkin hanno analizzato la rigidezza di una fondazione rigida su un semispazio elastico utilizzando un Galerkin BEM. In alternativa l'interazione suolo-struttura può essere studiata facendo uso di una formulazione variazionale mista, che assume funzioni indipendenti sia per gli spostamenti della struttura che per le reazioni del suolo. Kikuci (1980) ha adottato la formulazione variazionale mista per lo studio di travi poggianti su suolo alla Pasternak, Bjelak e Stephan (1983) hanno adottato questa formulazione per il modello di suolo alla Pasternak e per una soluzione di Boussinesq mediata sulla larghezza della trave. Tullini e Tralli (2010) hanno studiato travi di Timoshenko su semipiano elastico utilizzando un approccio FE-BIE (*finite element – boundary integral equation*), nel quale si prevede l'accoppiamento tra classici elementi finiti (FE) ed equazioni integrali al contorno (BIE). Lo stesso approccio è stato adottato da Tullini et al. (2012a) per studiare travi caricate assialmente in perfetta aderenza con un semipiano elastico omogeneo. Tezzon et al (2015) hanno studiato il problema di contatto di travi e telai incollati su semipiano. Baraldi e Tullini (2018) hanno preso in considerazione l'analisi statica di travi di Timoshenko su semispazio in contatto senza attrito.

Nel secondo capitolo di questo lavoro è stato studiato il comportamento delle travi su semispazio elastico, partendo dalla soluzione di Boussinesq è stata costruita la matrice di rigidezza del suolo. Inizialmente, per la soluzione di problemi relativi a punch rigidi, viene applicato il metodo degli elementi al contorno (BEM) di Galerkin già affrontato in Baraldi e Tullini (2020). Successivamente è stata spostata l'attenzione al comportamento delle travi deformabili soggette a diverse condizioni di carico utilizzando un approccio FE-BIE. Le travi di fondazione di telai 3D su terreno elastico possono essere discretizzate adottando un modello di trave basato sulla teoria della flessione di Eulero-Bernoulli e sulla teoria della torsione di Vlasov (1961), seguendo il modello proposto da Barsoum e Gallagher (1970). In questo lavoro sono presentati esempi relativi a sezioni rettangolari ed altri relativi a sezioni in parete sottile. Oltre alle condizioni di carico analizzate in Baraldi e Tullini (2018), è stata presa in considerazione la torsione e sono stati analizzati grigliati di fondazione. I risultati delle diverse analisi sono confrontati con omologhi modelli FEM 3D che discretizzano il

suolo con elementi di tipo *brick*. Nel terzo capitolo, il modello basato sulla teoria della flessione di Eulero-Bernoulli e della torsione di Vlasov è utilizzato per l'analisi di stabilità di travi su semispazio elastico. I carichi critici sono valutati ricorrendo al metodo che prevede l'accoppiamento tra elementi finiti in spostamento ed equazioni integrali al contorno (FE-BIE) proposto da Tullini e Tralli (2010). È stato analizzato il buckling flesso-torsionale estendendo il lavoro di Baraldi e Tullini (2021), successivamente sono state condotte analisi di lateral buckling su travi a doppio T. I risultati ottenuti sono stati confrontati con modelli FEM e con soluzioni analitiche (Timoshenko e Gere 1961). Nel quarto capitolo della tesi è presentata l'analisi statica di telai tridimensionali su semispazio elastico, utilizzando l'approccio FE-BIE per modellare le travi di fondazione. Sono presentati diversi confronti con il modello di Winkler, ed il modello FEM 3D, costituito da elementi *beam* per le travi ed elementi *brick* per il suolo. Infine, viene riportato lo studio di un canale sotterraneo prefabbricato progettato per garantire il deflusso delle acque, vengono analizzate due condizioni di carico al variare della rigidità degli elementi di collegamento. All'interno dell'ultimo capitolo è riportata l'analisi non lineare di telai su semispazio elastico con fondazioni modellate con approccio FE-BIE. Il comportamento non lineare delle travi è rappresentato da cerniere plastiche concentrate alle estremità delle aste e modellate come connessioni semirigide, mentre per la non linearità geometrica è stata considerata una matrice geometrica semplificata, che tiene conto del solo sforzo assiale. Per rappresentare il comportamento della connessione semirigida è stato utilizzato il modello di Shakourzadeh et al. (1999), che permette di gestire un legame momento-rotazione non lineare. Successivamente, sono state realizzate analisi di pushover su strutture a pilastri isostatici con fondazioni rigide modellate attraverso il metodo BEM, tenendo conto del contatto monolatero in sola compressione. Infine, usando delle molle rotazionali che rappresentano la rigidità del sistema suolo-fondazione (Krystosik 2018) è presentata l'analisi di stabilità di telai.

1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DELL'INTERAZIONE TRA TRAVE DI FONDAZIONE E SUBSTRATO ELASTICO

1.1 Introduzione

L'interesse per problemi di contatto tra struttura e substrato è rilevante in diversi campi come la geologia, l'aeronautica, e l'ingegneria meccanica. Nel campo dell'ingegneria strutturale, la valutazione dell'interazione suolo-struttura è stato un problema che ha coinvolto diversi studiosi. In questo capitolo, vengono condotte analisi statiche di travi su semispazio elastico ed isotropo. I primi studi di Boussinesq (1885) e Cerruti (1882) definirono il potenziale di un semispazio 3D elastico e isotropo. Partendo da tale potenziale, si possono dedurre le espressioni per le tensioni e gli spostamenti generati da una forza concentrata sulla superficie del semispazio (Johnson 1985), analogamente, altri ricercatori hanno studiato le condizioni di carico più utili a risolvere problemi pratici. Love (1929) ha determinato gli spostamenti superficiali dovuti a una pressione uniforme su un'area rettangolare. Lo spostamento del semispazio causato dall'inserimento di un punch rigido rappresenta un altro tema che coinvolge la soluzione di Boussinesq. Questo problema è strettamente relativo alla determinazione della rigidità di una fondazione rigida ed è anche un problema classico in fisica, poiché la sua soluzione rappresenta la densità di carica di una piastra sottile attraversata da corrente elettrica. Molti ricercatori hanno determinato la soluzione di questo problema adottando approcci diversi come le serie di potenze o il metodo degli elementi al contorno (Rvachev (1959); Gorbunov-Posadov e Serebrjany (1961); Borodachev (1976); Brothers (1977); Mullan et al. (1980); Dempsey e Li (1989); Bosakov (2003)). Biot (1937) ha studiato l'analisi statica di travi di lunghezza infinita su semispazio servendosi di integrali di Fourier. Vesic (1961) ha risolto lo stesso problema introdotto da Biot ed ha considerato il caso di una trave di lunghezza infinita caricata da un carico concentrato ed una coppia, determinando una relazione tra parametri elastici del semispazio e costante di sottofondo di Winkler. Travi di lunghezza finita sono state studiate da Gorbunov-Posadov (1961) e da Barden (1965) che hanno usato il metodo delle serie di potenza ed hanno confrontato i risultati con dati sperimentali.

1.2 Semispazio elastico

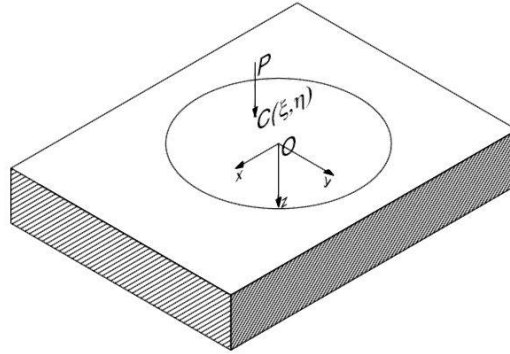


Fig. 1.1. Semispazio elastico soggetto a carico verticale.

Il semispazio tridimensionale è descritto dalle costanti: E_s e ν_s , modulo elastico e coefficiente di Poisson rispettivamente. Il semispazio è riferito alla terna cartesiana $(O;x,y,z)$ (Fig. 1.1), l'asse z è diretto verso il basso. Il piano caratterizzato da $z=0$ rappresenta la superficie di contatto tra fondazione e suolo, la generica area A può essere soggetta a diverse distribuzioni di pressioni, nel seguito verrà considerata la sola pressione normale verticale $r(x,y)$. Il classico approccio per il calcolo degli spostamenti e delle tensioni dovuti a forze applicate sul semispazio è stato studiato da Cerruti (1882) e da Boussinesq (1885). L'espressione seguente riporta lo spostamento verticale $w(x,y)$ dovuto a pressioni normali applicate $r(\xi,\eta)$.

$$w(x, y, 0) = \int_A g(x, y, \xi, \eta) r(\xi, \eta) \, dA \quad \text{Eq. 1.1}$$

$$g(x, y, \xi, \eta) = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \frac{1}{d(x, y, \xi, \eta)} \quad \text{Eq. 1.2}$$

$$d(x, y, \xi, \eta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad \text{Eq. 1.3}$$

Dove A è l'area di carico e $g(x,y;\xi,\eta)$ è la funzione di Green che determina lo spostamento verticale dovuto ad una forza normale applicata in un generico punto $C(\xi,\eta)$ (Johnson 1985); d rappresenta la distanza tra l'origine ed il punto C di applicazione della forza.

Nel seguito verranno esaminati esempi con area di forma rettangolare di dimensioni L_1 ed L_2 , lungo x ed y rispettivamente. Il dominio A considerato risulta:

$$A = \left(-\frac{L_1}{2} \leq x \leq \frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2} \leq y \leq \frac{L_2}{2}, 0\right) \quad \text{Eq. 1.4}$$

1.3 Galerkin Boundary Element Method (GBEM)

L'Eq. 1.1 è utile per risolvere alcuni problemi analiticamente, tuttavia spesso è necessario adottare una procedura numerica per arrivare ad una soluzione. Per ottenere una soluzione numerica può essere utilizzato un approccio alla Galerkin introducendo la forma bilineare:

$$(w, \bar{r}) = B(r, \bar{r}) \quad \text{Eq. 1.5}$$

dove

$$B(r, \bar{r}) = B(\bar{r}, r) = \int_A \int_A g(x, y, \xi, \eta) r(\xi, \eta) \bar{r}(\xi, \eta) \, dA \, dA \quad \text{Eq. 1.6}$$

$$(w, \bar{r}) = \int_A w(x, y) \bar{r}(x, y) \, dA \quad \text{Eq. 1.7}$$

l'Eq. 1.5 rappresenta la forma debole dell'Eq. 1.1.

L'area del suolo è suddivisa in elementi rettangolari con dimensioni h_{xi} e h_{yi} , e la funzione r è assunta costante a tratti adottando la funzione di forma:

$$\rho_j(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{sull}'i_{th} \text{ elemento} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{Eq. 1.8}$$

Sia la reazione che lo spostamento dell' i_{th} elemento possono essere approssimati come:

$$r(x, y) = \rho(x, y)^T r_i \quad \text{Eq. 1.9}$$

$$w(x, y) = \rho(x, y)^T q_i \quad \text{Eq. 1.10}$$

dove r_i e q_i rappresentano rispettivamente le componenti del vettore delle reazioni del suolo \mathbf{r} e dello spostamento verticale \mathbf{q} . Sostituendo l' Eq. 1.9 e l'Eq. 1.10 nell'Eq. 1.5 si ottiene la forma debole del problema nella forma discreta, come di seguito riportato:

$$\mathbf{H}_r \mathbf{q} = \mathbf{G} \mathbf{r} \quad \text{Eq. 1.11}$$

Nell'Eq. 1.11 gli spostamenti \mathbf{q} possono essere assegnati e le reazioni \mathbf{r} determinate e viceversa. Le componenti delle matrici \mathbf{H}_r (Appendice A3) e \mathbf{G} (Appendice A5) sono:

$$h_{ij} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i \rho_j dx dy = \begin{cases} (x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) = h_{xi} h_{yi} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{Eq. 1.12}$$

$$g_{ij} = -\frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i dx dy \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\rho_j}{d(x, y; \xi, \eta)} d\xi d\eta \quad \text{Eq. 1.13}$$

dove $(x_i, x_{i+1}; y_i, y_{i+1})$ sono le coordinate globali dell' i_{th} elemento di superficie e $(\xi_i, \xi_{i+1}; \eta_i, \eta_{i+1})$ sono le coordinate del j_{th} elemento di superficie. La matrice \mathbf{H}_r è diagonale e la componente h_{ii} coincide con l'area dell'elemento i_{th} .

1.3.1 Discretizzazione della superficie di contatto

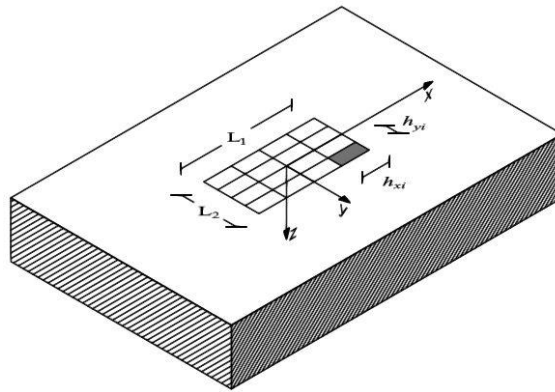
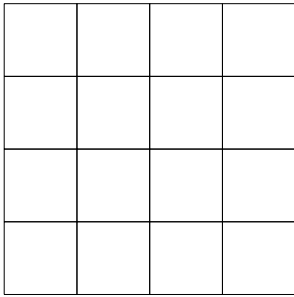
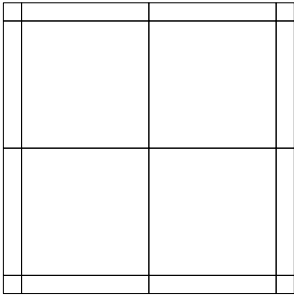
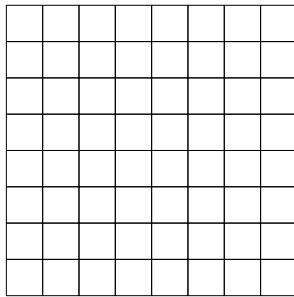
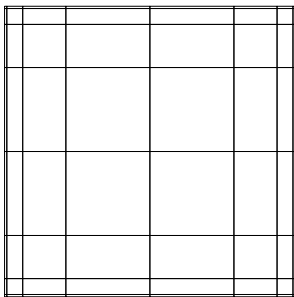
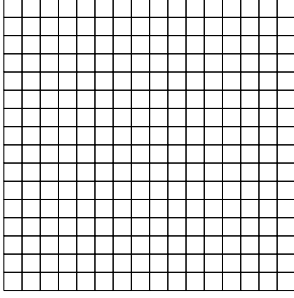
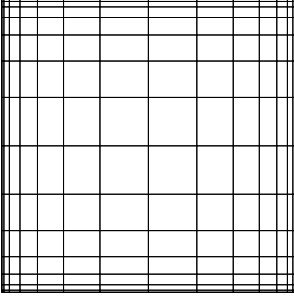


Fig. 1.2. Discretizzazione della superficie di contatto.

La superficie di contatto viene suddivisa in elementi rettangolari. Scelti i valori di n_x ed n_y , relativi alla suddivisione longitudinale e trasversale dell'area di contatto, si ottengono le lunghezze $h_{xi}=L_1/n_x$ ed $h_{yi}=L_2/n_y$ (Fig. 1.1). Tuttavia, in campo tensionale presenta un comportamento singolare vicino ai bordi della superficie rettangolare A (Dauge 1988). Una mesh regolare potrebbe non essere in grado di rappresentare il giusto comportamento delle reazioni e degli spostamenti. Per ottenere risultati più accurati è possibile utilizzare delle mesh "power graded" (Erwin e Stephan 1992; Ainsworth et al.2000; Graham e McLean 2006), caratterizzate da raffittimenti in prossimità dei bordi. La gradualità della mesh è governata dall'esponente $\beta \geq 1$. La generica coordinata adimensionale t definita sull'intervallo $(0,1)$ è così descritta:

$$t_j = \begin{cases} 0.5 \left[\left(\frac{2j}{n} \right)^\beta - 1 \right] & \text{per } 0 \leq j \leq n/2 \\ -t_{n-j} & \text{per } n/2 < j \leq n \end{cases} \quad \text{Eq. 1.14}$$

Dove n è il numero di punti presente nell'intervallo. Nella Tab. 1-1 sono riportati alcuni esempi di discretizzazione con $n_x=n_y=n$ ed $L_1=L_2=1$. Con $\beta=1$ si ha una mesh uniforme, mentre con β crescente si ha una concentrazione di punti in prossimità del bordo della superficie di contatto per meglio cogliere le singolarità.

	$\beta=1$	$\beta=3$
$n_x=n_y=4$		
$n_x=n_y=8$		
$n_x=n_y=16$		

Tab. 1-1. Discretizzazione della superficie. Esempio di power-graded meshes applicata ad una superficie quadrata variando il numero di elementi.

1.4 Modello di trave di Eulero Bernoulli – Vlasov su suolo

Nel paragrafo 1.3 è stato introdotto il metodo degli elementi al contorno GBEM. Come è stato mostrato da Tullini e Tralli (2010) per una trave su semipiano elastico, tale formulazione ben si presta all'accoppiamento di elementi finiti tradizionali con le equazioni integrali al contorno e può essere estesa a problemi più complessi di interazione tra fondazione e struttura, come ad esempio il caso di telai tridimensionali su semispazio elastico.

Il modello di trave che si intende adottare nel seguito non tiene conto delle deformazioni di taglio dovute sia a flessione non uniforme che torsione, di conseguenza si adotterà il modello cinematico basato sulla teoria della flessione di Eulero-Bernoulli e la teoria della torsione non uniforme di Vlasov (1961). Il corrispondente modello numerico è quello proposto da Barsoum e Gallagher (1970)

1.4.1 Formulazione variazionale

1.4.1.1 Modello cinematico

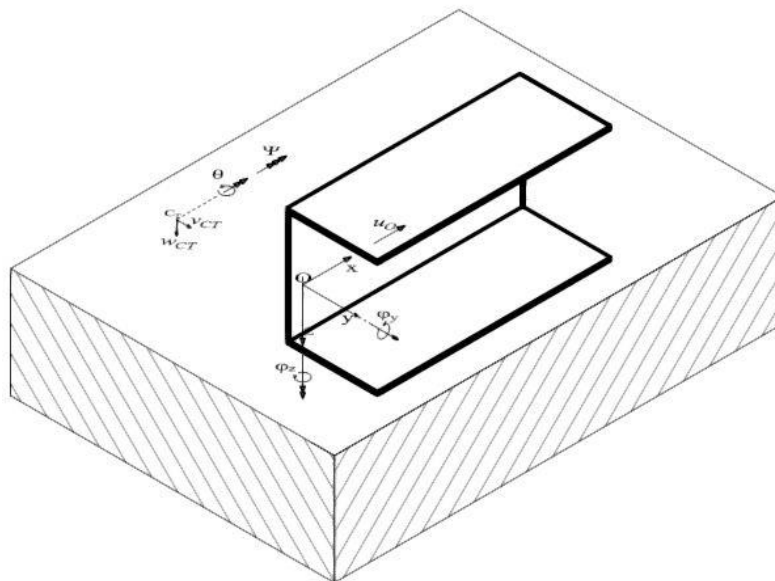


Fig. 1.3. Sistema di coordinate per la trave monosimmetrica su suolo.

La Fig. 1.3 mostra una trave con una generica sezione trasversale monosimmetrica su suolo. Si assume il punto $O(x,y,z)$, coincidente con il baricentro della sezione, come origine del sistema di riferimento, dove y ed z corrispondono agli assi principali di inerzia e C_T coincide con il centro di taglio. Supponendo che le deformazioni nel piano della sezione trasversale siano trascurabili, il campo di spostamento geometricamente esatto (Simo e Vu-Quoc 1991; Ibrahimbegovic 1993) può essere determinato introducendo la matrice delle rotazioni finite (Argyris 1982; Cristfield 1991).

Sviluppando una espansione in serie della matrice di rotazione e mantenendo i termini fino al secondo ordine, il campo di spostamento può essere approssimato nella forma:

$$\begin{aligned} u &= u^{(1)} + u^{(2)} \\ v &= v^{(1)} + v^{(2)} \\ w &= w^{(1)} + w^{(2)} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.15}$$

dove u , v , w , sono le componenti degli spostamenti del punto P appartenente alla generica sezione trasversale lungo le direzioni x , y , z . I termini $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ indicano le componenti di spostamento del primo ordine, mentre i termini $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ indicano le componenti del secondo ordine. Esplicitando le componenti del campo di spostamento al primo ordine si ha:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, s) &= u_o(x) - y\varphi_z(x) + z\varphi_y(x) + \omega(s)\Psi(x) \\ v^{(1)}(x, s) &= v_{CT}(x) - \theta(x)(y - y_{CT}) \\ w^{(1)}(x, s) &= w_{CT}(x) - \theta(x)z \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.16}$$

dove in assenza di deformabilità tagliante risulta:

$$\varphi_y(x) = -\frac{dv}{dx}; \quad \varphi_z(x) = -\frac{dw}{dx}; \quad \Psi(x) = -\frac{d\theta}{dx}; \quad \text{Eq. 1.17}$$

Mentre le componenti del secondo ordine sono espresse da: Chang et al. 1996; Cortinez e Piovan 2006; Piovan e Cortinez 2007; Laudiero e Zaccaria 1988.

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x, s) &= \frac{1}{2} \left[\varphi_z(z)\theta(z)(y - y_{CT}) - \varphi_y(z)\theta(x)z \right] \\ v^{(2)}(x, s) &= \frac{1}{2} \left[-(\varphi_z^2(x) + \theta^2(x))y + \theta^2(x)y_{CT} + \varphi_y(x)\varphi_z(x)z \right] \\ w^{(2)}(x, s) &= \frac{1}{2} \left[-(\varphi_y^2(x) + \theta^2(x))z + \varphi_y(x)\varphi_z(x)y \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.18}$$

Dove y_{CT} è la coordinata del centro di taglio; v_{CT} e w_{CT} sono gli spostamenti del centro di taglio nelle direzioni y ed z ; u_o è lo spostamento assiale della sezione trasversale; φ_y e φ_z sono le rotazioni flessionali intorno ad y ed z e θ è la rotazione torsionale. La funzione $\Psi(x)$ definisce l'ampiezza della deformazione torcente, infine $\omega(s)$ rappresenta il parametro di Vlasov (1961) dato dalla seguente relazione:

$$\frac{d\omega}{ds} - r = 0 \quad \text{Eq. 1.19}$$

dove r rappresenta la distanza tra il centro di taglio C_T e la tangente t alla sezione trasversale nel punto P . Le componenti di deformazione possono essere espresse in termini di tensore di Green:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ \text{con}(i, j &= x, y, z) \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.20}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}) \quad \text{Eq. 1.21}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} (u_{k,i}^{(1)} u_{k,j}^{(1)} + u_{i,j}^{(2)} u_{j,i}^{(2)}) \quad \text{Eq. 1.22}$$

dove l'espressione $u_{i,j}$ rappresenta la derivata di u_i rispetto a j .

Nell'ipotesi di sezione trasversale indeformabile, le componenti di deformazione si riducono a ε_x :

$$\varepsilon_x^{(1)} = u_0' - y\varphi_z' - z\varphi_y' + \omega\Psi' \quad \text{Eq. 1.23}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{2} [v_{CT}' - z\theta']^2 + \frac{1}{2} [w_{CT}' + (y - y_{CT})\theta']^2 + \\ &+ \frac{1}{2} [(y - y_{CT})(\varphi_y'\theta + \theta'\varphi_y) + z(\varphi_z'\theta + \theta'\varphi_z)]^2 \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.24}$$

dove, per esempio, v_{CT}' indica la derivata dello spostamento orizzontale del centro di taglio in x . Per quanto riguarda le tensioni, le componenti del primo ordine sono: la tensione normale σ_x , e le tensioni tangenziali τ_{xy} e τ_{xz} . Le risultanti delle forze interne portano a:

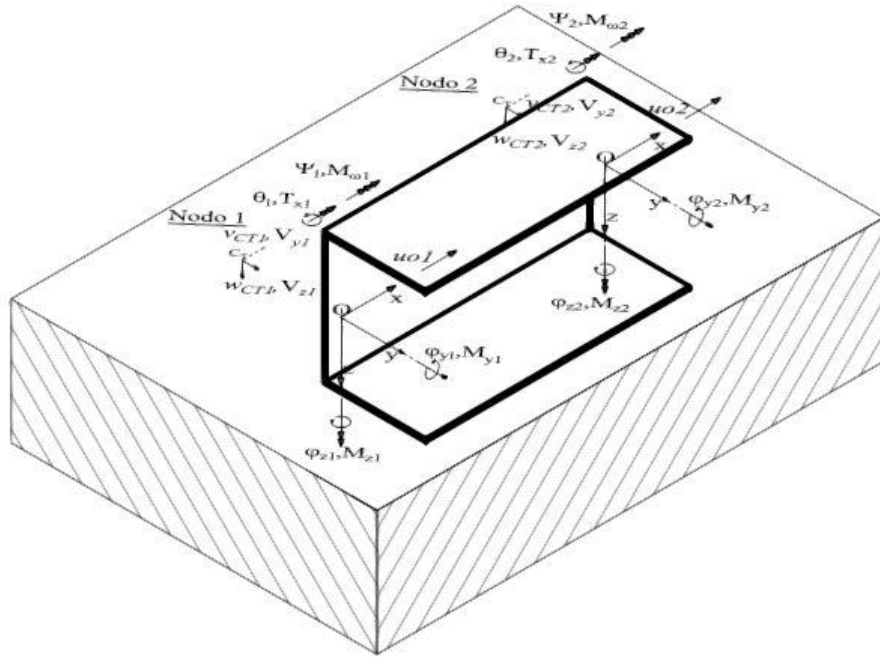
$$N = \int_A \sigma_x dA; M_y = \int_A \sigma_x z dA; M_z = -\int_A \sigma_x y dA; M_\omega = \int_A \sigma_x \omega dA; \quad \text{Eq. 1.25}$$

$$V_y = \int_A \tau_{yx} dA; V_z = \int_A \tau_{zx} dA \quad \text{Eq. 1.26}$$

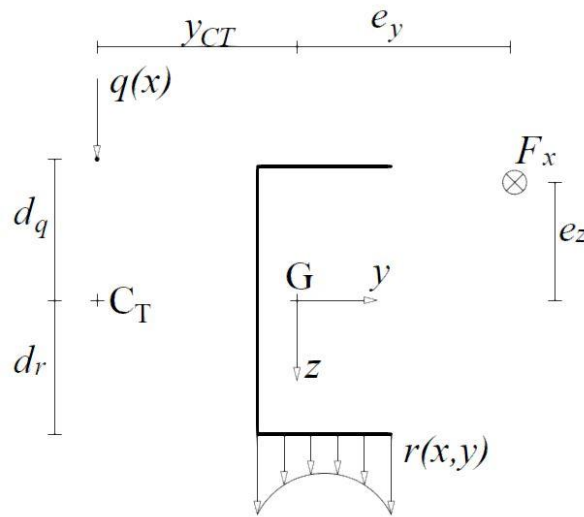
$$T_x = \int_A (\tau_{zx} y - \tau_{yx} z) dA + V_z y_{CT}; M_x^\omega = \int_A \left(\tau_{zx} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \tau_{yx} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dA \quad \text{Eq. 1.27}$$

dove N rappresenta lo sforzo normale; V_y e V_z sono gli sforzi di taglio; M_y e M_z sono i momenti flettenti rispetto agli assi y ed z rispettivamente; M_ω , T_x , e M_x^ω sono rispettivamente bimomento, momento torcente e momento torcente dovuto alla torsione non uniforme; A rappresenta l'area della sezione trasversale.

1.4.1.2 Energia potenziale totale per la trave di fondazione (modello di Barsoum e Gallagher)



(a)



(b)

Fig. 1.4. Modello discreto di Barsoum-Gallagher per sezione monosimmetrica. Vista tridimensionale (a); sezione trasversale (b).

Con riferimento all'elemento con sezione monosimmetrica su suolo (Fig. 1.4 a), l'energia potenziale totale è data da:

$$\Pi_b = U - (\bar{V} + \tilde{V}) \quad \text{Eq. 1.28}$$

dove U rappresenta l'energia di deformazione e V rappresenta l'energia potenziale dei carichi applicati.

L'energia di deformazione U è data da:

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left[E_b J_z (v'')^2 + E_b J_y (w'')^2 + E_b J_\omega (\theta'')^2 + G_b J_t (\theta')^2 + E_b A (u')^2 \right] dx \quad \text{Eq. 1.29}$$

dove l'apice indica d/dx ; E_b G_b indicano rispettivamente il modulo elastico e il modulo tagliante; J_y , J_z sono i momenti di inerzia, J_ω è il momento settoriale e J_t è la costante di torsione di De Saint Venant.

L'energia potenziale dei carichi esterni si compone di due termini. Il primo contiene il prodotto dei carichi applicati per gli omologhi spostamenti:

$$\begin{aligned} \bar{V} = & F_x (u_{o1} - u_{o2}) + V_{y1} v_1 + V_{y2} v_2 + V_{z1} w_1 + V_{z2} w_2 + M_{y1} \varphi_{y1} + M_{y2} \varphi_{y2} + M_{z1} \varphi_{z1} + M_{z2} \varphi_{z2} \\ & + \int_L q(x) w dx + \int_{A_s} r(x, y) w dA_s + T_x (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.30}$$

L'utilizzo del concetto di energia potenziale nella definizione di relazioni per l'analisi di instabilità presuppone che si siano verificate deformazioni di prebuckling. Quindi, il secondo termine contiene solo le variazioni di energia potenziale dovute all'azione flessionale e torsionale.

$$\tilde{V} = \sum_i V(i) \quad \text{Eq. 1.31}$$

$$V(1) = \frac{1}{2} \int_L F_x \left[(v'^2 + w'^2) + S_o (\theta')^2 \right] dx$$

$$S_o = \frac{J_y + J_z}{A} + e_y \beta_1 + e_z \beta_2$$

$$\beta_1 = \frac{1}{J_y} \left(\int_A z^3 dA + \int_A y^2 z dA \right)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{J_z} \left(\int_A y^3 dA + \int_A z^2 y dA \right) - 2y_{CT}$$

Eq. 1.32

$$V(2) = -\frac{1}{2} V_{y1} \int_L w'' \theta x dx - \frac{1}{2} V_{y2} \int_L w'' \theta (L-x) dx$$

Eq. 1.33

$$V(3) = -\frac{1}{2}V_{z1} \int_L v'' \theta x dx - \frac{1}{2}V_{z2} \int_L v'' \theta (L-x) dx \quad \text{Eq. 1.34}$$

$$V(4) = -\frac{1}{2}M_{y1} \int_L v'' \theta dx + \frac{1}{2}M_{y2} \int_L v'' \theta dx \quad \text{Eq. 1.35}$$

$$V(5) = -\frac{1}{2}M_{z1} \int_L w'' \theta dx + \frac{1}{2}M_{z2} \int_L w'' \theta dx \quad \text{Eq. 1.36}$$

$$V(6) = -\frac{1}{4}q \left[\int_L v'' \theta \left[x^2 + (L-x)^2 \right] dx \right] - \frac{1}{4} \left[\int_{A_s} r(x,y) v'' \theta \left[x^2 + (L-x)^2 \right] dA_s \right] \\ - \frac{1}{2}qd_q \int_L \theta^2 dx - \frac{1}{2}d_r \int_{A_s} r(x,y) \theta^2 dA_s \quad \text{Eq. 1.37}$$

$$V(7) = -\frac{1}{2}T_x \int_L (v' w'' - w' v'') dx \quad \text{Eq. 1.38}$$

dove A indica l'area della sezione trasversale e A_s indica l'area a contatto con il suolo. L'Eq. 1.37 contiene il contributo del secondo ordine delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore.

1.4.1.3 Energia potenziale totale del suolo

Focalizzando l'attenzione sul comportamento del semispazio, lo spostamento verticale $w(x,y,z)$ di un punto della superficie di contatto soggetto ad una generica distribuzione di reazioni $r(\xi,\eta)$ è dato dalla soluzione di Boussinesq. Sostituendo l'Eq. 1.2 nell'Eq. 1.1 si ottiene:

$$w(x,y,0) = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi,\eta) d\xi d\eta}{d(x,y;\xi,\eta)} \quad \text{Eq. 1.39}$$

Per il suolo l'energia di deformazione U_s e l'energia potenziale Π_s valgono:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x,y) w(x,y,0) dx dy \quad \text{Eq. 1.40}$$

$$\Pi_s = U_s - \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x,y) w(x,y,0) dx dy = -\frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x,y) w(x,y,0) dx dy \quad \text{Eq. 1.41}$$

Sostituendo l'Eq. 1.39 nell'Eq. 1.41 si ottiene:

$$\Pi_s = -\frac{(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) dx dy \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{d(x, y; \xi, \eta)} \quad \text{Eq. 1.42}$$

1.4.1.4 Energia potenziale totale del sistema trave-semispazio

Vale la pena notare che la soluzione di Boussinesq è valida per un semispazio caricato da tensioni superficiali normali al suo contorno che deve essere libero di deformarsi altrove. Di conseguenza, i vincoli esterni non possono essere applicati direttamente al substrato e gli unici vincoli consentiti sono quelli imposti dalla sovrastruttura alla trave di fondazione. Pertanto, possono essere assegnati solo vincoli del tipo $R_i(s, s') = 0$ tra spostamenti o rotazioni lungo l'asse della trave.

La modellazione di una trave di fondazione appoggiata agli estremi richiede la seguente equazione:

$$R_1 = w(L/2) - w(-L/2) = 0 \quad \text{Eq. 1.43}$$

Tale vincolo si riferisce a telai con colonne e travi in elevazione molto rigidi, pertanto la struttura impone all'estremità della trave uno spostamento relativo nullo ed una rotazione relativa indipendente.

Una trave con estremità scorrevoli richiede il seguente sistema di equazioni:

$$R_1 = w'(L/2) - w'(-L/2) = 0 \quad \text{Eq. 1.44}$$

$$R_2 = w'(L/2) + w'(-L/2) = 0 \quad \text{Eq. 1.45}$$

Tale vincolo si riferisce a un telaio con colonne rigide e trave in elevazione semplicemente appoggiata con rigidità assiale infinita. La struttura impedisce rotazioni all'estremità della fondazione ma consente spostamenti verticali indipendenti.

Infine, una trave con appoggi torsionali richiede il seguente sistema di equazioni:

$$R_1 = \theta'(L/2) - \theta'(-L/2) = 0 \quad \text{Eq. 1.46}$$

$$R_2 = \theta'(L/2) + \theta'(-L/2) = 0 \quad \text{Eq. 1.47}$$

Tale vincolo si riferisce a travi di fondazione appoggiate torsionalmente a travi ortogonali che lasciano libero l'ingobbamento.

Le equazioni di vincolo possono essere incluse nell'energia potenziale totale del sistema trave-substrato attraverso un approccio penalty. Tale energia è espressa dalla somma del contributo della trave, del suolo e dei vincoli:

$$\Pi_{tot}(v, \varphi_z, w, \varphi_y, \theta, r) = \Pi_b(v, \varphi_z, w, \varphi_y, \theta, r) + \Pi_s(r) + k/2 \sum_i \left[R_i(v, \varphi_z, w, \varphi_y, \theta) \right]^2 \quad \text{Eq. 1.48}$$

Dove k indica un opportuno parametro di penalty che deve sufficientemente grande per soddisfare le condizioni di vincolo.

Con riferimento al solo caso di flessione, analoghi risultati sono stati ottenuti da Kikuchi(1980), Bjelak and Stephan (1983) per travi su suolo alla Pasternak, da Tullini e Tralli (2010) per travi su semipiano elastico, da Tullini e Baraldi (2018) per travi su semispazio elastico e da Tullini e Baraldi (2021) per travi su semispazio elastico con vincoli interni agli estremi della trave.

1.4.2 Funzioni di forma

Gli spostamenti incogniti, nel caso più generale, possono essere interpolati utilizzando dei polinomi Hermitiani modificati da parametri che assorbono l'influenza delle deformazioni taglianti. Queste funzioni di forma derivano dalle soluzioni per travi a sezione doppiamente simmetriche (Minghini et al.2007; Kosmatka 1995). Le funzioni descritte sono utilizzate per il problema di flessione e di torsione non uniforme, mentre per il problema assiale e per quello di torsione alla De Saint Venant sono state considerate delle funzioni di forma lineari.

$$\begin{aligned} N_{11}^i &= \frac{1}{1+\phi_i} \left[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + \phi_i(1-\xi) \right]; & N_{21}^i &= \frac{6\xi}{(1+\phi_i)l} (1-\xi) \\ N_{12}^i &= -\frac{l}{1+\phi_i} \xi \left[(1-\xi)^2 + \phi_i(1-\xi)/2 \right]; & N_{22}^i &= \frac{1}{1+\phi_i} \left[(1-\xi)\phi_i + 1 - 4\xi + 3\xi^2 \right] \\ N_{13}^i &= \frac{1}{1+\phi_i} \left[3\xi^2 - 2\xi^3 + \phi_i\xi \right]; & N_{23}^i &= -\frac{6\xi}{(1+\phi_i)l} (1-\xi) \\ N_{14}^i &= -\frac{l}{1+\phi_i} \xi \left[\xi^2 - \xi - \phi_i(1-\xi)/2 \right]; & N_{24}^i &= \frac{1}{1+\phi_i} (-2\xi + 3\xi^2 + \phi_i\xi) \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.49}$$

Con riferimento alla flessione nel piano y - z e alla torsione nell'Eq. 1.49 sono riportate le funzioni di forma utilizzate, mentre per il piano x - z , $N_{12}^x, N_{14}^x, N_{21}^x$ e N_{23}^x sono di segno opposto. Nell'Eq. 1.49 l è la lunghezza dell'elemento finito; $\xi = x/l$; i coefficienti $\phi_i (i = x, y, \omega)$ sono riportati nell'Eq. 1.50.

$$\phi_x = \frac{12E_b J_y}{G_b D_x l^2}; \quad \phi_y = \frac{12E_b J_x}{G_b D_y l^2}; \quad \phi_\omega = \frac{12E_b J_\omega}{G_b D_\omega l^2} \quad \text{Eq. 1.50}$$

Vale la pena notare che quando le deformazioni taglianti sono trascurabili $\phi_i=0$ per $(i=x,y,\omega)$ il polinomio descritto nell'equazione si riduce al classico polinomio Hermitiano e le N_{2j} si ottengono dalla derivata prima delle N_{1j} . $=f_i$ come mostrato nell'Eq. 1.51.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \left[1 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]; & f_1' &= 6 \frac{x^2}{L^3} - 6 \frac{x}{L^2}; & f_1'' &= 12 \frac{x}{L^3} - \frac{6}{L^2}; \\
 f_2 &= \left[3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]; & f_2' &= 6 \frac{x}{L^2} - 6 \frac{x^2}{L^3}; & f_2'' &= \frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3}; \\
 f_3 &= -x \left[\left(\frac{x}{L} \right) - 1 \right]^2; & f_3' &= -3 \frac{x^2}{L^2} + 4 \frac{x}{L} - 1; & f_3'' &= -6 \frac{x}{L^2} + \frac{4}{L}; \\
 f_4 &= -x \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right) \right]; & f_4' &= -3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x}{L}; & f_4'' &= -6 \frac{x}{L^2} + \frac{2}{L};
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 1.51}$$

Di conseguenza la matrice \mathbf{K}_e si riduce alla matrice elastica per sezioni simmetriche come riportato da Barsoum e Gallagher (1970). Se poi le componenti degli spostamenti del secondo ordine (Eq. 1.18) sono trascurate e le forze applicate sono costanti, anche la matrice \mathbf{K}_g si riduce a quella riportata da Barsoum e Gallagher. Nel seguito, per la descrizione del modello numerico di Barsoum Gallagher sono state considerate le funzioni f_i e le loro derivate (Eq. 1.51).

1.4.3 Modello agli elementi finiti di Barsoum-Gallagher su suolo

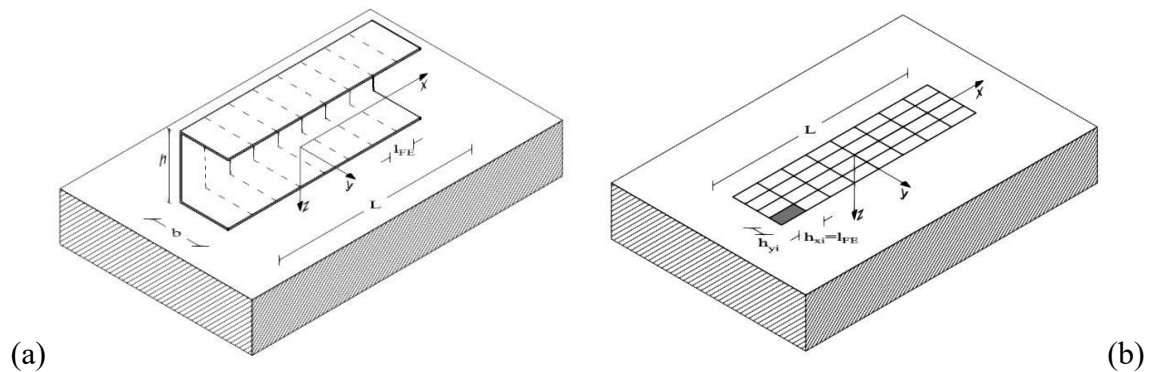
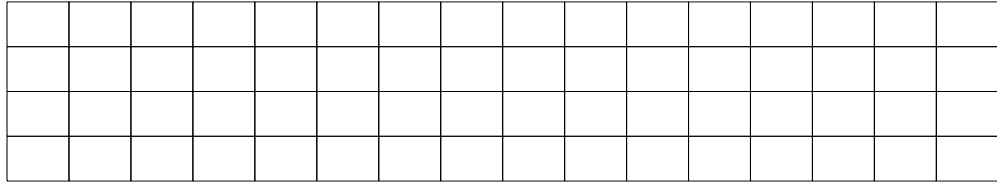
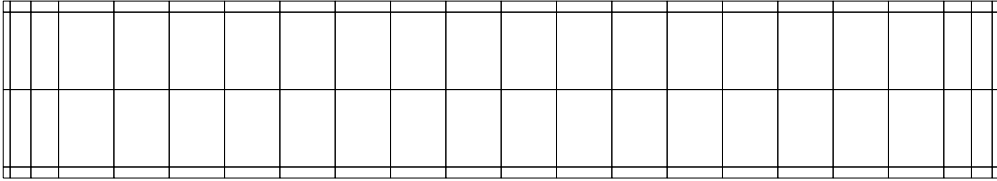
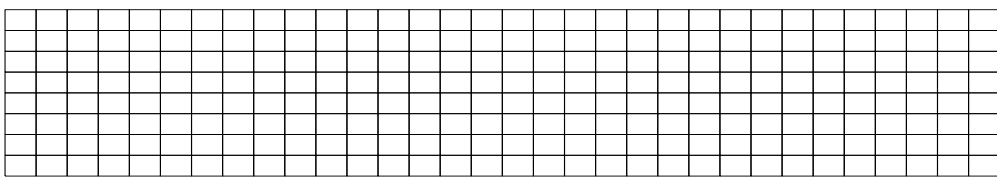
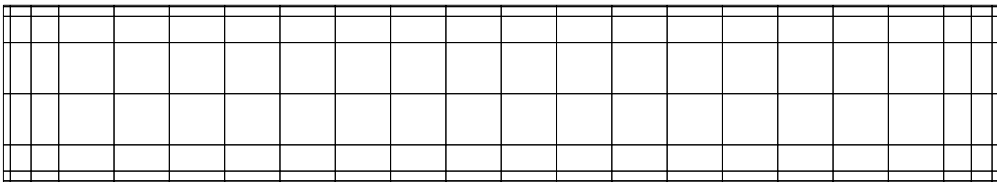
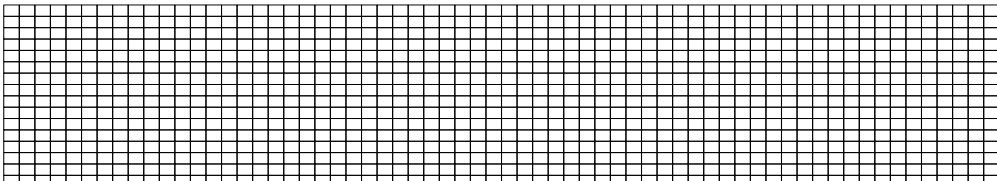
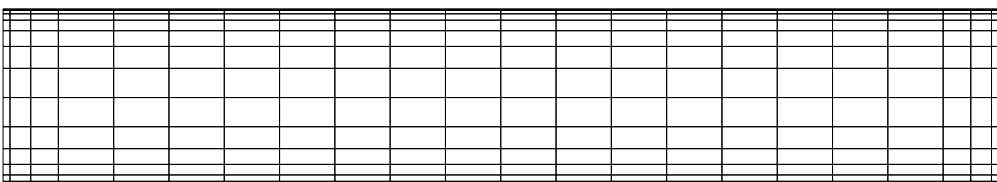


Fig. 1.5. Discretizzazione dell'elemento finito di fondazione (a), discretizzazione della superficie di contatto (b).

La trave di fondazione viene suddivisa, lungo il proprio asse, in elementi finiti di lunghezza l_{FE} (Fig. 1.5,a). La superficie di contatto rettangolare può essere discretizzata nelle direzioni x ed y (Fig. 1.5,b) seguendo diversi metodi, come è stato mostrato nel paragrafo 1.3.1. La suddivisione lungo l'asse della fondazione può seguire la discretizzazione degli elementi finiti della trave, quindi si ha che la lunghezza del generico elemento suolo h_{xi} risulta pari a l_{FE} . Nella direzione y , invece, la scelta della suddivisione è molto importante. Infatti, la scelta $n_y=1$ porterebbe ad avere una reazione del suolo costante nella sezione trasversale, questo risultato sarebbe in contraddizione con l'ipotesi di sezione trasversalmente rigida rispetto al suolo. Al contrario la scelta di $n_y > 1$ consente di rappresentare al meglio le singolarità di pressione in prossimità dei bordi. Tuttavia, per valutare correttamente le singolarità della pressione del suolo in prossimità dei bordi, è possibile suddividere ulteriormente gli elementi finiti all'estremità della trave definendo un numero di suddivisione $n_{x,end}$ e utilizzando in questa porzione della *trave* una discretizzazione di tipo *graded* con $\beta=3$ come mostrato nella Tab. 1-2 dove sono riportati gli esempi delle discretizzazioni utilizzate nei capitoli successivi, in particolare è riportata una suddivisione lungo l'asse della trave pari a $n_x=16$ ed una suddivisione trasversale pari a n_y variabile.

$n_y=4$	$n_{x,end}=1$ $\beta=1$	
	$n_{x,end}=3$ $\beta=3$	
$n_y=8$	$n_{x,end}=1$ $\beta=1$	
	$n_{x,end}=3$ $\beta=3$	
$n_y=16$	$n_{x,end}=1$ $\beta=1$	
	$n_{x,end}=3$ $\beta=3$	

Tab. 1-2. Discretizzazione utilizzata per la superficie di contatto tra trave e suolo elastico

La reazione del suolo viene approssimata come descritto nel paragrafo 1.3, adottando una funzione costante a tratti all'interno di ogni elemento di terreno (Eq. 1.8), le reazioni possono scriversi come:

$$r_k(\xi, \eta) = [\mathbf{p}_k(\xi, \eta)]^T \mathbf{r}_k \quad \text{Eq. 1.52}$$

Utilizzando le funzioni di forma f_i descritte nel paragrafo 1.4.2 e scrivendo il campo di spostamenti in forma discreta si perviene a:

$$u = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 = f_u \{u\}$$

$$v = f_1v_1 + f_2v_2 + f_3\varphi_{z1} + f_4\varphi_{z2} = f_v \left\{ \begin{array}{l} v \\ \varphi_z \end{array} \right\}$$

$$w = f_1w_1 + f_2w_2 + f_3\varphi_{y1} + f_4\varphi_{y2} = f_w \left\{ \begin{array}{l} w \\ \varphi_y \end{array} \right\}$$

$$\theta = f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_3\Psi_1 + f_4\Psi_2 = f_\theta \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\}$$

Eq. 1.53

dove le funzioni di forma f_i ($i=1, 2, 3, 4$) e le derivate sono quelle descritte dall'Eq. 1.51. Sostituendo l'Eq. 1.52 e l' Eq. 1.53 nell'Eq. 1.48 l'energia potenziale totale si trasforma nella seguente espressione:

$$\begin{aligned} \Pi_{tot} = & \frac{[u]}{2} \left[\int_L f_u' f_u' E A dx \right] \{u\} + \frac{[w, \varphi_y]}{2} \left[\int_L f_w'' f_w'' E J_y dx \right] \left\{ \begin{array}{l} w \\ \varphi_y \end{array} \right\} \\ & + \frac{[v, \varphi_z]}{2} \left[\int_L f_v'' f_v'' E J_z dx \right] \left\{ \begin{array}{l} v \\ \varphi_z \end{array} \right\} + \frac{[\theta, \Psi]}{2} \left[\int_L (f_\theta'' f_\theta'' E J_\omega + f_\theta' f_\theta' G J_t) dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} \\ & - \frac{[w, \varphi_y]}{2} \left[F_x \int_L f_v' f_v' dx \right] \left\{ \begin{array}{l} w \\ \varphi_y \end{array} \right\} - \frac{[v, \varphi_z]}{2} \left[F_x \int_L f_w' f_w' dx \right] \left\{ \begin{array}{l} v \\ \varphi_z \end{array} \right\} \\ & - \frac{[\theta, \Psi]}{2} \left[F_x \int_L S_0 f_\theta' f_\theta' dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} + \frac{[w, \varphi_y]}{2} \left[\frac{1}{2} (M_{z1} - M_{z2}) \int_L f_w'' f_\theta dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} \\ & + \frac{[v, \varphi_z]}{2} \left[\frac{1}{2} (M_{y1} - M_{y2}) \int_L f_v'' f_\theta dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} + [w, \varphi_y] \left[\frac{1}{2} V_{y1} \int_L f_w'' f_\theta x dx + \frac{1}{2} V_{y2} \int_L f_w'' f_\theta (L-x) dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} \\ & + [v, \varphi_z] \left[\frac{1}{2} V_{z1} \int_L f_v'' f_\theta x dx + \frac{1}{2} V_{z2} \int_L f_v'' f_\theta (L-x) dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} \\ & + [v, \varphi_z] \left[\frac{1}{4} q \int_L f_v'' f_\theta (x^2 + (L-x)^2) dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} + [v, \varphi_z] \left[\frac{1}{4} \int_{A_s} r(x, y) [f_v'' f_\theta (x^2 + (L-x)^2)] dA_s \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} \\ & + \frac{[\theta, \Psi]}{2} \left[q d_q \int_L f_\theta f_\theta dx \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} + \frac{[\theta, \Psi]}{2} \left[d_r \int_{A_s} r(x, y) f_\theta f_\theta dA_s \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta \\ \Psi \end{array} \right\} \\ & + [v, \varphi_z] \left[\frac{T_x}{2} \int_L (f_v' f_w'' - f_w' f_v'') dx \right] \left\{ \begin{array}{l} w \\ \varphi_y \end{array} \right\} \\ & - [u] \{F_x\} - [\varphi_z] \{M_z\} - [w] \{V_z\} - [\theta] \{T_x\} - q \int_L f_w dx \left\{ \begin{array}{l} w \\ \varphi_y \end{array} \right\} + \int_{A_s} r(x, y) f_w dA_s \left\{ \begin{array}{l} w \\ \varphi_y \end{array} \right\} \\ & - \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i(x, y) dx dy \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\rho_j(\xi, \eta)}{d(x, y, \xi, \eta)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

 Eq.
1.54

L'Eq. 1.54 può essere riscritta nella seguente forma matriciale:

$$\Pi_{tot}(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_g) \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F} + \mathbf{q}^T \mathbf{H} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \quad \text{Eq. 1.55}$$

dove \mathbf{G} (Appendice A5) è la matrice di rigidità del terreno; \mathbf{H} (Appendice A4) è la matrice che garantisce la compatibilità dello spostamento tra la trave e la superficie del semispazio; \mathbf{K}_e (Appendice A1) è la matrice di rigidezza della trave di fondazione; \mathbf{K}_g (Appendice A2) è la matrice geometrica della trave di fondazione; \mathbf{r} è il vettore contenente le reazioni dei singoli elementi di suolo; \mathbf{q} è il vettore contenente gli spostamenti nodali; \mathbf{F} è il vettore dei carichi esterni.

La condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale Π_{tot} in forma discreta fornisce il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_g) & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 1.56}$$

La soluzione formale del problema porta a:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{q} \quad \text{Eq. 1.57}$$

$$(\mathbf{K}_e - \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_{soil}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad \text{Eq. 1.58}$$

dove \mathbf{K}_{soil} è la matrice di rigidezza del semispazio:

$$\mathbf{K}_{soil} = \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^T \quad \text{Eq. 1.59}$$

Il parametro che caratterizza il sistema fondazione-semispazio è αL (Eq. 1.60) e sarà utilizzato nel seguito per descrivere il rapporto tra la rigidezza flessionale della trave di fondazione e la rigidezza del semispazio elastico.

$$\alpha L = \sqrt[3]{\frac{E_s b}{(1-\nu^2)} \frac{L^3}{E_b I_y}} \quad \text{Eq. 1.60}$$

Il parametro αL coincide con quello utilizzato da diversi ricercatori per descrivere l'interazione suolo-struttura nello stato piano ponendo $b=1$ (Biot 1937; Vesic 1961; Selvadurai 1979; Tullini e Tralli 2010).

1.4.4 Caso delle sezioni compatte con torsione alla De Saint Venant

Nel caso di sezioni compatte il contributo dell'ingobbamento Ψ può essere trascurato ed il modello agli elementi finiti presenta solo 6 gradi di libertà. L'energia di deformazione relativa alla sola rotazione torsionale si può scrivere nel seguente modo:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_L G_b J_t (\theta')^2 dx \quad \text{Eq. 1.61}$$

Per il caso di travi con sezioni compatte le funzioni di forma sono scelte lineari come mostrato nell'Eq. 1.62.

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \theta_1 + \left(\frac{x}{L}\right) \theta_2 = f_{\theta}^{DSV} \{\theta\} \quad \text{Eq. 1.62}$$

La sostituzione delle funzioni di forma all'interno dell'energia di deformazione permette di scriverla in modo discreto:

$$U_b = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e^{\theta} \mathbf{q} \quad \text{Eq. 1.63}$$

dove le componenti della sottomatrice \mathbf{K}_e^{θ} relativa alla torsione di De Saint Venant sono:

$$k_{e,ij}^{\theta} = \int_L f_{\theta,i}^{DSV} ' f_{\theta,j}^{DSV} ' G J_t dx \quad \text{con } f_{\theta}^{DSV} = \left\{1 - \frac{x}{L}; \frac{x}{L}\right\} \quad \text{Eq. 1.64}$$

e la sottomatrice \mathbf{K}_e^{θ} può essere scritta:

$$\mathbf{K}_e^{\theta} = \frac{G_b J_t}{L} \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{Eq. 1.65}$$

1.5 Equazioni risolutive per casi particolari

All'interno di questo capitolo sono ricavate le equazioni risolutive per diversi problemi di interazione tra suolo e fondazione.

1.5.1 Trave con sezione rettangolare soggetta a torsione

Nel seguito viene studiata una trave con sezione rettangolare poggiata su suolo elastico senza vincoli di estremità e soggetta a momento torcente. Essendo la sezione compatta è possibile trascurare il contributo dell'ingobbamento, per cui l'energia di deformazione relativa alla sola rotazione torsionale può scriversi come:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_L G_b J_t (\theta')^2 dx \quad \text{Eq. 1.66}$$

Il lavoro compiuto dai carichi esterni vale:

$$\bar{V} = - \int_{A_s} r(x, y) w(x, y, 0) dA_s + \int_L m_x \theta(x) dx \quad \text{Eq. 1.67}$$

dove m_x è la coppia torcente distribuita lungo l'elemento. L'energia potenziale della trave è pari a:

$$\Pi_b = U - V = \frac{1}{2} \int_L G_b J_t (\theta')^2 dx + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) w(x, y, 0) dx dy - \int_L m_x \theta(x) dx \quad \text{Eq. 1.68}$$

L'energia potenziale del suolo è riportata nell'Eq. 1.42, assumendo la sezione trasversale rigida risulta che:

$$w(x, y, 0) = \theta(x) y \quad \text{Eq. 1.69}$$

L'energia potenziale totale in formulazione variazionale è pari a:

$$\begin{aligned} \Pi_{tot} = \Pi_b + \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_L G_b J_t (\theta')^2 dx + \int_L [\theta(x) \int_{-b/2}^{b/2} r(x, y) y] dx dy - \int_L m_x \theta(x) dx + \\ & - \frac{(1 - \nu_s^2)}{2\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) dx dy \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{d(x, y; \xi, \eta)} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.70}$$

Sostituendo le funzioni di forma lineari per la trave riportate nell'Eq. 1.62 e costanti a tratti per il suolo come riportato nell'Eq. 1.8 si può scrivere l'energia potenziale nella forma discreta:

$$\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e^\theta \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F}^\theta + \mathbf{q}^T \mathbf{H}^\theta \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \quad \text{Eq. 1.71}$$

dove la sottomatrice \mathbf{K}_e^θ relativa alla torsione uniforme ed il vettore dei carichi esterni \mathbf{F}^θ presentano le seguenti componenti:

$$k_{e,ij}^\theta = \int_L f_\theta^{DSV} \cdot f_\theta^{DSV} \cdot G J_i dx \quad \text{con } f_\theta^{DSV} = \left\{ 1 - \frac{x}{L}; \frac{x}{L} \right\} \quad \text{Eq. 1.72}$$

$$f_{g,i}^\theta = b \int_L f_\theta^{DSV} m_x(x) dx \quad \text{Eq. 1.73}$$

La soluzione degli integrali porta alla sottomatrice \mathbf{K}_e^θ riportata nell'Eq. 1.65 e le componenti delle matrici \mathbf{H}^θ e \mathbf{G} sono:

$$h_{r,g,i} = \int_0^{h_{xi}} f_\theta^{DSV}(x) dx \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_i \eta d\eta = \frac{h_{xi} h_{yi} (y_i + y_{i+1})}{4} \quad \text{Eq. 1.74}$$

$$g_{ij} = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i(x, y) dx dy \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\rho_j(\xi, \eta)}{d(x, y; \xi, \eta)} d\xi d\eta \quad \text{Eq. 1.75}$$

Richiedendo la stazionarietà dell'energia potenziale si arriva al seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^\theta & \mathbf{H}^\theta \\ \mathbf{H}^{\theta T} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^\theta \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 1.76}$$

che formalmente può essere risolto come segue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{\theta T} \mathbf{q} \quad \text{Eq. 1.77}$$

$$(\mathbf{K}_e^\theta + \mathbf{K}_{soil}^\theta) \mathbf{q} = \mathbf{F}^\theta \quad \text{con } \mathbf{K}_{soil}^\theta = \mathbf{H}^\theta \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{\theta T} \quad \text{Eq. 1.78}$$

I risultati ottenuti risolvendo le equazioni sopra descritte sono illustrati all'interno dei paragrafi 2.2.1 e 2.2.2.

1.5.2 Trave in parete sottile su suolo soggetta a coppia torcente

Nel seguito si ricavano le equazioni risolutive per una trave in parete sottile poggiata su suolo elastico senza vincoli di estremità e soggetta a momento torcente. L'energia di deformazione relativa alla rotazione torsionale ed all'ingobbamento può scriversi come:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_L \left[E_b J_\omega (\Psi')^2 + G_b J_t (\theta')^2 \right] dx \quad \text{Eq. 1.79}$$

Il lavoro compiuto dai carichi esterni vale:

$$\bar{V} = - \int_{A_s} r(x, y) w(x, y, 0) dA_s + \int_L m_x \theta(x) dx \quad \text{Eq. 1.80}$$

L'energia potenziale della trave è pari a:

$$\Pi_b = U - V = \frac{1}{2} \int_L \left[E_b J_\omega (\Psi')^2 + G_b J_t (\theta')^2 \right] dx + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) w(x, y, 0) dx dy - \int_L m_x \theta(x) dx \quad \text{Eq. 1.81}$$

L'energia potenziale del suolo è riportata nell'Eq. 1.42, assumendo la sezione trasversale rigida (Eq. 1.69) risulta che l'energia potenziale totale in formulazione variazionale vale:

$$\begin{aligned} \Pi_{tot} = \Pi_b + \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_L \left[E_b J_\omega (\Psi')^2 + G_b J_t (\theta')^2 \right] dx + \int_L [\theta(x) \int_{-b/2}^{b/2} r(x, y) y] dy dx - \int_L m_x \theta(x) dx \\ & - \frac{(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) dx dy \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{d(x, y; \xi, \eta)} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.82}$$

Sostituendo le funzioni di forma riportate nell'Eq. 1.51 per la trave e nell'Eq. 1.8 per il suolo si può scrivere l'energia potenziale nella forma discreta:

$$\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e^{\theta, \Psi} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F}^{\theta, \Psi} + \mathbf{q}^T \mathbf{H}^{\theta, \Psi} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \quad \text{Eq. 1.83}$$

dove la sottomatrice $\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi}$ relativa alla torsione non uniforme ed il vettore dei carichi esterni $\mathbf{F}^{\theta, \Psi}$ sono formati dalle seguenti componenti:

$$k_{e,ij}^{\theta, \Psi} = \int_L (f_\theta'' f_\theta'' E J_\omega + f_\theta' f_\theta' G J_t) dx \quad \text{Eq. 1.84}$$

$$f_{g,i}^{\theta,\Psi} = b \int_L f_{\theta} m_x(x) dx \quad \text{Eq. 1.85}$$

La soluzione degli integrali porta alla sottomatrice $\mathbf{K}_e^{\theta,\Psi}$:

$$\mathbf{K}_e^{\theta,\Psi} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \Psi_1 & \theta_2 & \Psi_2 \\ j & k & -j & k \\ k & l & -k & m \\ -j & -k & j & -k \\ k & m & -k & l \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} j &= 12G_b J_t / (10L) + 12E_b J_{\omega} / L^3; \\ k &= -G_b J_t / 10 - 6E_b J_{\omega} / L^2; \\ l &= 4G_b J_t L / 30 + 4E_b J_{\omega} / L; \\ m &= -G_b J_t L / 30 + 2E_b J_{\omega} / L; \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.86}$$

le componenti delle matrici $\mathbf{H}^{\theta,\Psi}$ sono:

$$h_{r\theta,i} = \int_0^{h_{xi}} f_i(x) dx \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_i \eta d\eta = \frac{h_{xi} h_{yi} (y_i + y_{i+1})}{4} \quad \text{con } f_1 e f_2 \quad \text{Eq. 1.87}$$

$$h_{r\Psi,i} = 0 \quad \text{Eq. 1.88}$$

dove $h_{r\Psi,i}$ è nulla perché l'ingobbamento attiva reazioni orizzontali che non sono considerate all'interno di questo lavoro. Le componenti di \mathbf{G} sono riportate nell'Eq. 1.75. Richiedendo la stazionarietà dell'energia potenziale si arriva al seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{\theta,\Psi} & \mathbf{H}^{\theta,\Psi} \\ \mathbf{H}^{\theta,\Psi T} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\theta,\Psi} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 1.89}$$

che formalmente può essere risolto come segue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{\theta,\Psi T} \mathbf{q} \quad \text{Eq. 1.90}$$

$$(\mathbf{K}_e^{\theta,\Psi} + \mathbf{K}_{soil}^{\theta,\Psi}) \mathbf{q} = \mathbf{F}^{\theta,\Psi} \quad \text{con } \mathbf{K}_{soil}^{\theta,\Psi} = \mathbf{H}^{\theta,\Psi} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{\theta,\Psi T} \quad \text{Eq. 1.91}$$

I risultati ottenuti risolvendo le equazioni sopra descritte sono illustrati all'interno del paragrafo 2.2.3.

1.5.3 Instabilità torsionale di una trave su suolo con carico di punta

Nel seguito si analizza l'instabilità per carico di punta di una trave doppiamente simmetrica in parete sottile su suolo elastico senza vincoli di estremità. L'energia di deformazione può scriversi come:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_L [E_b J_\omega (\Psi')^2 + G_b J_t (\theta')^2] dx \quad \text{Eq. 1.92}$$

Il lavoro compiuto dai carichi esterni vale:

$$\bar{V} = - \int_{A_s} r(x, y) w(x, y, 0) dA_s + \int_L m_x \theta(x) dx \quad \text{Eq. 1.93}$$

Il lavoro compiuto dai carichi nella condizione di prebuckling vale:

$$\tilde{V} = \sum_i V(i) \quad \text{Eq. 1.94}$$

$$V(1) = \frac{1}{2} \int_L [F_x S_o (\theta')^2] dx \quad \text{con } S_o = \frac{J_y + J_z}{A} \quad \text{Eq. 1.95}$$

L'energia potenziale della trave è pari a:

$$\begin{aligned} \Pi_b = U - V = & \frac{1}{2} \int_L [E_b J_\omega (\theta'')^2 + G_b J_t (\theta')^2] dx - \frac{1}{2} \int_L [F_x S_o (\theta')^2] dx \\ & + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) w(x, y, 0) dx dy - \int_L m_x \theta(x) dx \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.96}$$

L'energia potenziale del suolo è riportata nell'Eq. 1.42, assumendo la sezione trasversale rigida (Eq. 1.69) risulta che l'energia potenziale totale in formulazione variazionale vale:

$$\begin{aligned} \Pi_{tot} = \Pi_b + \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_L [E_b J_\omega (\Psi')^2 + G_b J_t (\theta')^2] dx - \frac{1}{2} \int_L [F_x S_o (\theta')^2] dx + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L [r(x, y) \theta(x) y] dx dy - \int_L m_x \theta(x) dx \\ & - \frac{(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) dx dy \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{d(x, y; \xi, \eta)} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.97}$$

Sostituendo le funzioni di forma riportate nell'Eq. 1.51 per la trave e nell'Eq. 1.8 per il suolo si può scrivere l'energia potenziale nella forma discreta:

$$\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi} - \mathbf{K}_g^{\theta, \Psi}) \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F}^{\theta, \Psi} + \mathbf{q}^T \mathbf{H}^{\theta, \Psi} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \quad \text{Eq. 1.98}$$

dove le sottomatrici $\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi}$ e $\mathbf{K}_g^{\theta, \Psi}$ relative alla torsione non uniforme ed il vettore dei carichi esterni $\mathbf{F}^{\theta, \Psi}$ sono composti dalle seguenti componenti:

$$k_{e,ij}^{\theta, \Psi} = \int_L (f_{\theta}'' f_{\theta}'' EJ_{\omega} + f_{\theta}' f_{\theta}' GJ_t) dx \quad \text{Eq. 1.99}$$

$$k_{g,ij}^{\theta, \Psi} = F_x \int_L S_0 f_{\theta}' f_{\theta}' dx \quad \text{Eq. 1.100}$$

$$f_{g,i}^{\theta, \Psi} = b \int_L f_{\theta} m_x(x) dx \quad \text{Eq. 1.101}$$

La soluzione degli integrali porta alla sottomatrice $\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi}$ riportata nell'Eq. 1.86 ed alla sottomatrice $\mathbf{K}_g^{\theta, \Psi}$ di seguito riportata:

$$\mathbf{K}_g^{\theta, \Psi} = \frac{F_x S_0}{10} \begin{bmatrix} \theta_1 & \Psi_1 & \theta_2 & \Psi_2 \\ 12/L & -1 & -12/L & -1 \\ -1 & 4L/3 & 1 & -L/3 \\ h & 1 & 12/L & 1 \\ -1 & -L/3 & 1 & 4L/3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1.102}$$

Le componenti di $\mathbf{H}^{\theta, \Psi}$ e \mathbf{G} sono riportate rispettivamente nell'Eq. 1.87 e nell'Eq. 1.75. Richiedendo la stazionarietà dell'energia potenziale si arriva al seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi} - \mathbf{K}_g^{\theta, \Psi}) & \mathbf{H}^{\theta, \Psi} \\ \mathbf{H}^{\theta, \Psi T} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\theta, \Psi} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 1.103}$$

che formalmente può essere risolto come segue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{\theta, \Psi T} \mathbf{q} \quad \text{Eq. 1.104}$$

$$(\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi} - \mathbf{K}_g^{\theta, \Psi} + \mathbf{K}_{soil}^{\theta, \Psi}) \mathbf{q} = \mathbf{F}^{\theta, \Psi} \quad \text{con} \quad \mathbf{K}_{soil}^{\theta, \Psi} = \mathbf{H}^{\theta, \Psi} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{\theta, \Psi T} \quad \text{Eq. 1.105}$$

Considerando il sistema omogeneo associato all'Eq. 1.105 i carichi critici P_{cr} sono calcolati come le radici λ_{cr} dell'Eq. 1.106, che può essere ridotta a un problema standard agli autovalori.

$$\det \left[\mathbf{K}_e^{\theta, \Psi} - \mathbf{K}_g^{\theta, \Psi} + \mathbf{K}_{soil}^{\theta, \Psi} \right] = 0 \quad \text{Eq. 1.106}$$

I carichi torsionali sono adimensionalizzati con il carico critico torsionale $P_{cr,T}$ relativo ad una trave appoggiata torsionalmente agli estremi (Eq. 1.107).

$$P_{cr,T} = \frac{\pi^2 E_b A}{L^2} \left[\frac{J_\omega}{J_0} + \frac{L^2 G J_T}{\pi^2 E J_0} \right] \quad \text{Eq. 1.107}$$

I risultati ottenuti risolvendo le equazioni sopra descritte sono illustrati all'interno del capitolo 3.2.2.

1.5.4 Instabilità flessionale di una trave su suolo con carico di punta

Nel seguito si analizza l'instabilità flessionale per carico di punta di una trave doppiamente simmetrica in parete sottile su suolo elastico senza vincoli di estremità. L'energia di deformazione può scriversi come:

$$U = \frac{1}{2} \int_L E_b J_y (w'')^2 dx \quad \text{Eq. 1.108}$$

Il lavoro compiuto dai carichi esterni in presenza di un carico distribuito $q(x)$ vale:

$$\bar{V} = - \int_{A_s} r(x, y) w(x) dA_s + \int_L q(x) w(x) dx \quad \text{Eq. 1.109}$$

Il lavoro compiuto dai carichi nella condizione di prebuckling vale:

$$\tilde{V} = \sum_i V(i) \quad \text{Eq. 1.110}$$

$$V(1) = \frac{1}{2} \int_L F_x (w')^2 dx \quad \text{Eq. 1.111}$$

L'energia potenziale della trave è pari a:

$$\Pi_b = U - V = \frac{1}{2} \int_L E_b J_y (w'')^2 dx - \frac{1}{2} \int_L F_x (w')^2 dx + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) w(x) dx dy - \int_L q(x) w(x) dx \quad \text{Eq. 1.112}$$

L'energia potenziale del suolo è riportata nell'Eq. 1.42, assumendo la sezione trasversale rigida (Eq. 1.69) risulta che l'energia potenziale totale in formulazione variazionale vale:

$$\begin{aligned} \Pi_{tot} = \Pi_b + \Pi_s = & \frac{1}{2} \int_L E_b J_y (w'')^2 dx - \frac{1}{2} \int_L F_x (w')^2 dx + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) w(x) dx dy - \int_L q(x) w(x) dx \\ & - \frac{(1-\nu_s^2)}{2\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) dx dy \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{d(x, y; \xi, \eta)} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.113}$$

Sostituendo le funzioni di forma riportate nell'Eq. 1.51 per la trave e nell'Eq. 1.8 per il suolo si può scrivere l'energia potenziale nella forma discreta:

$$\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_e^{w, \varphi_y} - \mathbf{K}_g^{w, \varphi_y}) \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{F}^{w, \varphi_y} + \mathbf{q}^T \mathbf{H}^{w, \varphi_y} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \quad \text{Eq. 1.114}$$

dove le sottomatrici $\mathbf{K}_e^{w,\varphi_y}$ e $\mathbf{K}_g^{w,\varphi_y}$ relative alla flessione ed il vettore dei carichi esterni \mathbf{F}^{w,φ_y} sono composti dalle seguenti componenti:

$$k_{e,ij}^{w,\varphi_y} = \int_L f_w'' f_w'' EJ_y dx \quad \text{Eq. 1.115}$$

$$k_{g,ij}^{w,\varphi_y} = F_x \int_L f_w' f_w' dx \quad \text{Eq. 1.116}$$

$$f_{g,i}^{w,\varphi_y} = q \int_L f_w dx \quad \text{Eq. 1.117}$$

La soluzione degli integrali porta alla classica sottomatrice $\mathbf{K}_e^{w,\varphi_y}$ relativa alla flessione ed alla sottomatrice $\mathbf{K}_g^{w,\varphi_y}$ di seguito riportata:

$$\mathbf{K}_g^{w,\varphi_y} = \frac{F_x}{5} \begin{bmatrix} w_1 & \varphi_{y1} & w_2 & \varphi_{y2} \\ 6/L & -1/2 & -6/L & -1/2 \\ -1/2 & -2L/3 & 1/2 & -L/6 \\ -6/L & 1/2 & 6/L & 1/2 \\ -1/2 & -L/6 & 1/2 & -2L/3 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1.118}$$

Le componenti di \mathbf{H}^{w,φ_y} e \mathbf{G} sono riportate rispettivamente nell'Eq. 1.87 e nell'Eq. 1.75. Richiedendo la stazionarietà dell'energia potenziale si arriva al seguente sistema risolutivo:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_e^{w,\varphi_y} - \mathbf{K}_g^{w,\varphi_y}) & \mathbf{H}^{w,\varphi_y} \\ \mathbf{H}^{w,\varphi_y T} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{w,\varphi_y} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 1.119}$$

che formalmente può essere risolto come segue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{w,\varphi_y T} \mathbf{q} \quad \text{Eq. 1.120}$$

$$(\mathbf{K}_e^{w,\varphi_y} - \mathbf{K}_g^{w,\varphi_y} + \mathbf{K}_{soil}^{w,\varphi_y}) \mathbf{q} = \mathbf{F}^{w,\varphi_y} \quad \text{con} \quad \mathbf{K}_{soil}^{w,\varphi_y} = \mathbf{H}^{w,\varphi_y} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^{w,\varphi_y T} \quad \text{Eq. 1.121}$$

Considerando il sistema omogeneo associato all'Eq. 1.21 i carichi critici P_{cr} sono calcolati come le radici λ_{cr} dell'Eq. 1.22, che può essere ridotta a un problema standard agli autovalori.

$$\det \left[\mathbf{K}_e^{w,\varphi_y} - \mathbf{K}_g^{w,\varphi_y} + \mathbf{K}_{soil}^{w,\varphi_y} \right] = 0 \quad \text{Eq. 1.122}$$

I carichi flessionali sono adimensionalizzati con il carico critico torsionale $P_{cr,f}$ relativo ad una trave appoggiata agli estremi (Eq. 1.23).

$$P_{cr,f} = \frac{\pi^2 E_b I_y}{L^2} \quad \text{Eq. 1.123}$$

I risultati ottenuti risolvendo le equazioni sopra descritte sono illustrati all'interno del capitolo 3.2.3.

1.5.5 Instabilità flesso-torsionale di un trave su suolo con coppie concentrate agli estremi e carico distribuito

Nel seguito si analizza l'instabilità flesso-torsionale di una trave doppiamente simmetrica di parete sottile su suolo elastico soggetta a coppie concentrate agli estremi e carico distribuito. L'energia di deformazione può scriversi come:

$$U = \frac{1}{2} \int_L \left[E_b J_y (w'')^2 + E_b J_z (v'')^2 + E_b J_\omega (\theta'')^2 + G_b J_t (\theta')^2 \right] dx \quad \text{Eq. 1.124}$$

Il lavoro compiuto dagli spostamenti al primo ordine dai carichi esterni vale:

$$\bar{V} = V_{z1} w_1 + V_{z2} w_2 + M_{y1} \varphi_{y1} + M_{y2} \varphi_{y2} + \int_L q(x) w dx + \int_{A_s} r(x, y) w dA_s \quad \text{Eq. 1.125}$$

Il lavoro compiuto al secondo ordine dai carichi nella condizione di prebuckling vale:

$$\tilde{V} = \sum_i V(i) \quad \text{Eq. 1.126}$$

$$V(3) = -\frac{1}{2} V_{z1} \int_L v'' \theta dx - \frac{1}{2} V_{z2} \int_L v'' \theta (L-x) dx \quad \text{Eq. 1.127}$$

$$V(4) = -\frac{1}{2} M_{y1} \int_L v'' \theta dx + \frac{1}{2} M_{y2} \int_L v'' \theta dx \quad \text{Eq. 1.128}$$

$$V(6) = -\frac{1}{4} q \left[\int_L v'' \theta \left[x^2 + (L-x)^2 \right] dx \right] - \frac{1}{4} \left[\int_{A_s} r(x, y) v'' \theta \left[x^2 + (L-x)^2 \right] dA_s \right] \\ - \frac{1}{2} q d_q \int_L \theta^2 dx - \frac{1}{2} d_r \int_{A_s} r(x, y) \theta^2 dA_s \quad \text{Eq. 1.129}$$

Si fa notare che il primo addendo dell'energia di deformazione U ed il lavoro dei carichi esterni al primo ordine \bar{V} sono utilizzati per condurre un'analisi statica della trave su suolo con coppie agli estremi e carico distribuito, mentre, il carico q , le sollecitazioni nodali V_{zi} e M_{yi} e le reazioni r ricavate dall'analisi statica lavorano per gli spostamenti al secondo ordine come riportato nell'Eq. 1.126.

L'energia potenziale del suolo è riportata nell'Eq. 1.42, assumendo la sezione trasversale rigida (Eq. 1.69) risulta che l'energia potenziale totale del sistema fondazione-suolo in formulazione variazionale vale:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{tot} &= \Pi_b + \Pi_s = \\
 & \frac{1}{2} \int_L \left[E_b J_y (w'')^2 + E_b J_z (v'')^2 + E_b J_\omega (\theta'')^2 + G_b J_t (\theta')^2 \right] dx + \int_{-b/2}^{b/2} \int_L [r(x, y) \theta(x) y] dx dy \\
 & + V_{z1} w_1 + V_{z2} w_2 + M_{y1} \varphi_{y1} + M_{y2} \varphi_{y2} - \int_{A_s} r(x, y) w dA_s \\
 & - \frac{1}{2} V_{z1} \int_L v'' \theta x dx - \frac{1}{2} V_{z2} \int_L v'' \theta (L-x) dx - \frac{1}{2} M_{y1} \int_L v'' \theta dx + \frac{1}{2} M_{y2} \int_L v'' \theta dx \\
 & + \frac{1}{4} \left[\int_{A_s} r(x, y) v'' \theta [x^2 + (L-x)^2] dA_s \right] + \frac{1}{2} d_r \int_{A_s} r(x, y) \theta^2 dA_s \\
 & + \frac{1}{4} q \left[\int_L v'' \theta [x^2 + (L-x)^2] dx \right] + \frac{1}{2} q d_q \int_L \theta^2 dx \\
 & - \frac{(1-v_s^2)}{2\pi E_s} \int_{-b/2}^{b/2} \int_L r(x, y) dx dy \int_{-b/2}^{b/2} \int_L \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{d(x, y; \xi, \eta)}
 \end{aligned} \tag{Eq. 1.130}$$

Sostituendo le funzioni di forma riportate nell'Eq. 1.51 per la trave e nell'Eq. 1.8 per il suolo si può scrivere l'energia potenziale nella forma discreta:

$$\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{w, \varphi_y} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_e^{v, \varphi_z} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_e^{\theta, \Psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_g^{v, \varphi_z} & \mathbf{K}_g^{v, \varphi_z, \theta, \Psi T} \\ 0 & \mathbf{K}_g^{v, \varphi_z, \theta, \Psi} & \mathbf{K}_g^{\theta, \Psi} \end{bmatrix} \right) \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{w, \varphi_y} \\ \mathbf{F}^{v, \varphi_z} \\ \mathbf{F}^{\theta, \Psi} \end{pmatrix} + \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{w, \varphi_y} \\ 0 \\ \mathbf{H}^{\theta, \Psi} \end{bmatrix} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{G} \mathbf{r} \tag{Eq. 1.131}$$

Come detto in precedenza il problema riportato nell'Eq. 1.131 può essere disaccoppiato in due sottosistemi da risolvere separatamente: il primo sistema (Eq. 1.132), relativo al lavoro dei carichi al primo ordine, presenta solo i gradi di libertà spostamento verticale e rotazione flessionale e rappresenta l'analisi statica della trave soggetta a coppie agli estremi e carico distribuito. Tale analisi preliminare è necessaria per ricavare le sollecitazioni e le reazioni del suolo utili per costruire la matrice geometrica \mathbf{K}_g ; il secondo sistema (Eq. 1.133), relativo al lavoro dei carichi al secondo ordine può essere ricondotto ad un classico problema agli autovalori.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{w,\varphi_y} & \mathbf{H}^{w,\varphi_y} \\ \mathbf{H}^{w,\varphi_y T} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{w,\varphi_y} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 1.132}$$

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{v,\varphi_z} - \mathbf{K}_g^{v,\varphi_z} & \mathbf{K}_g^{v,\varphi_z,\theta,\Psi T} & 0 \\ \mathbf{K}_g^{v,\varphi_z,\theta,\Psi} & \mathbf{K}_e^{\theta,\Psi} - \mathbf{K}_g^{\theta,\Psi} & \mathbf{H}^{\theta,\Psi} \\ \hline 0 & \mathbf{H}^{\theta,\Psi} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Eq. 1.133}$$

Dove le sottomatrici $\mathbf{K}_e^{w,\varphi_y}$, $\mathbf{K}_e^{v,\varphi_z}$ e $\mathbf{K}_e^{\theta,\Psi}$ sono le matrici di rigidezza per i gradi di libertà considerati;

$\mathbf{K}_g^{v,\varphi_z}$, $\mathbf{K}_g^{\theta,\Psi}$ e $\mathbf{K}_g^{v,\varphi_z,\theta,\Psi}$ sono le sottomatrici geometriche che presentano le seguenti componenti:

$$k_{g,ij}^{v,\varphi_z} = 0 \quad \text{Eq. 1.134}$$

$$k_{g,ij}^{\theta,\Psi} = \bar{r} d_r \int_{A_s} f_\theta f_\theta dA_s + q d_q \int_L f_\theta f_\theta dx \quad \text{Eq. 1.135}$$

$$\begin{aligned} k_{g,ij}^{v,\varphi_z,\theta,\Psi} &= \frac{1}{2} (M_{y1} - M_{y2}) \int_L f_v'' f_\theta dx + \frac{1}{2} V_{z1} \int_L f_v'' f_\theta x dx + \frac{1}{2} V_{z2} \int_L f_v'' f_\theta (L-x) dx \\ &+ \frac{1}{4} \bar{r} \int_L [f_v'' f_\theta (x^2 + (L-x)^2)] dx + \frac{1}{4} q \int_L [f_v'' f_\theta (x^2 + (L-x)^2)] dx \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.136}$$

dove $\bar{r} = \int_{-b/2}^{+b/2} r(x,y) dy$ è considerata costante all'interno del singolo elemento finito; d_r e d_q sono rispettivamente la distanza dei punti di applicazione di r e q dal centro di taglio.

La sottomatrice $k_{g,ij}^{v,\varphi_z,\theta,\Psi}$ contiene i contributi dei lavori al secondo ordine relativi alle sollecitazioni nodali e alle reazioni del suolo, mentre la sottomatrice $k_{g,ij}^{\theta,\Psi}$ contiene le distanze d_r e d_q del punto di applicazione della reazione verticale e del carico distribuito dal centro di taglio. Tali distanze sono responsabili dell'effetto stabilizzante o instabilizzante che possono indurre le reazioni ed il carico distribuito a seconda del verso che presentano. La discussione di questi effetti è riportata nel paragrafo 3.3.

I momenti critici di lateral buckling sono adimensionalizzati attraverso l'espressione di $M_{cr,E}$ riportata nell'Eq. 1.137 relativa ad una trave semplicemente appoggiata agli estremi.

$$M_{cr,E} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_b J_z}{L^2} \left(G_b J_t + \frac{\pi^2 E_b J_\omega}{L^2} \right)} \quad \text{Eq. 1.137}$$

I momenti critici di lateral buckling derivanti da un carico uniformemente distribuito sono adimensionalizzati attraverso l'Eq. 1.138 relativa ad una trave semplicemente appoggiata agli estremi. Tale espressione si ottiene modificando l'Eq. 1.137 utilizzando i risultati ottenuti da Clark e Hill (1960).

$$M_{cr,q} = \psi_1 \frac{\pi}{L} \sqrt{E_b J_y G_b J_t} \left[\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{k^2} (\psi_2^2 + 1)} \pm \psi_2 \frac{\pi}{k} \right] \quad \text{Eq. 1.138}$$

Dove: E_b G_b sono il modulo di Young e di taglio rispettivamente; J_z è il momento di inerzia; L è la lunghezza della trave; A è l'area della sezione trasversale; J_ω è la costante di ingobbamento; J_0 è il momento di inerzia polare; J_T è il momento di inerzia torsionale; ψ_1 dipende dalla distribuzione del carico; ψ_2 funzione della posizione del carico ($\psi_2 = 0$ indica un carico baricentrico, $\psi_2 = 1$ indica un carico applicato sull'ala inferiore, $\psi_2 = -1$ indica un carico applicato sull'ala superiore); $k = L \sqrt{G_b J_t / E_b J_\omega}$.

2 ANALISI STATICA DI TRAVI SU SEMISPAZIO ELASTICO

Nel seguito, per la determinazione degli spostamenti superficiali e delle pressioni di contatto generate da diversi carichi o spostamenti imposti, si utilizza il “Galerkin Boundary Element Method” (GBEM). Inoltre, è considerata una formulazione mista “Finite Element-Boundary Integral Equation” (FE-BIE) che fa uso di una formulazione numerica standard della trave basata su spostamenti, accoppiati con equazioni integrali per descrivere il semispazio adottando un’opportuna funzione di Green. Le variabili indipendenti del problema risultano gli spostamenti e le tensioni all’interfaccia tra trave e sottosuolo. L’implementazione del modello ha previsto l’utilizzo di funzioni di forma Hermitiane per la trave di fondazione e costanti per il suolo. Nel seguito viene utilizzato il parametro αL per caratterizzare la rigidità reciproca tra fondazione e suolo. Tale parametro introdotto per la trave su semipiano, viene modificato per descrivere il problema tenendo conto del rapporto tra la lunghezza e la larghezza della sezione trasversale della trave. Sono presentate analisi statiche lineari su suolo elastico ed isotropo con comportamento bilineare. Le tensioni presenti nella superficie di contatto possono risultare di compressione (segno +) o di trazione (segno -). Sono considerati casi di carico semplici ed in particolare: trave soggetta carico verticale concentrato e distribuito, trave soggetta a coppia flettente in mezzzeria e trave soggetta a coppia torcente applicata agli estremi ed al centro della trave. Sono riportati confronti tra il modello FE-BIE ed il modello FEM3D. Nel modello FEM3D vengono utilizzati 16 elementi *beam* per modellare la trave di fondazione (Fig. 2.1, b) e 320000 elementi *brick* per modellare il semispazio elastico (Fig. 2.1, a), la connessione tra trave e suolo è gestita attraverso l’inserimento di elementi *link*. Il modello ha dimensioni pari a 4 volte la lunghezza della fondazione nelle tre direzioni x, y e z . Tali dimensioni sono necessarie per estinguere, agli estremi del dominio, gli spostamenti nel sottosuolo. Per il confronto sono state scelte mesh uniformi per schematizzare l’interfaccia suolo-struttura nei due modelli.

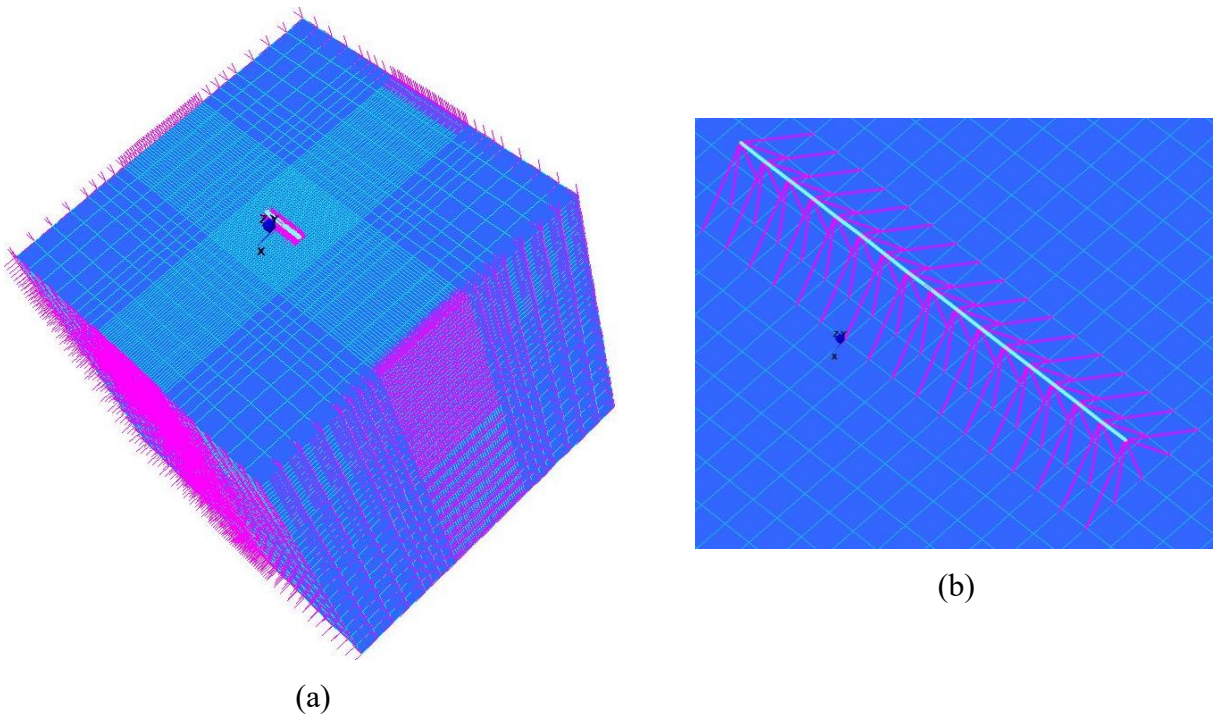


Fig. 2.1. Modello FEM 3D relativo alla singola trave (a); Modello trave beam con link di connessione (b).

2.1 Trave di fondazione soggetta a flessione

2.1.1 Trave di fondazione soggetta a carico verticale in mezzeria

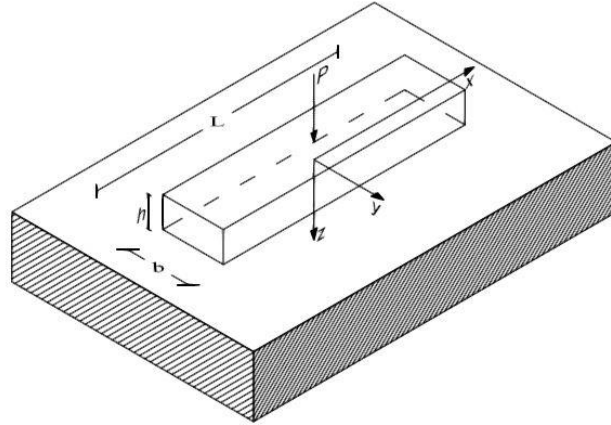


Fig. 2.2 Trave di fondazione soggetta a carico concentrato in mezzeria.

È stata considerata una trave caricata da una forza P concentrata in mezzeria (Fig. 2.2). La discretizzazione utilizzata per il modello FE-BIE prevede un numero di elementi lungo l'asse pari a $n_x=16$ ed un numero di elementi n_y nella direzione trasversale variabile. Sono stati considerati valori di $\alpha L=1$ ed $\alpha L=25$ e $L/b=4$. Nelle Fig. 2.3a,d sono riportati gli spostamenti verticali, si nota che il valore di v non è influenzato dalla suddivisione trasversale. Nelle Fig. 2.3b,e sono riportate le reazioni verticali in $y=0$ e si nota che sono poco influenzate dal valore di n_y . Naturalmente le reazioni calcolate in prossimità del bordo $y=b/2$ risentono notevolmente della discretizzazione trasversale (Fig. 2.3). Le differenze relative, in termini di spostamento verticale e tensioni, tra il modello FE-BIE ($n_y=16$) e FEM 3D sono riportate nella Tab. 2-1.

	$\alpha L=1$	$\alpha L=25$
$w(0)$	-12.1%	-0.3%
$r(0,0)$	-14.5%	12.4%

Tab. 2-1. Carico verticale concentrato. Errore relativo tra modello FE-BIE e FEM 3D in termini di spostamento e reazioni in $x=0$ $(X_{FEM3D}-X_{FE-BIE})/(X_{FE-BIE}) \times 100$.

La rigidità alla traslazione verticale in corrispondenza della mezzeria vale $k_v=0.624 E_s L/(1-\nu_s^2)$ per $\alpha L=1$ e $k_v=0.196 E_s L/(1-\nu_s^2)$ per $\alpha L=25$. Per una fondazione rigida con rapporto $L/b=4$ si ha un valore di rigidità pari a $k_v=0.634 E_s L/(1-\nu_s^2)$.

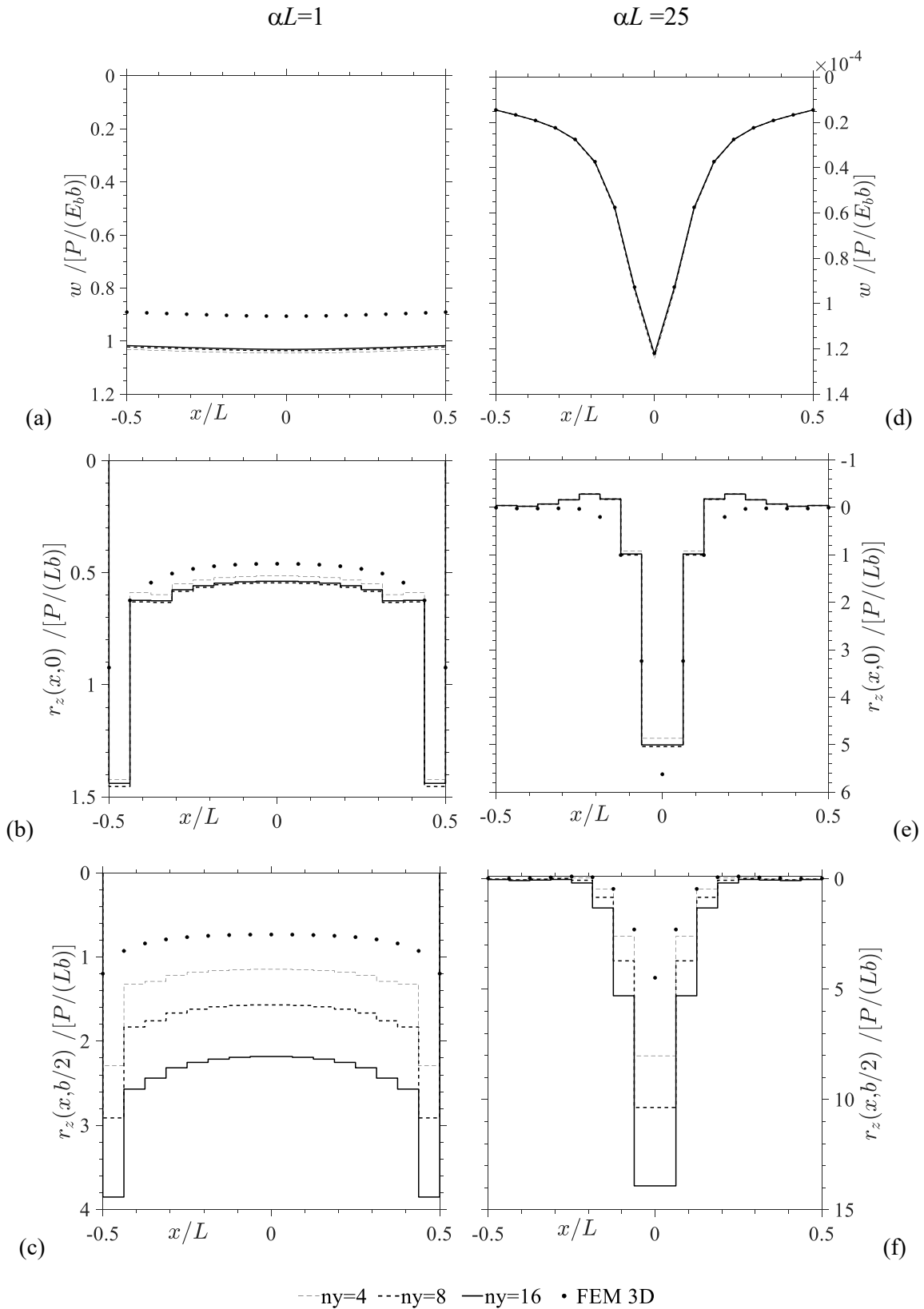


Fig. 2.3. Trave di fondazione soggetta a carico concentrato in mezzeria. Spostamento verticale (a,d), reazioni verticali in $y=0$ (b,e), reazioni verticali in $y=b/2$ (c,f). $\alpha L=1$ (a,b,c), $\alpha L=25$ (d,e,f).

2.1.2 Trave di fondazione soggetta a carico distribuito

Un'altra configurazione di carico tipica nell'interazione suolo-struttura è quella di carico q uniformemente distribuito. Nelle Fig. 2.4 sono riportati gli spostamenti verticali ed il momento flettente al variare della discretizzazione trasversale n_y . Sono stati considerati due casi: $\alpha L=1$ ed $\alpha L=10$ con $L/b=6$. Si nota che sia gli spostamenti verticali che il momento flettente sono poco influenzati dalla discretizzazione trasversale n_y , infatti nelle Fig. 2.4b,d le funzioni momento sono praticamente coincidenti. Lo spostamento ottenuto con $\alpha L=1$ è molto simile a quello ottenuto con $\alpha L=10$, mentre il momento flettente all'aumentare della rigidità del terreno assume una forma particolare caratterizzata da picchi in prossimità di $L/4$. La rigidità alla traslazione verticale in corrispondenza della mezzeria vale $k_v=0.509 E_s L/(1-\nu_s^2)$ per $\alpha L=1$ e $k_v=0.456 E_s L/(1-\nu_s^2)$ per $\alpha L=10$.

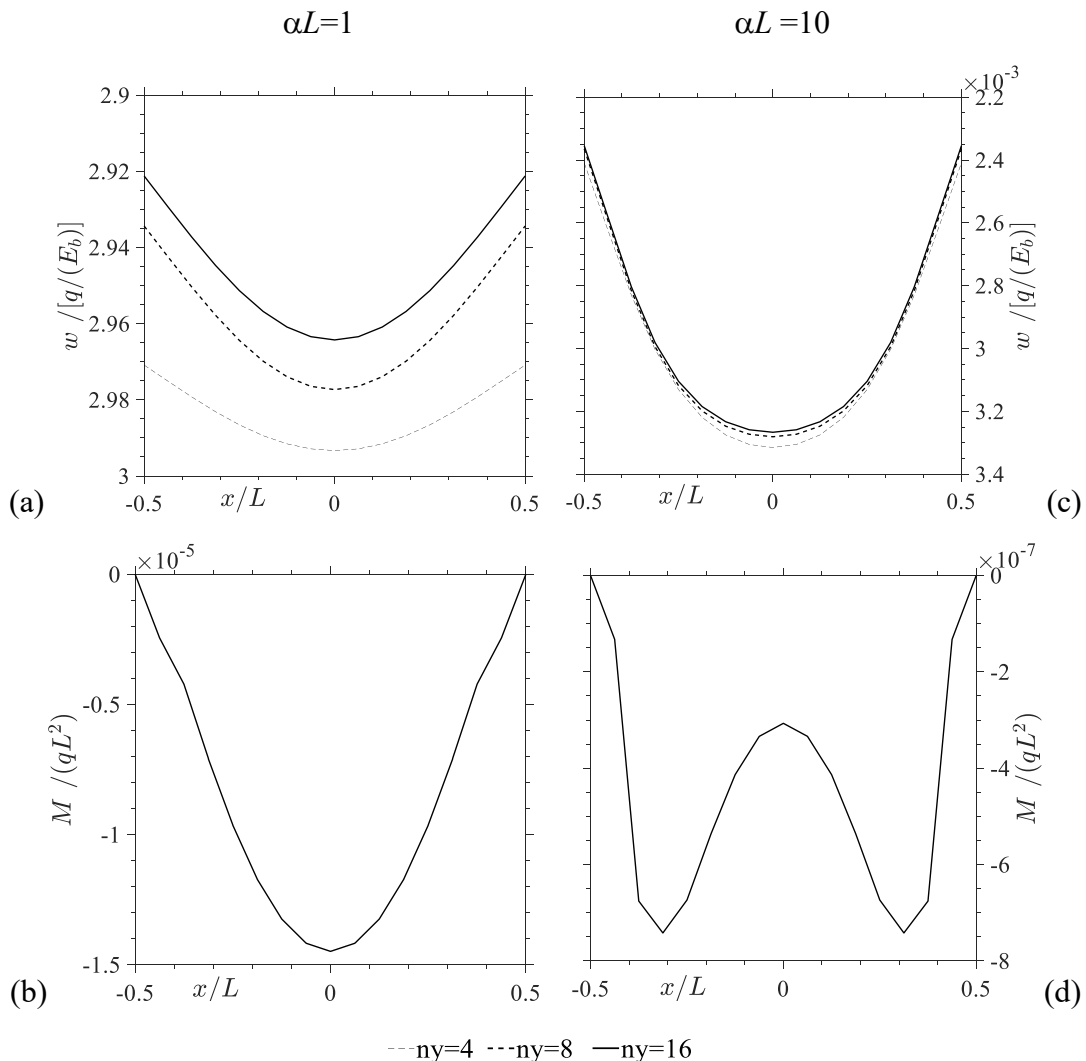


Fig. 2.4. Trave di fondazione soggetta a carico uniformemente distribuito. Spostamento verticale (a, c), momento flettente (b, d). $\alpha L=1$ (a, b), $\alpha L=10$ (c, d).

2.1.3 Trave di fondazione soggetta a coppia flettente in mezzeria

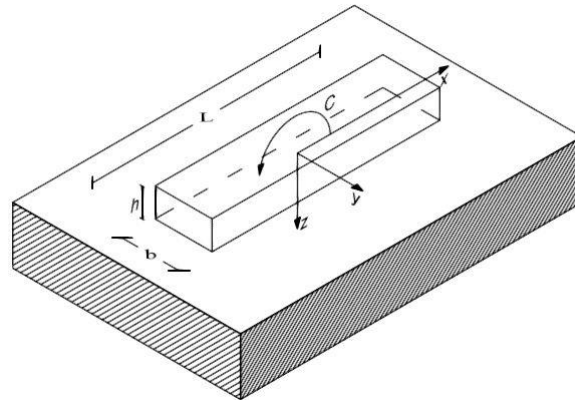


Fig. 2.5. Trave di fondazione soggetta a coppia concentrata in mezzeria.

Nel seguito viene mostrato il caso di coppia flettente concentrata in mezzeria. Viene effettuato il confronto tra modelli FE-BIE e modello FEM3D utilizzando una discretizzazione $n_x=16$ lungo l'asse della trave e $n_y=4$ nella direzione trasversale e scegliendo i parametri del terreno $\alpha L=5$ ed $\alpha L=10$ e $L/b=4$. Nelle Fig. 2.6 sono riportati i grafici relativi allo spostamento verticale (a, d), alle reazioni verticali (b, e) ed al momento flettente (c, f). Dal confronto tra i due modelli si registra un andamento simile delle funzioni sopra citate. La rigidezza alla rotazione in corrispondenza della mezzeria vale $k_\phi=0.103 E_s L^2/(1-\nu_s^2)$ per $\alpha L=5$ e $k_\phi=0.024 E_s L^2/(1-\nu_s^2)$ per $\alpha L=10$. Per una fondazione rigida con rapporto $L/b=4$ si ha un valore di rigidezza pari a $k_\phi=0.115 E_s L^2/(1-\nu_s^2)$.

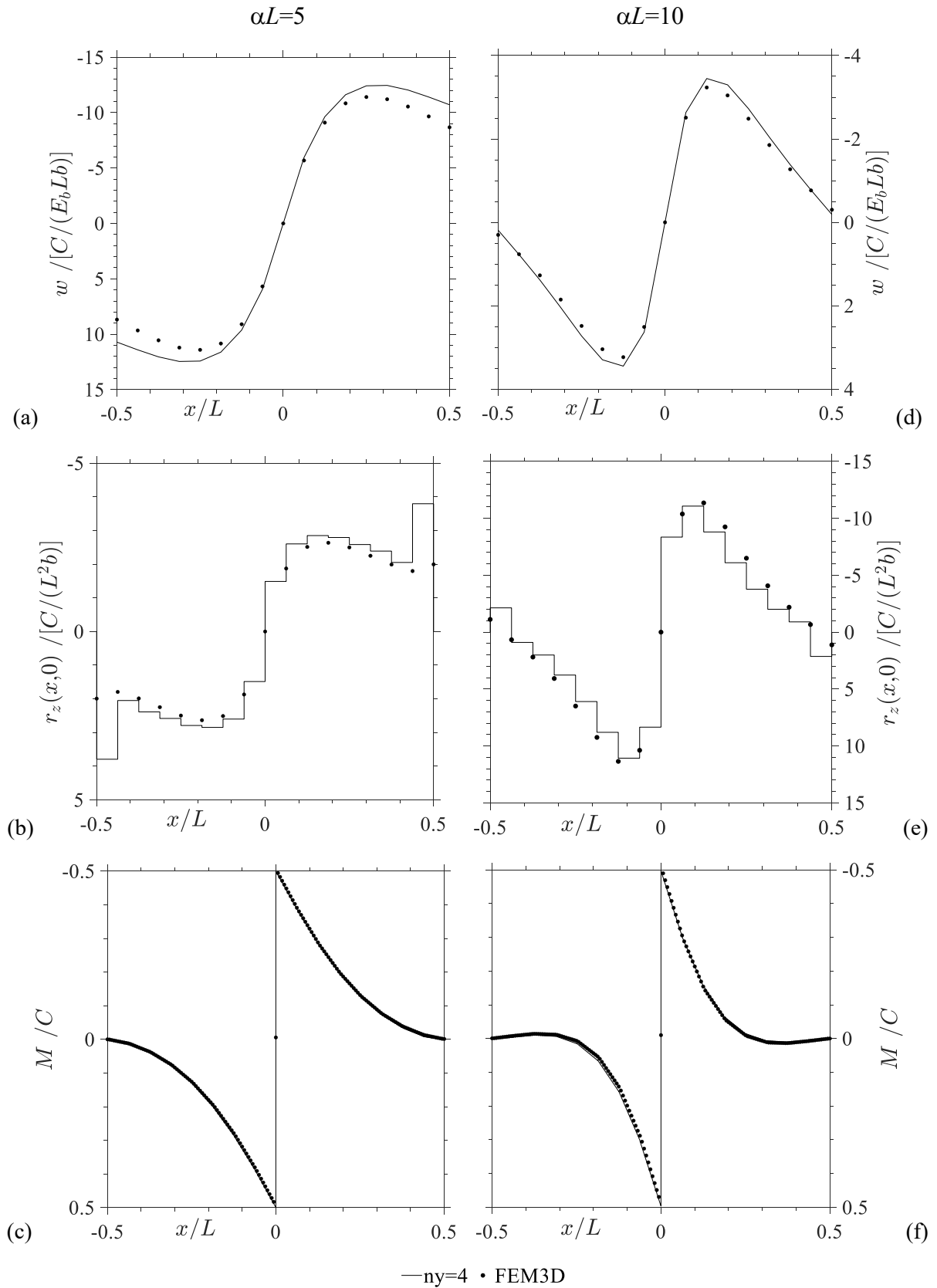


Fig. 2.6. Trave di fondazione soggetta a coppia concentrata in mezziera. Spostamento verticale (a, d), reazioni verticali in $y=0$ (b, e), momento flettente (c, f). $\alpha L=5$ (a, b, c), $\alpha L=10$ (d, e, f).

2.2 Trave di fondazione soggetta a torsione

2.2.1 Trave rettangolare di fondazione soggetta a coppia torcente in mezzeria

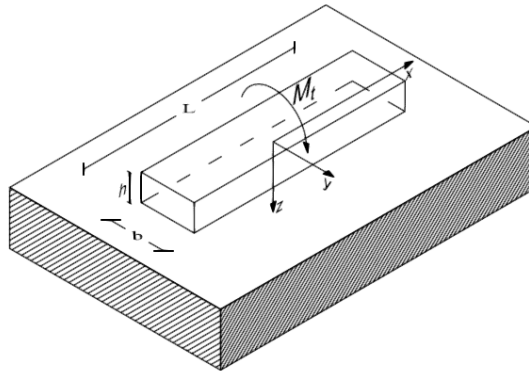


Fig. 2.7. Trave di fondazione soggetta a coppia torcente in mezzeria.

Considerando l'ipotesi di trave trasversalmente rigida sono di seguito riportati alcuni esempi di travi soggette a momento torcente M_t concentrato in mezzeria. Sono presentati confronti tra FE-BIE e FEM3D, al variare sia del numero di elementi trasversali n_y che del valore di αL . La trave analizzata presenta una sezione rettangolare con le seguenti caratteristiche $b=1\text{m}$, $h=0.8\text{m}$, $L=4\text{m}$ ed $E_b=30000\text{MPa}$. Per il modello FE-BIE sono proposti diversi valori di suddivisioni trasversali pari a 2,4,8, mentre per la discretizzazione lungo l'asse è assunto $n_x=16$. Per il modello FEM3D sono considerati valori $n_y=4$ ed $n_x=16$. Per effettuare il confronto sono state realizzate mesh uniformi. Nelle Fig. 2.8-Fig. 2.9 (a, d) sono riportate le rotazioni torsionali, queste risultano essere quasi costanti nel caso di terreno deformabile ($\alpha L=0.5$ e $\alpha L=1$) e presentano un picco in prossimità dell'applicazione della coppia con terreno più rigido ($\alpha L=5$ e $\alpha L=10$). Le Fig. 2.8-Fig. 2.9 (b, e) mostrano le reazioni verticali del suolo, si può notare che, con valori di αL piccoli, la trave riesce a mobilitare una notevole porzione di suolo andando a distribuire in modo quasi uniforme le reazioni sull'intera lunghezza, cosa che non è in grado di fare con valori di αL grandi. Le Fig. 2.8-Fig. 2.9 (c, f) riportano l'andamento del momento torcente, si nota che il valore in prossimità dell'applicazione della coppia non raggiunge il valore di $T/M_t=\pm 0.5$, questo è dovuto alla scelta di n_x non troppo elevato. Infatti, in questo modo si legge un valore di tensioni mediato che porta ad un andamento del momento torcente "mediato". Vista la capacità, da parte del sistema con αL piccoli, di mobilitare maggiore suolo e di distribuire le tensioni sull'intera lunghezza L , si nota un minore errore sul momento torcente rispetto al sistema con αL elevati. L'errore relativo tra FE-BIE($n_y=8$) e FEM 3D in termini di rotazione torsionale vale il 73% per $\alpha L=0.5$, il 72% per $\alpha L=1$, il 49% per $\alpha L=5$ e il 26% per $\alpha L=10$.

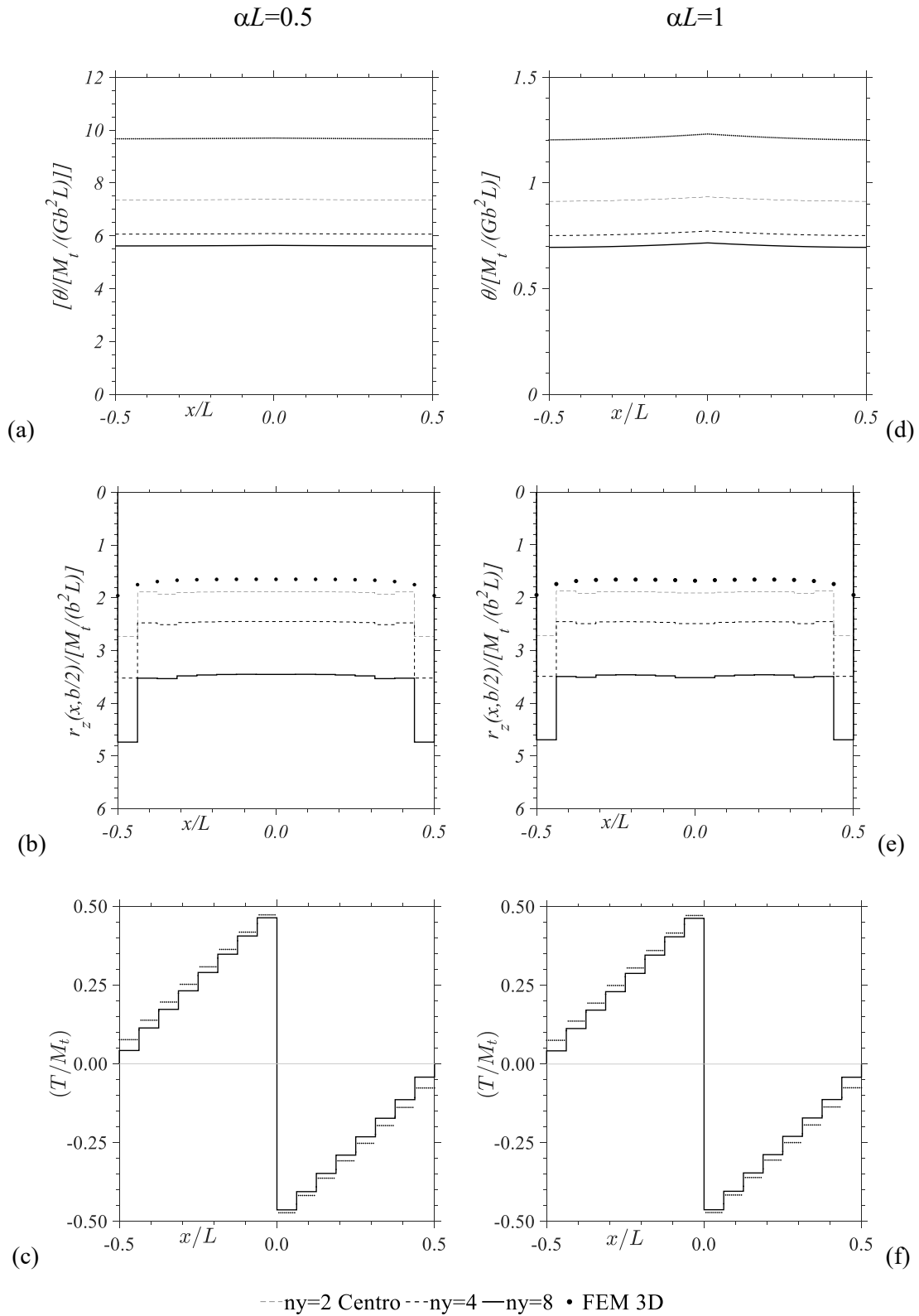


Fig. 2.8. Trave di fondazione soggetta a coppia torcente in mezzeria. Rotazione torsionale (a, d), reazioni verticali in $y=b/2$ (b, e), momento torcente(c, f). $\alpha L=0.5$ (a, b, c), $\alpha L=1$ (d, e, f).

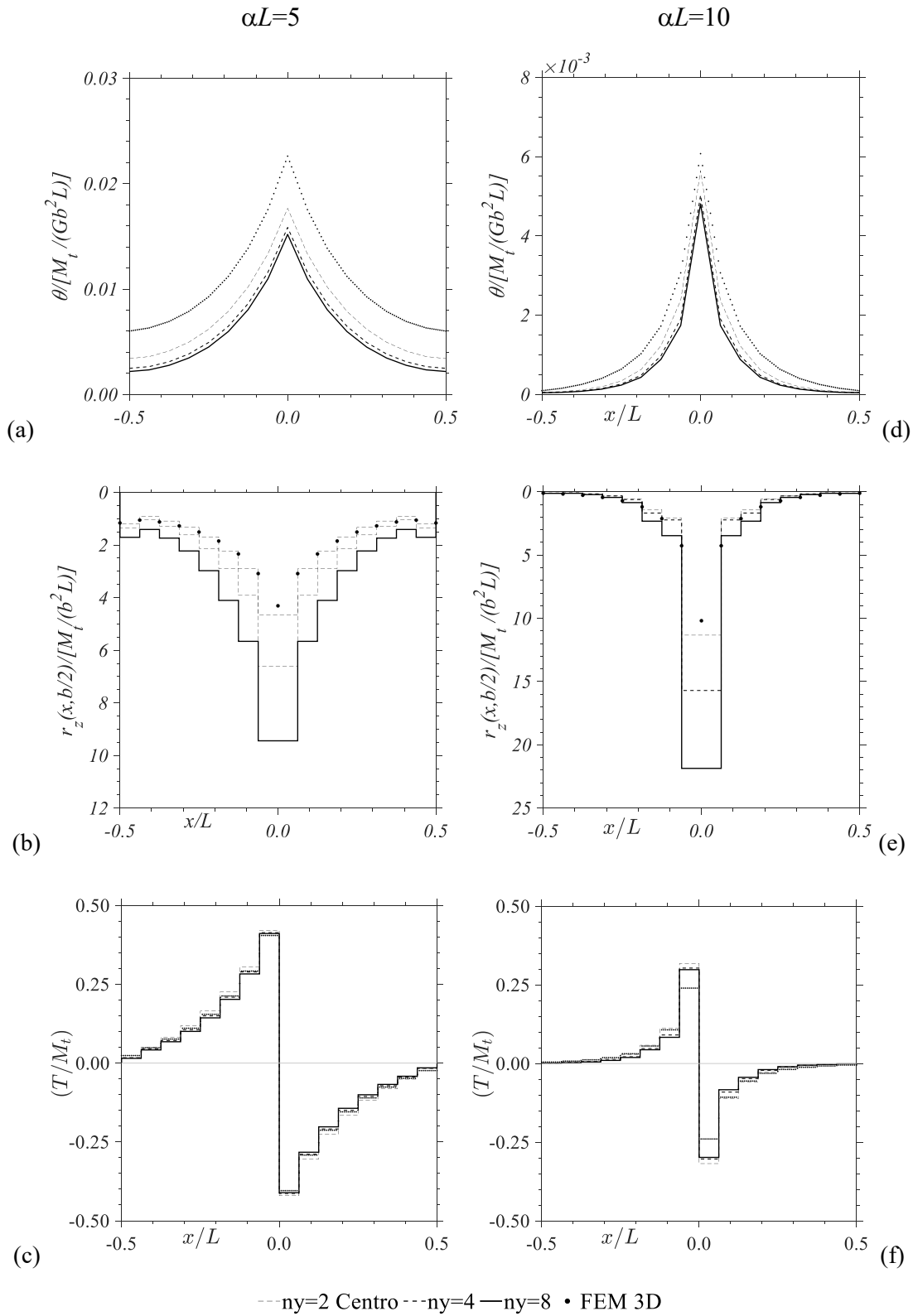


Fig. 2.9. Trave di fondazione soggetta a coppia torcente in mezzeria. Rotazione torsionale (a, d), reazioni verticali in $y=b/2$ (b, e), momento torcente(c, f). $\alpha L=5$ (a, b, c), $\alpha L=10$ (d, e, f).

La rigidezza alla rotazione torsionale in corrispondenza della mezzeria vale per $\alpha L=1$ e per $\alpha L=10$ rispettivamente $k_{\theta}=(3.77E-03)E_sL^2/(1-\nu_s^2)$ e $k_{\theta}=(3.77E-06)E_sL^2/(1-\nu_s^2)$. Per una migliore lettura dei risultati, si riporta di seguito una rappresentazione tridimensionale delle reazioni e degli spostamenti della trave di fondazione. È stato considerato il caso con $\alpha L=1$ Fig. 2.10(a, b) ed $\alpha L=10$ Fig. 2.10(c, d), con $n_x=512$ $n_y=4$.

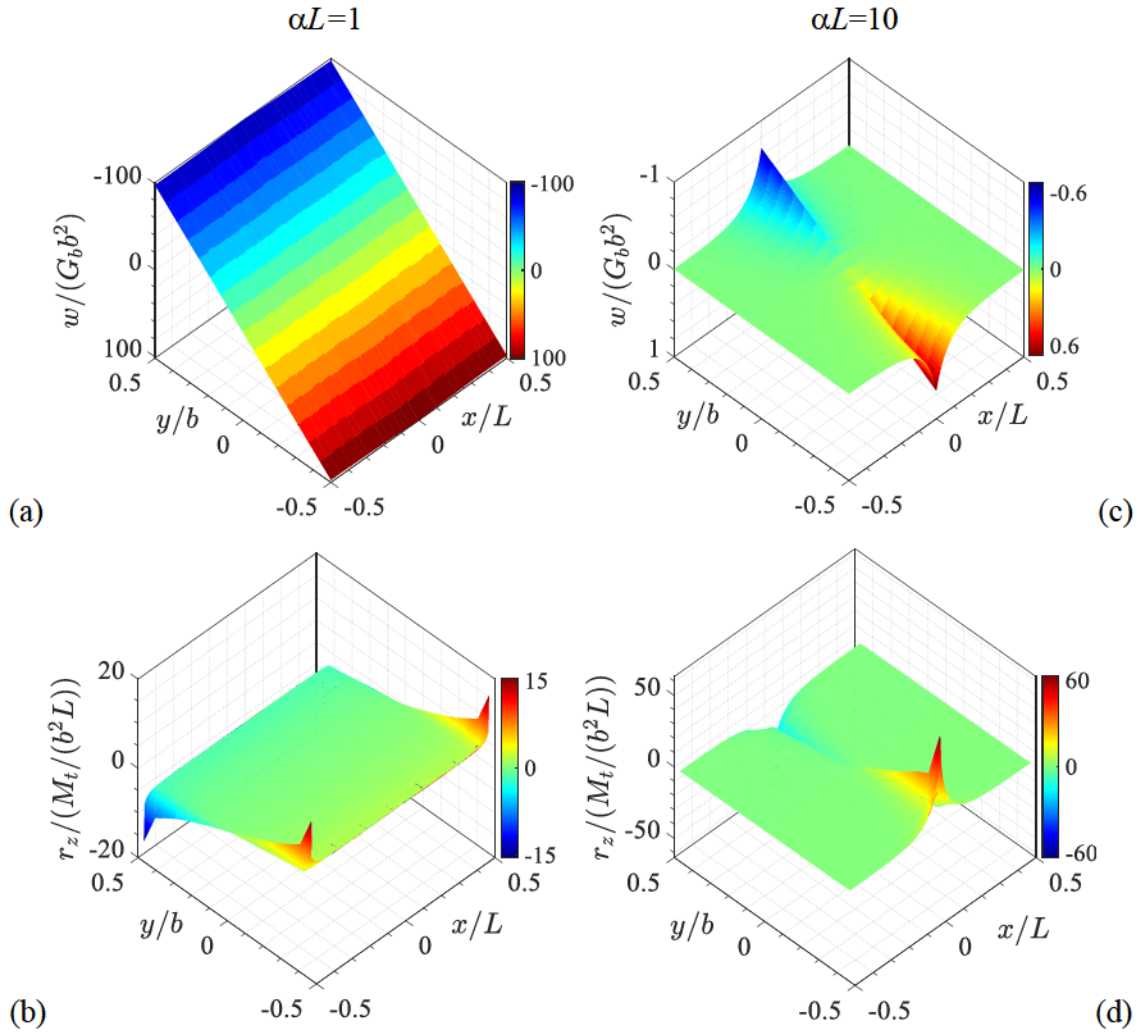


Fig. 2.10. Trave di fondazione soggetta a coppia torcente in mezzeria. Deformata tridimensionale (a, c), reazioni verticali (b, d). $\alpha L=1$ (a, b), $\alpha L=10$ (c, d).

Dopo il confronto tra i due modelli a parità di discretizzazione, per caratterizzare al meglio l'andamento del momento e delle reazioni sono stati realizzati, per $\alpha L=5$, grafici in funzione del numero di discretizzazione lungo l'asse n_x considerando i seguenti valori: $2^4, 2^7, 2^{12}$.

Nella Fig. 2.11a,b sono riportati rispettivamente gli andamenti delle reazioni verticali in $y=b/2$ e del momento torcente al variare di n_x . Si nota che le tensioni sugli estremi della trave ($x=\pm L/2$) tendono all'infinito, come visto nei paragrafi precedenti. Analogamente, anche le tensioni registrate in $x=0$ tendono all'infinito come mostrato nella Fig. 2.11c.

Si nota, inoltre, che all'aumentare di n_x (o equivalentemente al diminuire della lunghezza dell'elemento di superficie ottenibile anche con una mesh graduale) il valore della tensione in $x=0$ tende al valore asintotico mentre il valore del momento torcente, nella stessa posizione, tende a $T/M_t = \pm 0.5$.

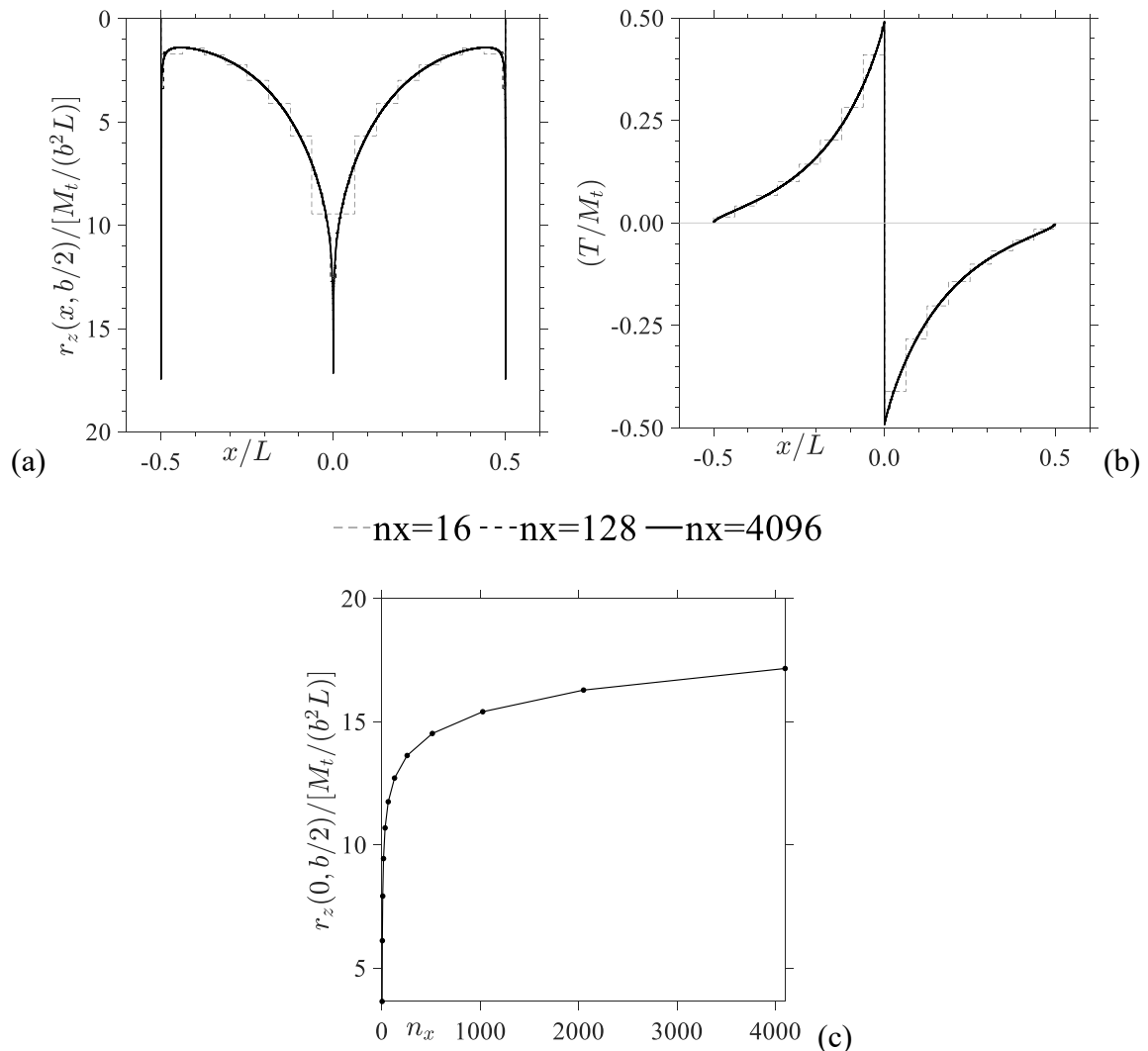


Fig. 2.11. Reazioni verticali del semi spazio e momento torcente($\alpha L=5$). Andamento delle reazioni lungo l'asse della trave al variare di n_x , (a), andamento del momento torcente (b), andamento delle reazioni verticali nel punto di applicazione del momento torcente al variare di n_x (c)

Nelle Fig. 2.12 sono presentati i risultati ottenuti per valori di αL variabile tra 1, 5 e 10 e con $n_x=256$, $n_y=4$ e $\beta=1$. All'aumentare del parametro αL del sistema trave-fondazione, le pressioni sul suolo si concentrano sempre più nel punto di applicazione della coppia, mentre cresce più lentamente il contributo del bordo della fondazione. Nella Fig. 2.12b si fa notare la tendenza del momento torcente, all'aumentare della rigidezza del suolo, a concentrarsi in prossimità di $x=0$ (punto di applicazione di M_t). Questo comportamento evidenzia il fatto che per elevati valori di αL la porzione di trave interessata dal carico è sempre più piccola.

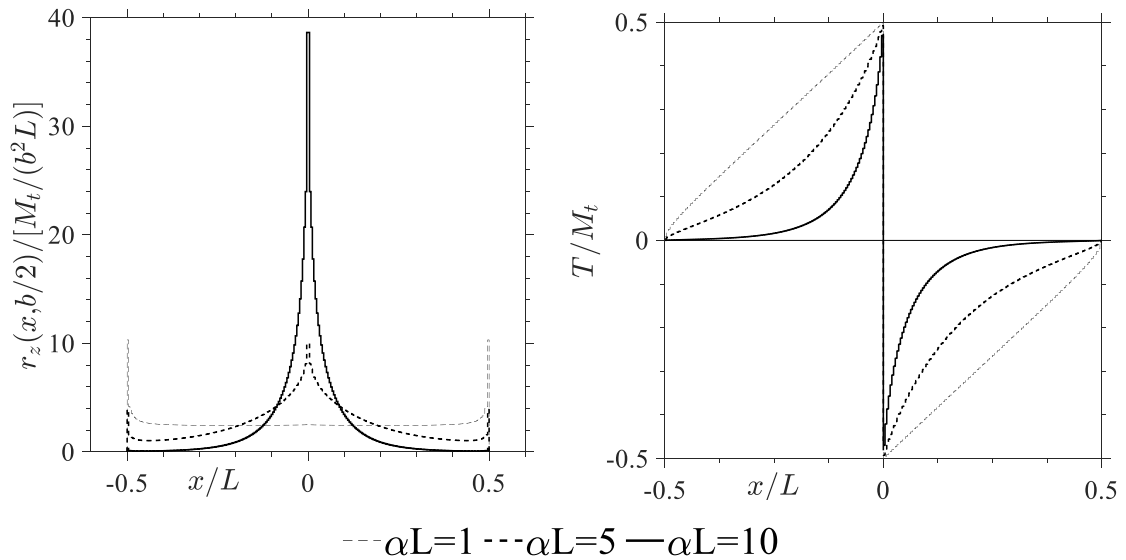


Fig. 2.12. Reazioni verticali del semi spazio e momento torcente. Andamento delle reazioni lungo l'asse della trave al variare di αL . (a), andamento del momento torcente al variare di αL (b)

2.2.2 Trave rettangolare di fondazione soggetta agli estremi a coppie torcenti antisimmetriche

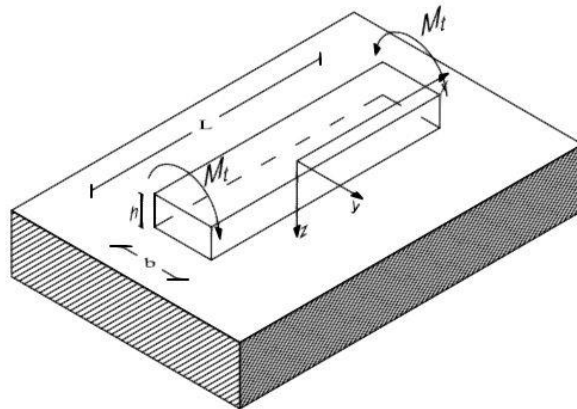


Fig. 2.13. Trave di fondazione soggetta agli estremi a coppie torcenti antisimmetriche.

La trave analizzata presenta una sezione rettangolare con le seguenti caratteristiche $b=1\text{m}$, $h=0.8\text{m}$, $L=4\text{m}$ ed $E_b=30000\text{MPa}$. Considerando l'ipotesi di trave trasversalmente rigida sono di seguito riportati alcuni esempi di travi soggette a momenti torcenti M_t , di segno opposto, concentrati agli estremi dell'elemento di fondazione (Fig. 2.13). Sono presentati confronti tra FE-BIE e FEM3D con le stesse caratteristiche del paragrafo precedente. Nelle Fig. 2.14-Fig. 2.15(a, d) sono riportate le rotazioni torsionali, queste risultano essere quasi lineari nel caso di terreno deformabile ($\alpha L=0.5$ e $\alpha L=1$) e presentano due picchi in prossimità dell'applicazione delle coppie con terreno più rigido ($\alpha L=5$ e $\alpha L=10$). Le tensioni verticali, riportate in Fig. 2.14-Fig. 2.15 (b, e), hanno andamento circa

lineare nel caso con αL piccoli e presentano una concentrazione di tensioni nel caso di αL elevati, con valori circa nulli nella zona centrale.

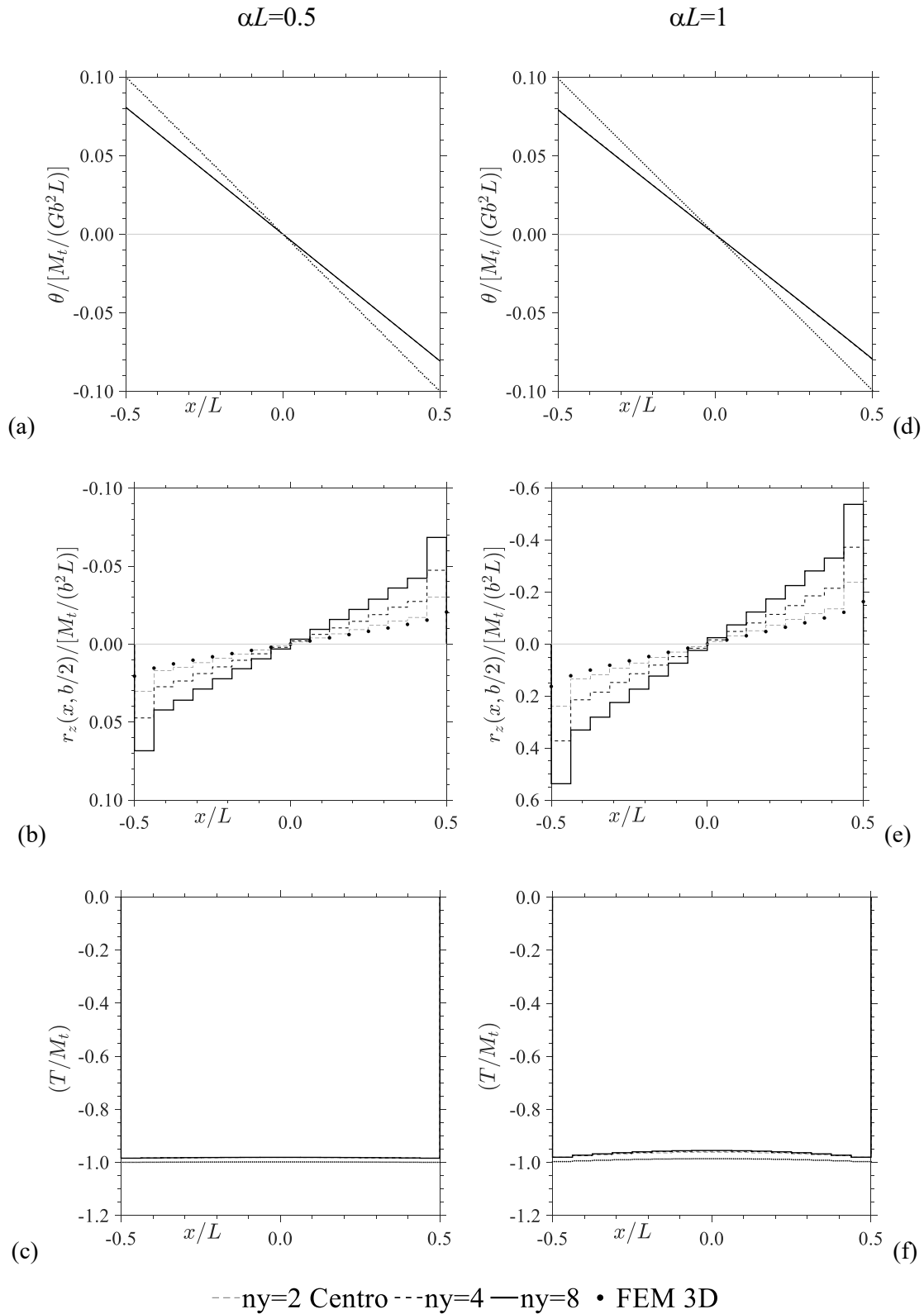


Fig. 2.14. Trave di fondazione soggetta a coppie torcenti agli estremi. Rotazione torsionale (a, d), reazioni verticali in $y=b/2$ (b, e), momento torcente(c, f). $\alpha L=0.5$ (a, b, c), $\alpha L=1$ (d, e, f).

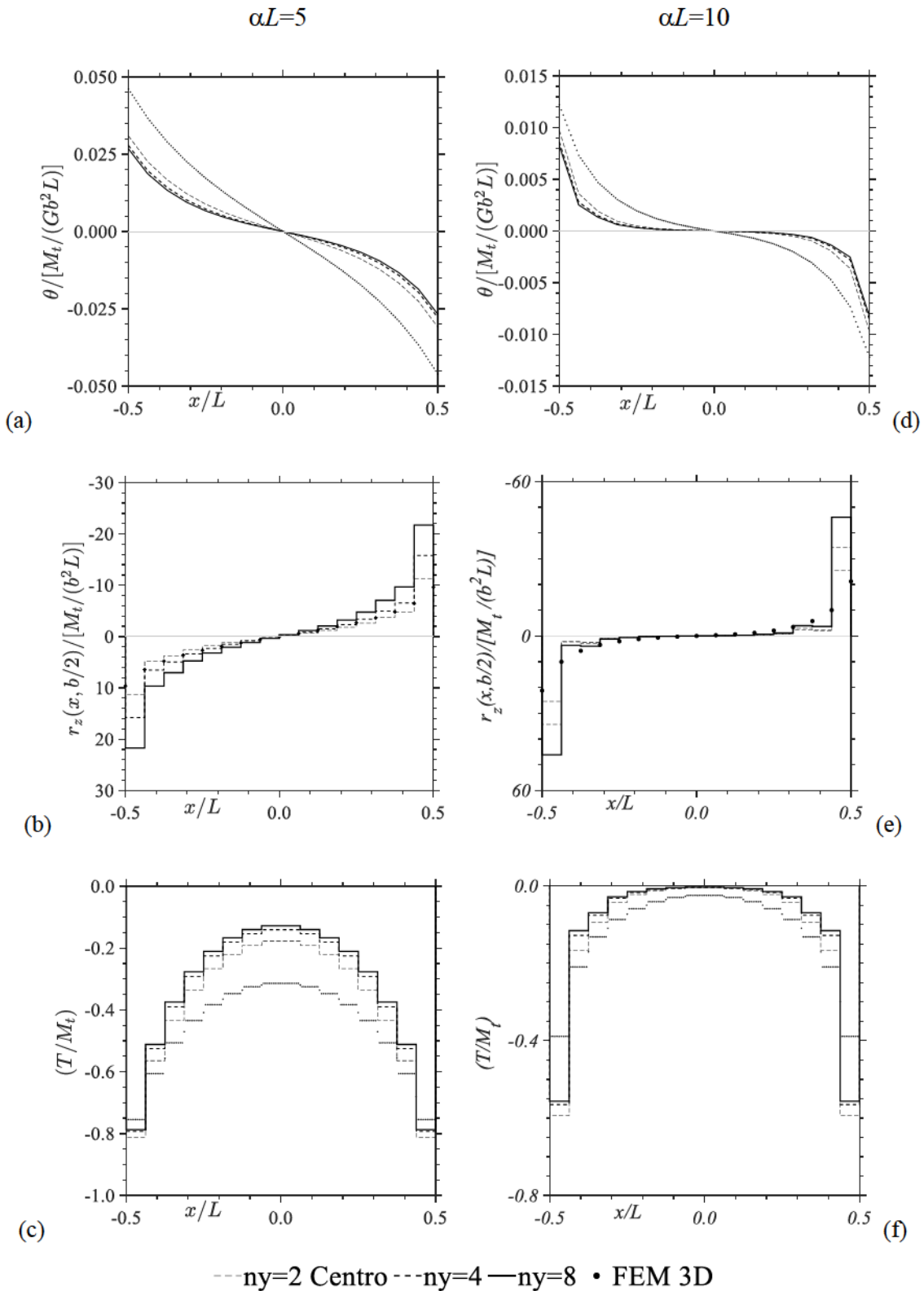


Fig. 2.15. Trave di fondazione soggetta a coppie torcenti agli estremi. Rotazione torsionale (a, d), reazioni verticali in $y=b/2$ (b, e), momento torcente (c, f). $\alpha L=5$ (a, b, c), $\alpha L=10$ (d, e, f).

Le Fig. 2.14 (c, f) riportano l'andamento del momento torcente nel caso con αL piccoli, si nota che il momento torcente in prossimità dell'applicazione delle coppie raggiunge circa il valore di

$T/M_T=-1$ (facendo registrare un piccolo errore), mentre le Fig. 2.15 (c, f) riportano l'andamento del momento torcente nel caso αL elevati, si nota che il valore in prossimità dell'applicazione delle coppie non raggiunge il valore di $T/M_T=-1$ (facendo registrare un errore notevole), questo è dovuto alla scelta di n_x non troppo elevato. Infatti, in questo modo si legge un valore di tensioni mediato che porta ad un andamento del momento torcente "mediato". Vista la capacità da parte del sistema con αL piccolo di mobilitare maggiore suolo e di distribuire le tensioni sull'intera lunghezza L , si nota un minore errore sul momento torcente rispetto al sistema con αL elevato che concentra le reazioni solo vicino ai punti di applicazione delle coppie torcenti.

Per una migliore lettura dei risultati, si riporta di seguito una rappresentazione tridimensionale delle reazioni e degli spostamenti della trave di fondazione. È stato considerato il caso con $\alpha L=1$ Fig. 2.16(a, b) ed $\alpha L=10$ Fig. 2.16 (c, d), con $n_x=512$ $n_y=4$.

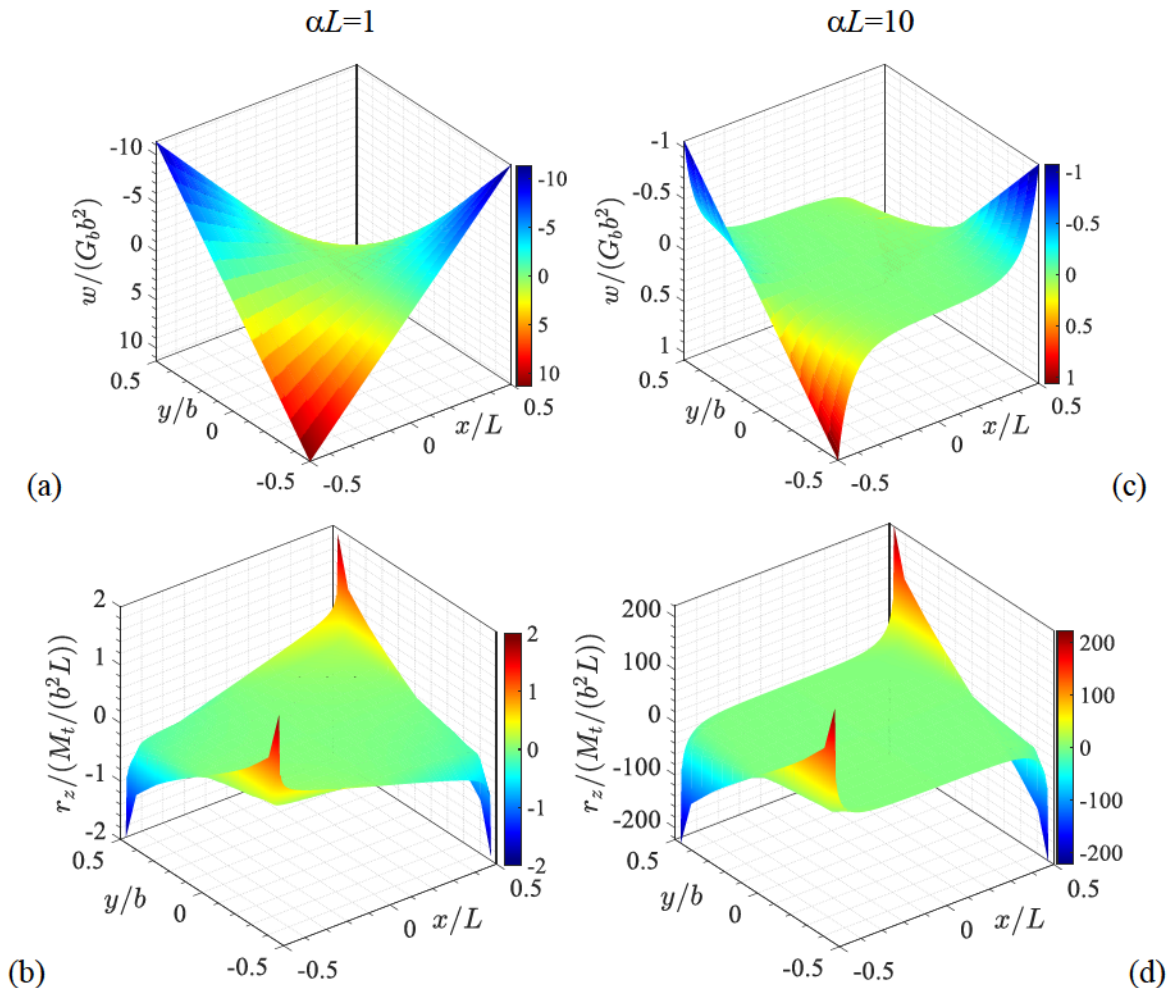


Fig. 2.16. Trave di fondazione soggetta a coppie torcenti agli estremi. Deformata tridimensionale (a, c), reazioni verticali (b, d). $\alpha L=1$ (a, b), $\alpha L=10$ (c, d).

Nelle Fig. 2.17 sono presentati i risultati ottenuti per valori di αL variabile tra 1,5 e 10 e con $n_x=256$, $n_y=4$ e $\beta=1$. All'aumentare del parametro αL del sistema trave-fondazione, le pressioni sul suolo si concentrano sempre più nei punti di applicazione delle coppie, mentre la rotazione torsionale passa da un andamento lineare ad un andamento uniforme con picchi agli estremi.

Nella Fig. 2.17c si fa notare che, all'aumentare della rigidezza del suolo, il momento torcente passa da un andamento quasi costante su tutta la trave ad un valore quasi nullo sulla trave eccetto che sui bordi, dove sono applicate le coppie. Questo comportamento evidenzia il fatto che per elevati valori di αL la porzione di trave interessata dal carico è sempre più piccola.

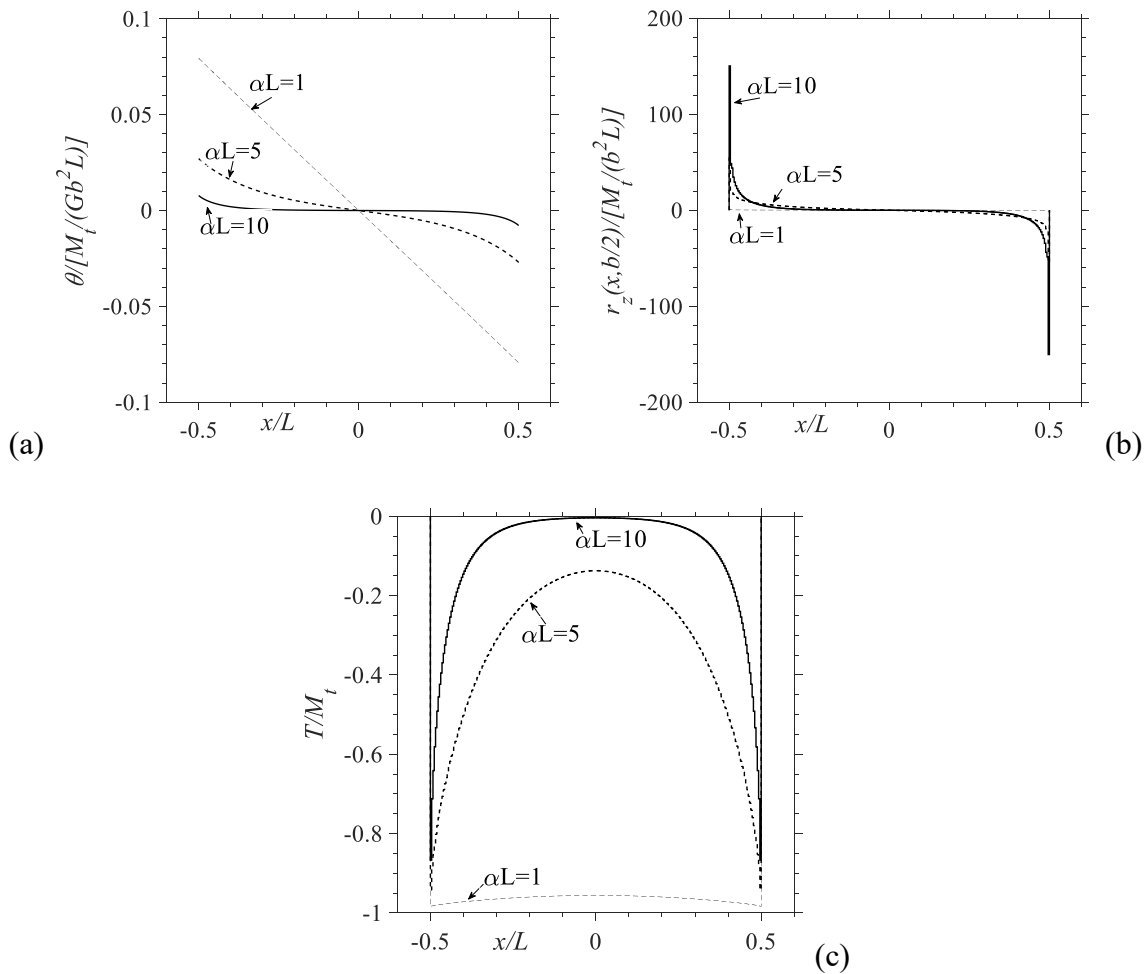


Fig. 2.17. Trave di fondazione soggetta a torsione agli estremi. Rotazione torsionale lungo l'asse della trave (a), andamento delle reazioni lungo l'asse della trave al variare di αL .(b), andamento del momento torcente (c).

2.2.3 Torsione su profili aperti in parete sottile

Nei paragrafi precedenti è stato analizzato il caso di torsione riferito a travi con sezione compatta, nelle quali è stato possibile trascurare l'ingobbamento e, quindi, è stato possibile ricondursi alla teoria di De Saint Venant. Come è noto, tale teoria è valida "ad una certa distanza" dai vincoli o dai punti di applicazione di carichi concentrati. Se la trave presenta una sezione compatta tale distanza è relativamente piccola e la soluzione di De Saint Venant può essere considerata adeguata ai fini pratici. Non è così per profili in parete sottile, che presentano spessori tipicamente inferiori di un ordine di grandezza rispetto alle dimensioni delle sezioni; le conseguenze dell'effettiva modalità di applicazione dei carichi o delle reazioni vincolari, sono allora sensibili a distanze significative ed è necessario un modello di trave adeguato per tenerne conto. Una teoria elastica per travi in parete sottile è nota come teoria delle aree settoriali (Vlasov 1961).

Considerando l'effetto dell'ingobbamento il momento torcente può scriversi come somma di due contributi:

$$T_{tot} = T_{t1} + T_{t2} \quad \text{Eq. 2.1}$$

$$T_{t1} = GJ_T \theta'(z) \quad \text{Eq. 2.2}$$

$$T_{t2} = -E_b J_\omega \theta'''(z) \quad \text{Eq. 2.3}$$

dove: T_{tot} è il momento torcente complessivo sulla sezione; T_{t1} è il momento torcente primario da torsione uniforme; T_{t2} è il momento torcente secondario e rappresenta il contributo degli effetti di vincolo; E_b G sono il modulo di Young e di taglio rispettivamente; J_ω è la costante di ingobbamento; J_T è il momento di inerzia torsionale; $\theta'(z)$ è la derivata prima della rotazione torsionale coincidente con il grado di libertà ingobbamento Ψ ; $\theta'''(z)$ è la derivata terza della rotazione torsionale. All'interno del paragrafo 1.5.2 sono riportate le equazioni risolutive per la torsione non uniforme su suolo.

2.2.3.1 Trave a doppio T soggetta a coppia torcente in mezzzeria con appoggi torsionali

Nel seguito viene presentato un primo esempio di trave soggetta a torsione non uniforme. La trave in esame è un HEB 300 in acciaio S235 ($E=210\text{GPa}$ e $\nu=0.3$), soggetta a momento torcente in mezzzeria e vincolata esternamente con due forcelle agli estremi che impediscono la rotazione torsionale ma consentono l'ingobbamento. Nelle Fig. 2.18, a, b, c, sono riportati i risultati relativi ad una trave con rapporto $L/b=10$, mentre nelle Fig. 2.18, d, e, f, sono riportati quelli relativi a $L/b=50$. Nelle Fig. 2.18, a, d, sono riportati gli andamenti delle rotazioni torsionali, nelle Fig. 2.18, b, e, sono riportati gli andamenti dell'ingobbamento, infine, nelle Fig. 2.18, c, f, sono riportati gli andamenti dei momenti torcenti: in nero il momento torcente totale, in rosso il momento torcente primario da torsione uniforme. Inoltre, sezione per sezione la differenza tra T_{tot} e T_{t1} indica il contributo della torsione non uniforme T_{t2} .

Il grafico relativo alla rotazione torsionale $\theta(z)$ nel caso di $L/b=10$ può essere approssimabile a un polinomio di grado elevato, conseguentemente $\theta'''(z)$ e quindi il contributo T_{t2} sarà diversa da 0 punto per punto. Con $L/b=50$ questo vale solo in prossimità del punto di applicazione della coppia torcente, mentre vicino agli estremi l'andamento è lineare. La linearità della rotazione torsionale porta ad avere la costanza dell'ingobbamento con conseguente annullamento della derivata terza e quindi del momento torcente secondario. Nella Fig. 2.18 f, infatti, si nota la presenza del momento secondario (differenza tra curva nera e curva rossa) solo in prossimità della coppia concentrata, mentre vicino agli estremi, avendo lasciato libero l'ingobbamento, il momento esterno è assorbito completamente dal momento primario.

I due esempi vogliono evidenziare come ad una certa distanza dalle perturbazioni tenda ad instaurarsi un regime di torsione uniforme, mentre in prossimità delle perturbazioni si ha, di fatto, solo torsione secondaria. È evidente, inoltre, che per rapporti L/b ordinari si ha su tutta la trave contemporanea presenza di T_{t1} e T_{t2} .

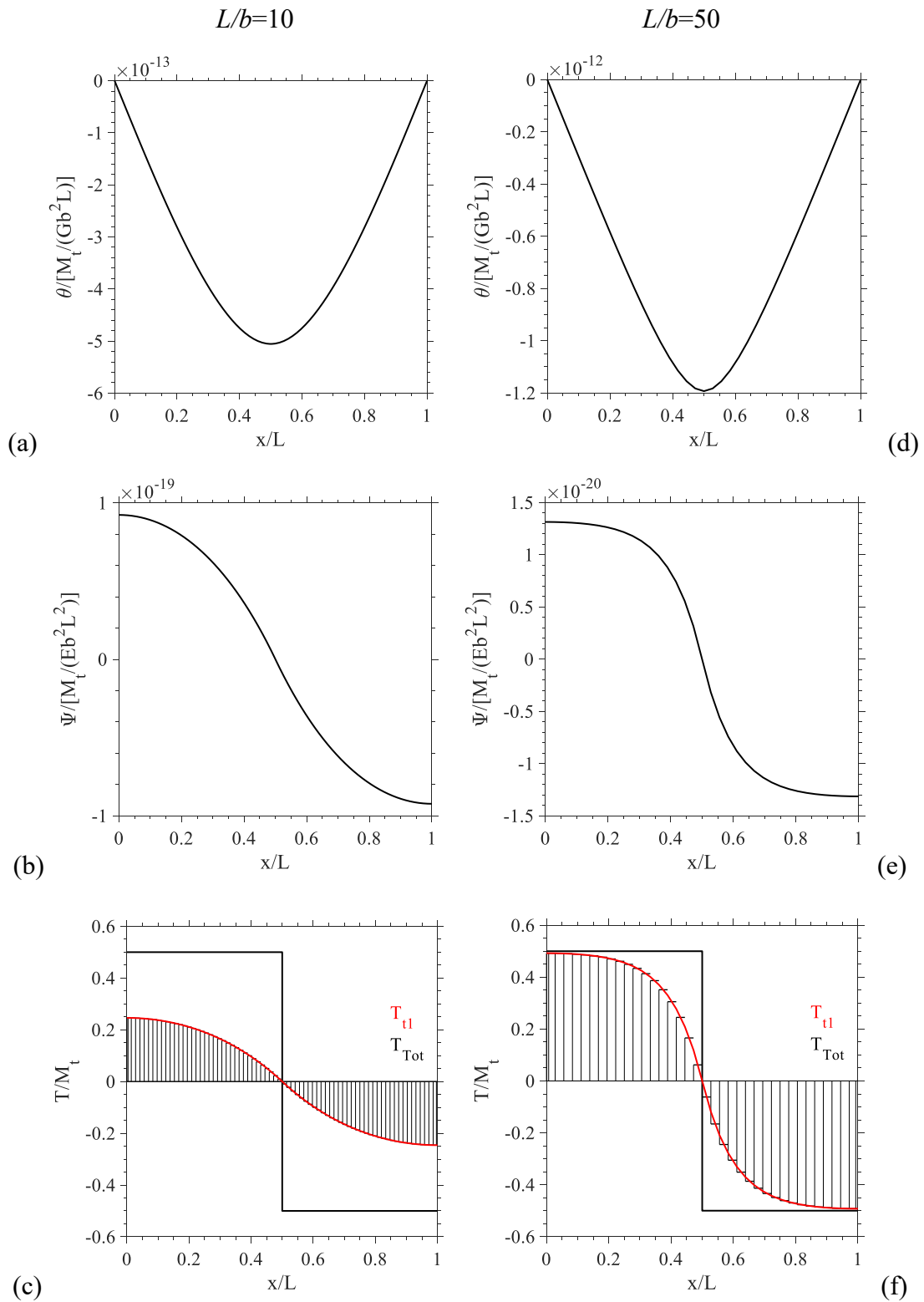


Fig. 2.18. Trave soggetta a momento torcente in mezzeria con appoggi torsionali agli estremi senza suolo. Trave con $L/b=10$ (a), (b), (c); trave con $L/b=50$ (d), (e), (f). Rotazione torsionale (a, d), ingobbamento (b, e), momento torcente (c, f): momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

2.2.3.2 Trave a doppio T soggetta a coppia torcente in mezzzeria con incastri torsionali

Nel seguito viene presentato un secondo esempio di trave soggetta a torsione non uniforme. La trave in esame è un HEB 300 in acciaio S235 ($E=210\text{GPa}$ e $\nu=0.3$), soggetta a momento torcente in mezzzeria e vincolata esternamente con incastri agli estremi che impediscono la rotazione torsionale e l'ingobbamento. Nelle Fig. 2.19, a, b, c sono riportati i risultati relativi ad una trave con rapporto $L/b=10$, mentre nelle Fig. 2.19, d, e, f sono riportati quelli relativi a $L/b=130$ (è un valore limite, utile solo ai fini teorici, tale da mettere in evidenza l'esistenza della sola torsione uniforme in alcune posizioni). Nelle Fig. 2.19, a, d sono riportati gli andamenti delle rotazioni torsionali, nelle Fig. 2.19, b, e sono riportati gli andamenti dell'ingobbamento, infine, nelle Fig. 2.19, c, f sono riportati gli andamenti dei momenti torcenti: in nero il momento torcente totale, in rosso il momento torcente primario da torsione uniforme. Inoltre, sezione per sezione la differenza tra T_{tot} e T_{t1} indica il contributo della torsione non uniforme T_{t2} .

Si può notare la contemporanea presenza di un effetto di vincolo (impedimento dell'ingobbamento) e di un effetto del carico concentrato sulla distribuzione di momento torcente. Avendo imposto come vincolo agli estremi l'ingobbamento nullo $\theta'(0) = \theta'(L) = 0$, il contributo del momento primario sarà nullo e tutto il momento totale sarà assorbito dal momento secondario. Per valori di $L/b=10$ il contributo massimo del momento primario si registra per $x/L=0.25$ e vale circa $T/M_t=0.09$, mentre per valori di $L/b=130$ il contributo massimo vale $T/M_t=0.50$ per un breve tratto, tratto nel quale si sono estinti gli effetti dei vincoli e delle concentrazioni di carico.

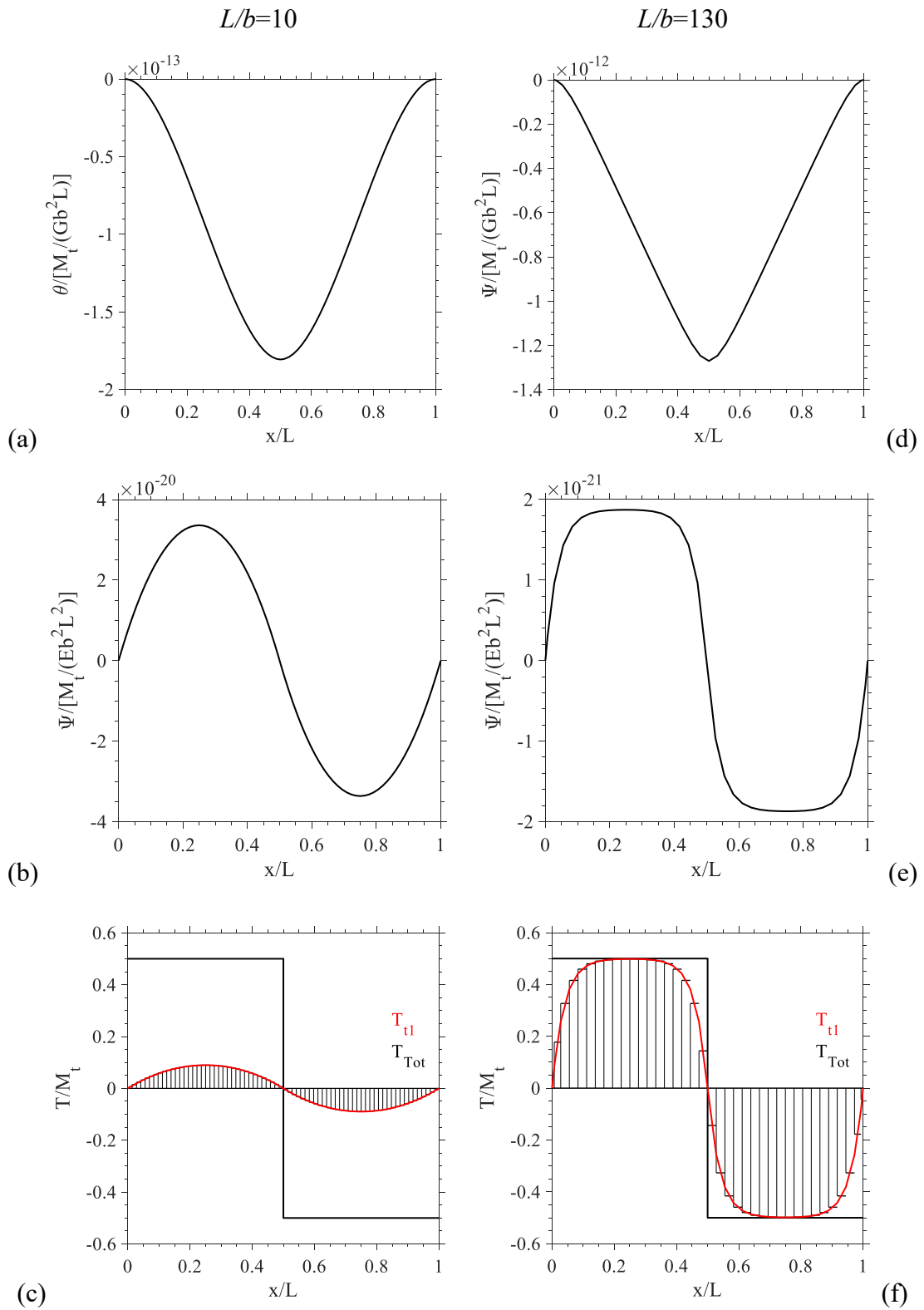


Fig. 2.19. Trave soggetta a momento torcente in mezzeria con incastri torsionali agli estremi senza suolo. Trave con $L/b=10$ (a), (b), (c); trave con $L/b=130$ (d), (e), (f). Rotazione torsionale (a, d), ingobbamento (b, e), momento torcente (c, f): momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

2.2.3.3 Trave a doppio T su suolo soggetta a coppia torcente in mezzeria con appoggi torsionali

Nel seguito viene presentato un esempio di trave soggetta a momento torcente in mezzeria su suolo ($L/b=20$). La trave in esame è un HEB 300 in acciaio S235 ($E=210\text{GPa}$ e $\nu=0.3$) su suolo elastico, vincolata esternamente con due forcelle agli estremi che impediscono la rotazione torsionale ma consentono l'ingobbamento (Fig. 2.20).

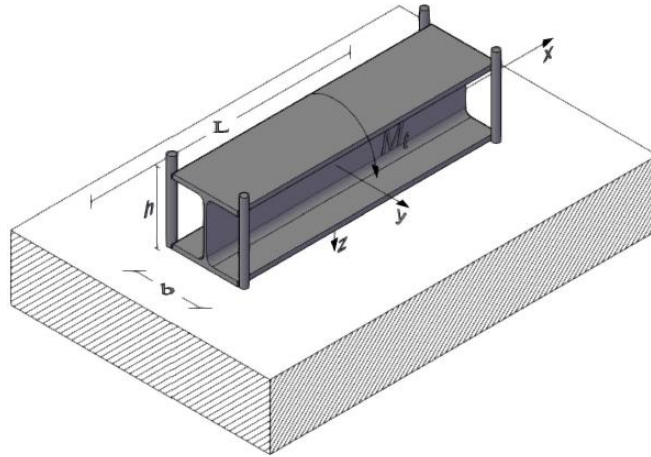


Fig. 2.20. Trave in parete sottile su suolo soggetta a coppia torcente in mezzeria e appoggio torsionale agli estremi.

Nelle Fig. 2.21, a, b, c sono riportati i risultati relativi ad una trave con $\alpha L=1$, mentre nelle Fig. 2.21, d, e, f sono riportati quelli relativi ad $\alpha L=5$. Nelle Fig. 2.21, a, d sono riportati gli andamenti delle rotazioni torsionali, nelle Fig. 2.21, b, e sono riportati gli andamenti dell'ingobbamento, infine, nelle Fig. 2.21, c, f sono riportati gli andamenti dei momenti torcenti: in nero il momento torcente totale, in rosso il momento torcente primario da torsione uniforme. Inoltre, sezione per sezione la differenza tra T_{tot} e T_{t1} indica il contributo della torsione non uniforme T_{t2} .

Nel caso di $\alpha L=1$ la rotazione torsionale presenta un andamento parabolico al centro ed uno quasi lineare agli estremi, ciò porta ad avere l'andamento dell'ingobbamento uniforme ai bordi della trave e molto pendente al centro, la conseguenza di ciò si vede in termini di momento torcente. Infatti, risulta nullo in mezzeria il contributo del momento del primo ordine con l'azione esterna completamente assorbita dalla torsione non uniforme, mentre in prossimità delle forcelle di estremità il contributo prevalente è quello da torsione uniforme, facendo registrare il 87% del T_{tot} .

Nel caso di $\alpha L=5$ la rotazione torsionale così come l'ingobbamento presentano un andamento non lineare. Vale la pena notare che nel caso di terreno $\alpha L=5$ la sollecitazione T_{tot} non impegna tutta la lunghezza della trave ma viene assorbita entro circa $L/3$ dal punto di applicazione della coppia, il momento torcente esterno risulta, allora, assorbito in prevalenza dalla componente non uniforme.

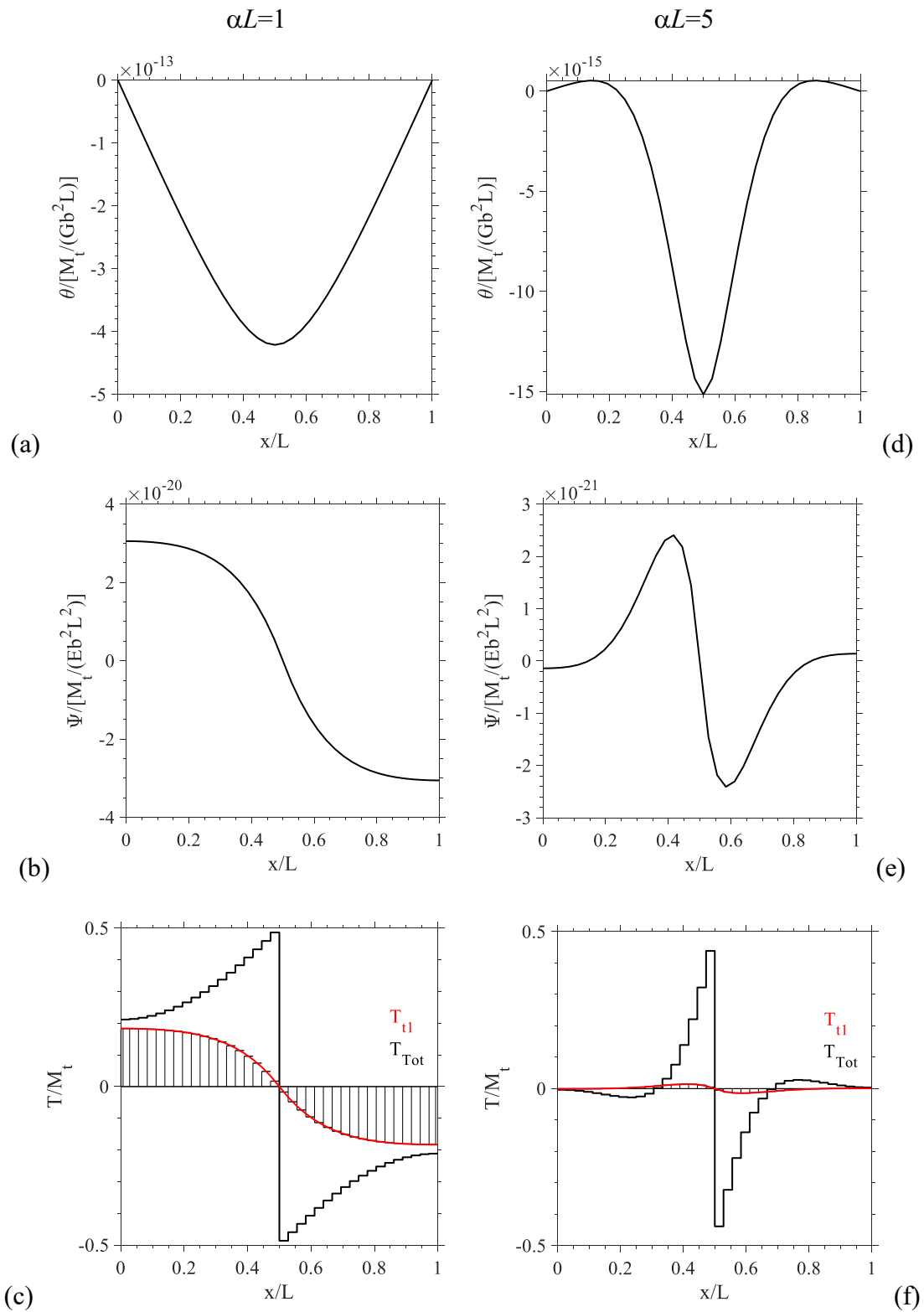


Fig. 2.21. Trave soggetta a torsione su suolo elastico con appoggi torsionali agli estremi ($L/b=20$). Trave con $\alpha L=1$ (a), (b), (c); trave con $\alpha L=5$ (d), (e), (f). Rotazione torsionale (a, d), ingobbamento (b, e), momento torcente (c, f): momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

Al crescere del rapporto L/b cresce la porzione di trave soggetta solo a torsione uniforme T_{t1} , mentre tende a ridursi la porzione soggetta a torsione non uniforme T_{t2} , che nel grafico è rappresentata dalla differenza $T_{t2} = T_{tot} - T_{t1}$. Per meglio cogliere quest'aspetto nelle Fig. 2.22 a, b sono riportati i momenti torcenti T_{tot} e T_{t1} relativi ad una trave sufficientemente lunga con $L/b=200$, su suolo $\alpha L=1$ e $\alpha L=5$ rispettivamente.

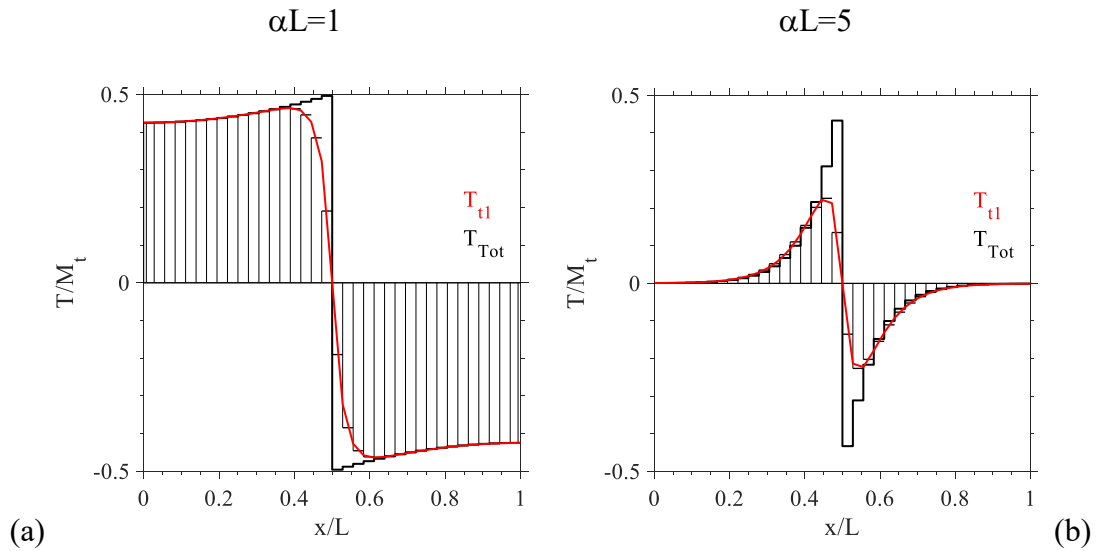


Fig. 2.22. Trave soggetta a torsione su suolo elastico con appoggi torsionali agli estremi ($L/b=200$). Trave con $\alpha L=1$ (a); trave con $\alpha L=5$ (b). Momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

2.2.3.4 Trave a doppio T su suolo soggetta a coppia torcente in mezzeria con incastri torsionali

Nel presente paragrafo si riporta un esempio di trave soggetta a momento torcente in mezzeria ($L/b=20$). La trave in esame è un HEB 300 in acciaio S235 ($E=210\text{GPa}$ e $\nu=0.3$) su suolo elastico, vincolata esternamente da incastri agli estremi che impediscono la rotazione torsionale e l'ingobbamento (Fig. 2.23).

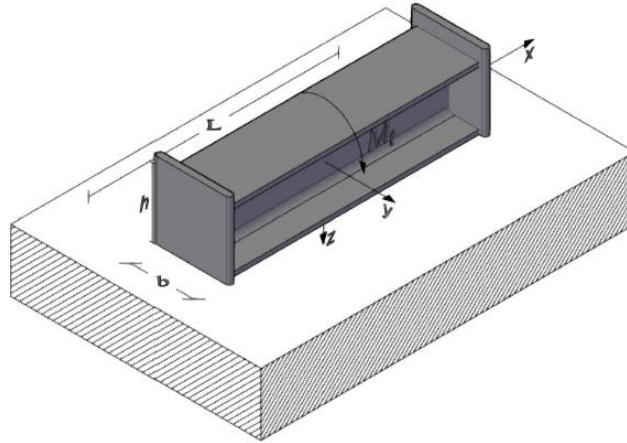


Fig. 2.23. Trave in parete sottile su suolo soggetta a coppia torcente in mezzeria e incastro torsionale agli estremi.

Nelle Fig. 2.24, a, b, c sono riportati i risultati relativi ad una trave con $\alpha L=1$, mentre nelle Fig. 2.24, d, e, f sono riportati quelli relativi ad $\alpha L=5$. Nelle Fig. 2.24, a, d sono riportati gli andamenti delle rotazioni torsionali, nelle Fig. 2.24, b, e sono riportati gli andamenti dell'ingobbamento, infine, nelle Fig. 2.24, c, f sono riportati gli andamenti dei momenti torcenti: in nero il momento torcente totale, in rosso il momento torcente primario da torsione uniforme. Inoltre, sezione per sezione la differenza tra T_{tot} e T_{t1} indica il contributo della torsione non uniforme T_{t2} .

Le rotazioni, per i due valori di rigidezza scelti, presentano andamenti simili al caso con appoggi torsionali, mentre l'ingobbamento ha un andamento sinusoidale con valori nulli agli estremi nel rispetto del vincolo imposto. Per $\alpha L=1$ il momento da torsione uniforme T_{t1} ha un andamento sinusoidale, valore nullo agli estremi per la presenza del vincolo e valore massimo pari al 34% di T_{tot} in corrispondenza di $L/4$, mentre il momento T_{t2} ha la componente prevalente su tutta la trave. Per $\alpha L=5$ il momento da torsione uniforme T_{t1} ha un andamento sinusoidale, valore nullo nelle porzioni $L/4$ estreme della trave e valore massimo pari al 3% di T_{tot} in corrispondenza di $0.4 L$, mentre il momento T_{t2} ha la componente prevalente su tutta la trave.

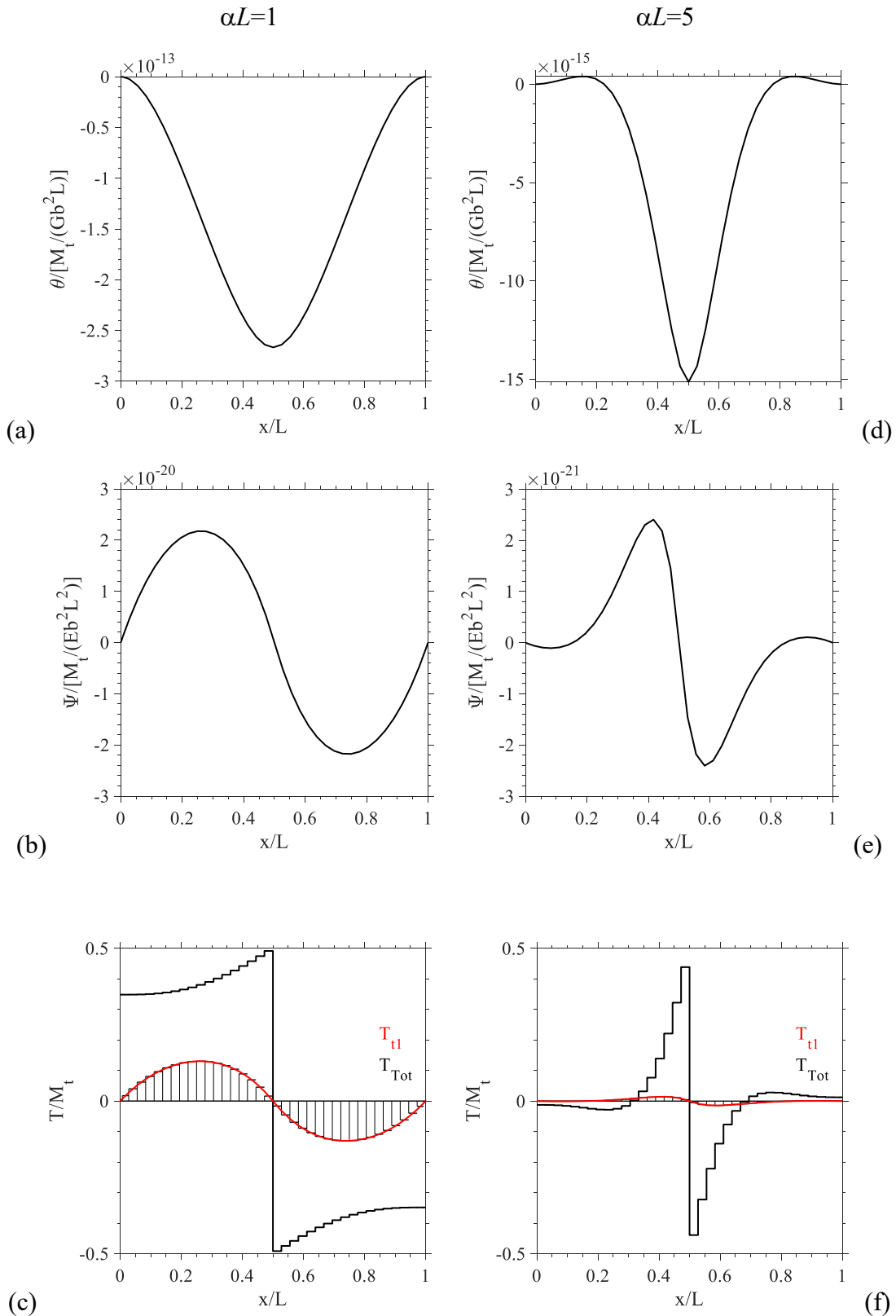


Fig. 2.24. Trave soggetta a momento torcente in mezzeria su suolo elastico con incastrati torsionali agli estremi ($L/b=20$). Trave con $\alpha L=1$ (a), (b), (c); trave con $\alpha L=5$ (d), (e), (f). Rotazione torsionale (a, d), ingobbamento (b, e), momento torcente (c, f): momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

Al crescere del rapporto L/b cresce la porzione di trave soggetta solo a torsione uniforme T_{t1} , mentre tende a ridursi la porzione soggetta a torsione non uniforme T_{t2} , che nel grafico è rappresentata dalla differenza $T_{t2} = T_{tot} - T_{t1}$. Le zone dove rimane prevalente il contributo della torsione non uniforme sono quella centrale, per la presenza del carico concentrato, e quelle ai bordi per la presenza dei vincoli imposti. Inoltre, nel caso di $\alpha L=5$, vista la rigidità del terreno, la sollecitazione torcente viene assorbita entro poca distanza dal punto di applicazione della coppia. Per meglio cogliere quest'aspetto nelle Fig. 2.25 a, b sono riportati i momenti torcenti T_{tot} e T_{t1} relativi ad una trave sufficientemente lunga con $L/b=200$, su suolo $\alpha L=1$ e $\alpha L=5$ rispettivamente.

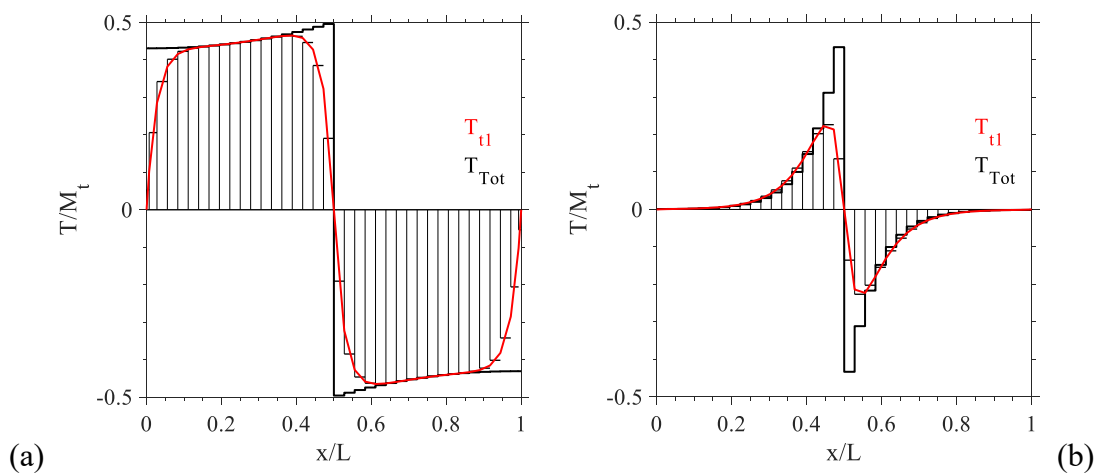


Fig. 2.25. Trave soggetta a momento torcente in mezzeria su suolo elastico con incastri torsionali agli estremi ($L/b=200$). Trave con $\alpha L=1$ (a); trave con $\alpha L=5$ (b). Momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

2.2.3.5 Trave a doppio T su suolo soggetta a coppia torcente in mezzeria senza vincoli

Un ultimo esempio di trave soggetta a momento torcente in mezzeria ($L/b=20$) è quello relativo alla trave HEB 300 in acciaio S235 ($E=210\text{GPa}$ e $\nu=0.3$) su suolo elastico, non vincolata (Fig. 2.26).

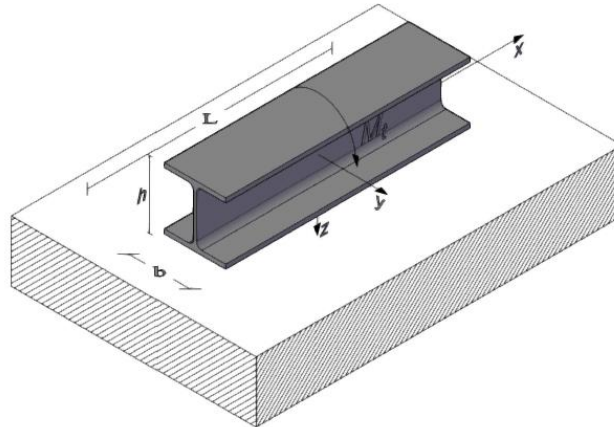


Fig. 2.26. Trave in parete sottile su suolo soggetta a coppia torcente in mezzeria senza vincoli.

Nelle Fig. 2.27, a, b, c sono riportati i risultati relativi ad una trave con $\alpha L=1$, mentre nelle Fig. 2.21, d, e, f sono riportati quelli relativi ad $\alpha L=5$. Nelle Fig. 2.27, a, d sono riportati gli andamenti delle rotazioni torsionali, nelle Fig. 2.27, b, e sono riportati gli andamenti dell'ingobbamento, infine, nelle Fig. 2.27, c, f sono riportati gli andamenti dei momenti torcenti: in nero il momento torcente totale, in rosso il momento torcente primario da torsione uniforme. Inoltre, sezione per sezione la differenza tra T_{tot} e T_{t1} indica il contributo della torsione non uniforme T_{t2} .

Le rotazioni, per i due valori di rigidezza scelti, presentano andamenti simili al caso con appoggi torsionali ma con valori ai bordi diversi da 0, vista l'assenza del vincolo. L'ingobbamento ha un andamento sinusoidale con valori non nulli agli estremi.

Per $\alpha L=1$ il momento da torsione uniforme T_{t1} è quasi costante nei tratti laterali della trave con massimo in $L/4$ dove vale il 46% di T_{tot} . Agli estremi della trave, pur essendo libero l'ingobbamento, si trovano valori di momento torcente secondario diversi da 0, questo è dovuto alla vicinanza del carico e delle reazioni del terreno che, di fatto, creano un vincolo all'ingobbamento. Aumentando il rapporto L/b le reazioni agli estremi della trave diminuiscono e con esse anche l'effetto sull'ingobbamento, portando a valori nulli del momento torcente secondario agli estremi della trave (Fig. 2.28). Per $\alpha L=5$ il momento da torsione uniforme M_{t1} ha un andamento sinusoidale, valore nullo nelle porzioni $L/4$ estreme della trave e valore massimo pari al 6% T_{tot} in corrispondenza di $0.4 L$, mentre il momento T_{t2} ha la componente prevalente su tutta la trave.

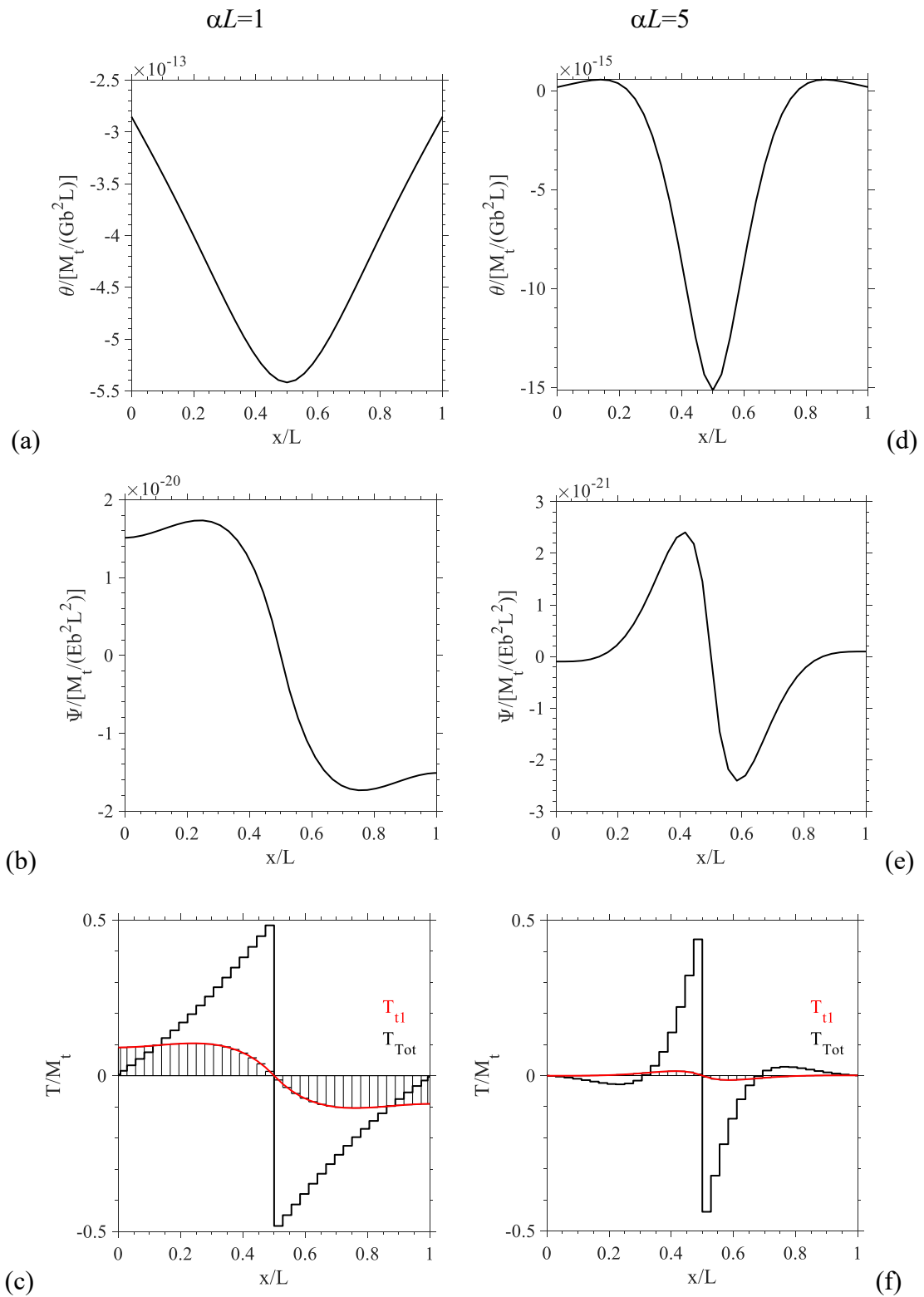


Fig. 2.27. Trave soggetta a torsione su suolo elastico senza vincoli agli estremi ($L/b=20$). Trave con $\alpha L=1$ (a), (b), (c); trave con $\alpha L=5$ (d), (e), (f). Rotazione torsionale (a, d), ingobbamento (b, e), momento torcente (c, f): momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

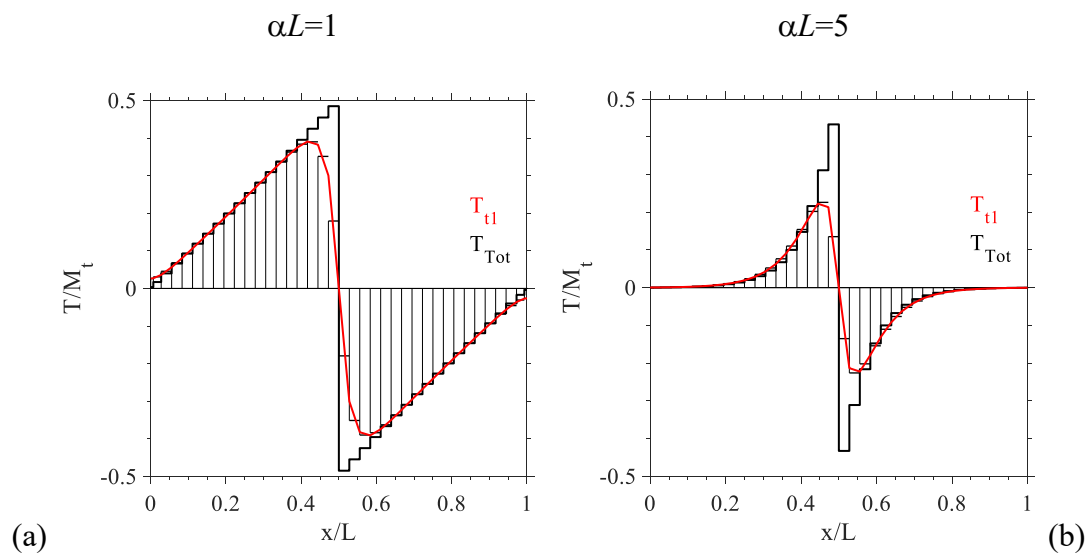


Fig. 2.28. Trave soggetta a torsione su suolo elastico senza vincoli agli estremi ($L/b=200$). Trave con $\alpha L=1$ (a); trave con $\alpha L=5$ (b). Momento torcente: momento primario (linea rossa), momento totale (linea nera).

2.3 Travi di fondazione parallele

Nel seguito viene proposto un esempio di due travi di fondazione di lunghezza $L=4\text{m}$, poste a distanza $d=4\text{m}$ con carico P applicato sulla sola trave $F1$ (Fig. 2.29, a), il parametro αL è pari a 5. La trave presenta una sezione trasversale a T rovescia (Fig. 2.29, b) con $E=30\text{ GPa}$ e $\nu=0.15$.

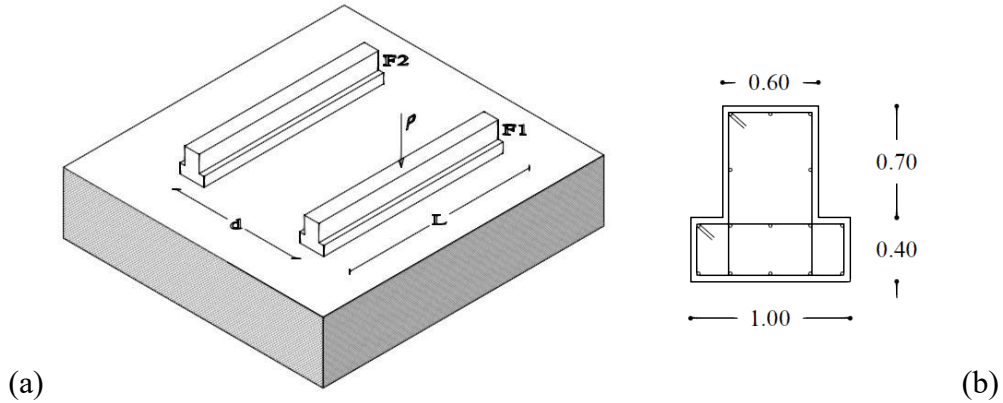


Fig. 2.29. Travi parallele su suolo elastico. Vista tridimensionale (a); dimensioni (in metri) sezione trasversale delle travi (b).

L'esempio mostra come la trave $F1$ induca, per mezzo delle deformazioni del semispazio elastico, delle sollecitazioni sulla trave non caricata $F2$ come mostrato schematicamente nella Fig. 2.30.

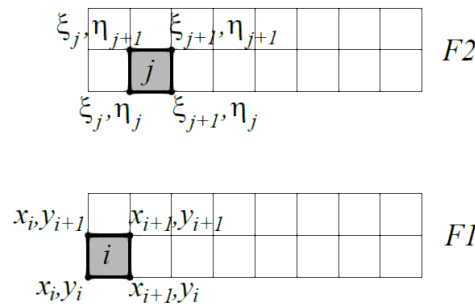


Fig. 2.30. Schema utilizzato per il calcolo della matrice G di interazione tra i diversi elementi delle due travi di fondazione.

La valutazione dell'interazione tra travi poste ad una certa distanza è possibile grazie alla matrice di flessibilità \mathbf{G} che nel presente caso può essere scritta come di seguito:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \tag{Eq. 2.4}$$

dove \mathbf{G}_{11} e \mathbf{G}_{22} rappresentano rispettivamente l'interazione data dagli elementi i e j che compongono $F1$ ed $F2$; \mathbf{G}_{12} rappresenta l'interazione data dagli elementi i che compongono $F1$ rispetto a quelli j che compongono $F2$; \mathbf{G}_{21} rappresenta l'interazione data dagli elementi i che compongono $F2$ rispetto

a quelli j che compongono FI . Vale la pena notare che la matrice \mathbf{G} risulta completamente popolata e simmetrica. I termini che compongono la matrice \mathbf{G} sono riportati di seguito:

$$g_{ij} = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i(x, y) dx dy \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\rho_j(\xi, \eta)}{d(x, y; \xi, \eta)} d\xi d\eta \quad \text{Eq. 2.5}$$

Risolvendo i quattro integrali si perviene alla seguente espressione

$$g_{ij} = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \left[\left[\left[\left[F(x, y; \xi, \eta) \right]_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \right]_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} \quad \text{Eq. 2.6}$$

dove F è funzione della distanza tra i nodi degli elementi i e j ed è riportata in Appendice A5.

La Fig. 2.31(d) riporta lo spostamento verticale nella vista tridimensionale delle due travi, mentre la Fig. 2.31(a) mostra l'abbassamento delle due travi nella sezione $x=L/2$, si nota che la trave $F2$ subisce lo spostamento verticale ed una rotazione legati alla deformazione del substrato. La Fig. 2.31(c) mostra le reazioni verticali della trave $F1$ calcolate lungo $y=b/2$, l'andamento delle tensioni è quello che caratterizza una trave soggetta a carico verticale. La Fig. 2.31(f) riporta il comportamento delle tensioni della trave $F2$ calcolate lungo x in $y=b/2$, tale andamento è quello relativo ad una trave soggetta a carico verticale e coppia torcente. Infatti le Fig. 2.31(b, e) mostrano gli andamenti del momento flettente e torcente relativi alla trave $F2$.

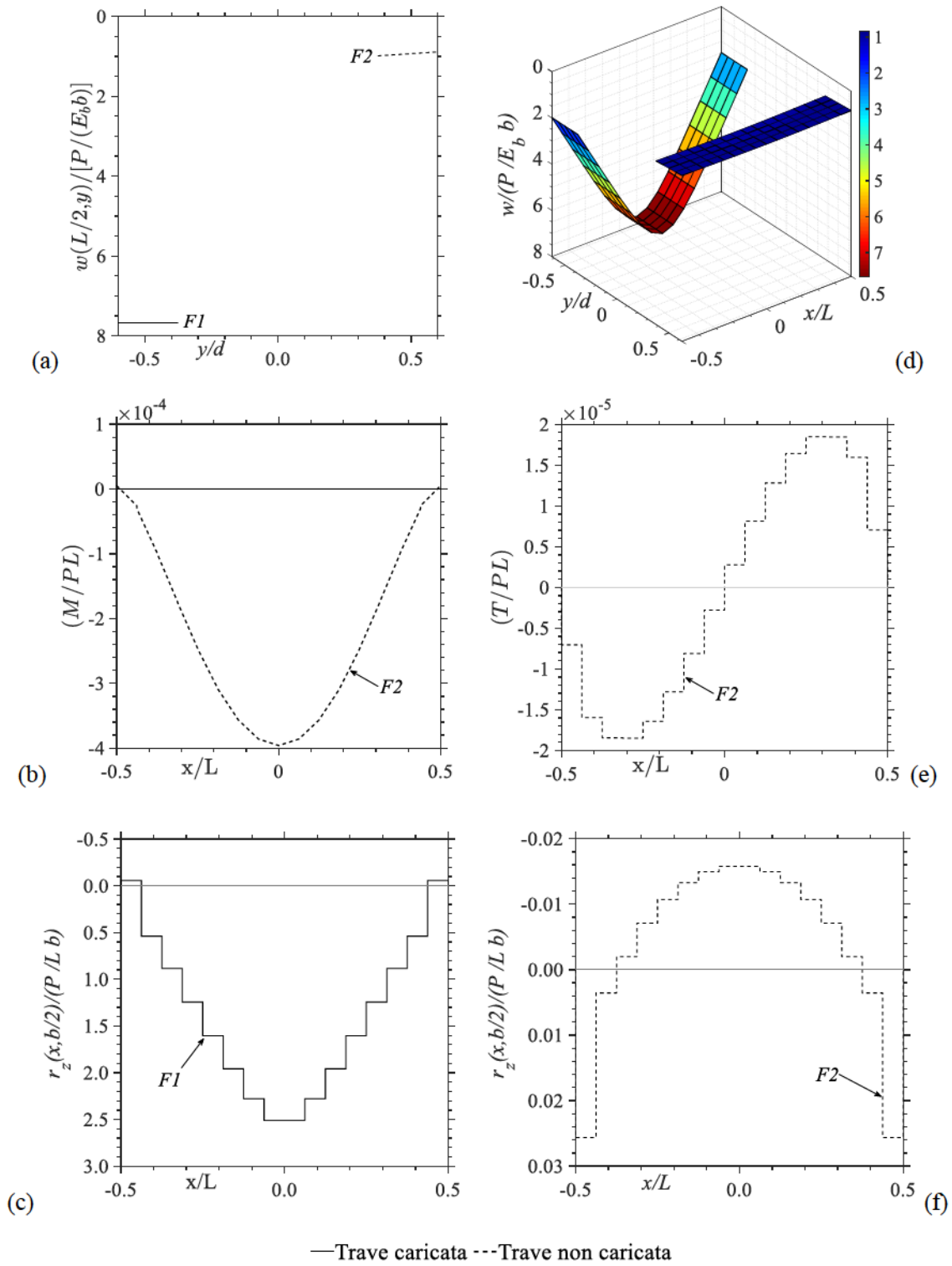


Fig. 2.31. Travi parallele su suolo elastico. Spostamenti verticali (a, d); momento flettente trave $F2$ (b); momento torcente trave $F2$ (e); reazioni verticali trave $F1$ (c); reazioni verticali trave $F2$ (f).

2.4 Grigliato di travi di fondazione

Nel seguito vengono presentati grigliati di travi di fondazione su suolo elastico. I grigliati vengono ottenuti connettendo l'elemento punch rigido e l'elemento trave descritti rispettivamente nei paragrafi 1.3 e 1.4. Nella Fig. 2.32 è riportato lo schema relativo all'accoppiamento tra trave deformabile di fondazione e punch rigido.

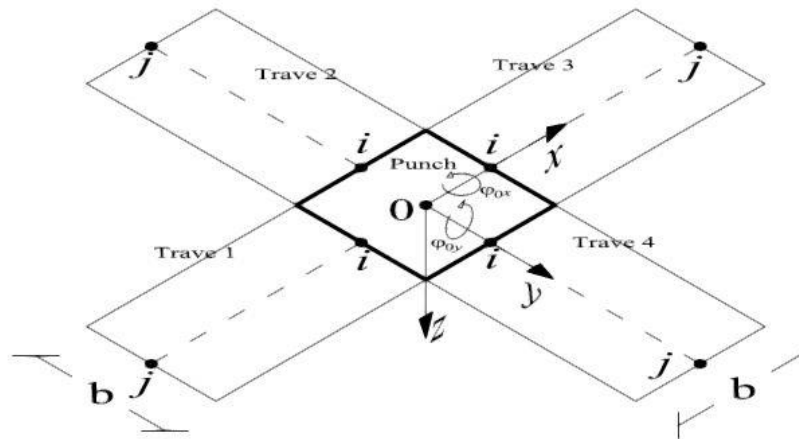


Fig. 2.32. Collegamento punch rigido con 4 travi deformabili.

La distribuzione degli spostamenti verticali all'interno del punch rigido può essere scritta nel seguente modo:

$$w(x, y, 0) = w_0 + \varphi_{0x}y + \varphi_{0y}x \quad \text{Eq. 2.7}$$

dove w_0 , φ_{0x} e φ_{0y} sono riferiti all'origine $x=y=z=0$.

Le travi accoppiate al punch rigido devono rispettare il vincolo imposto da quest'ultimo, infatti gli spostamenti agli estremi della parte deformabile sono legati per mezzo di relazioni cinematiche a quelli del punch, con riferimento alla Fig. 2.32 per la trave 1, nel sistema di riferimento locale, vale:

$$\begin{aligned} u_{1,i} &= u_0 \\ v_{1,i} &= v_0 - \varphi_{0z} b/2; \\ \varphi_{1z,i} &= \varphi_{0z}; \\ w_{1,i} &= w_0 - \varphi_{0y} b/2; \\ \varphi_{1y,i} &= \varphi_{0y}; \\ \theta_{1,i} &= \varphi_{0x}; \\ \Psi_{1,i} &= \Psi_0; \end{aligned} \quad \text{Eq. 2.8}$$

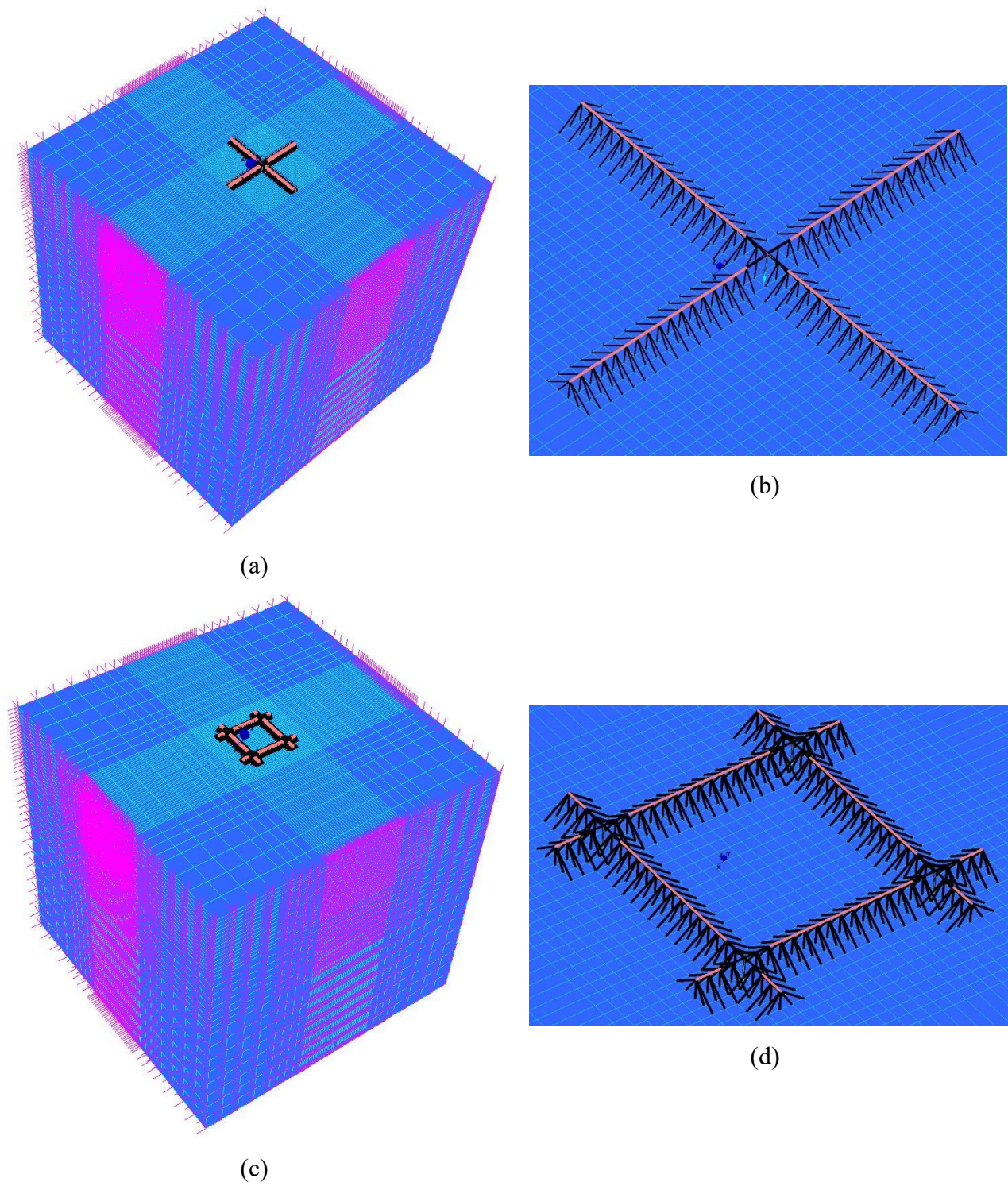


Fig. 2.33. Modello FEM 3D relativo al caso di travi incrociate (a); particolare travi incrociate con link di connessione (b); modello FEM 3D relativo al caso del grigliato di travi (c); particolare del grigliato di travi con link di connessione (d).

2.4.1 Travi di fondazione incrociate con carico verticale

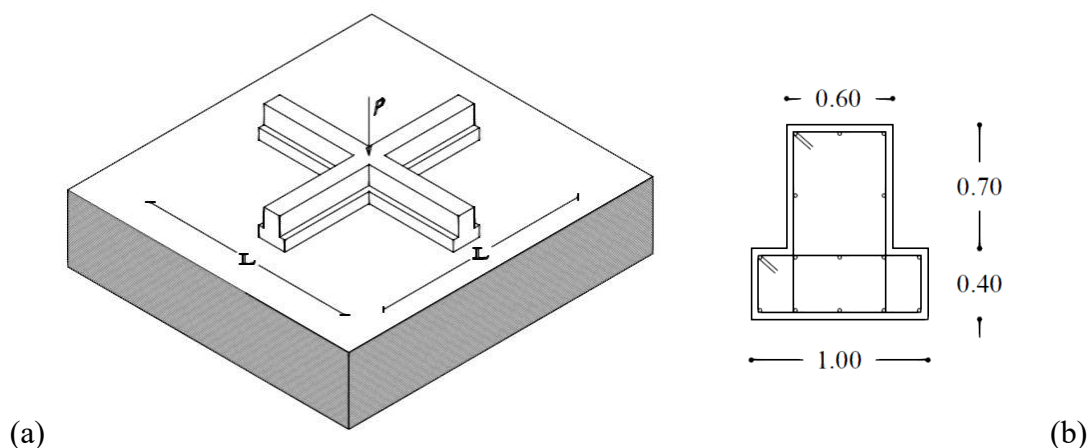


Fig. 2.34. Travi di fondazione incrociate soggette a carico verticale. Vista tridimensionale (a); dimensioni (in metri) sezione trasversale delle travi (b).

Il caso di travi incrociate nella loro mezzeria e soggette a carico verticale P viene riportato nella seguente sezione. Le travi di fondazione con $E=30$ GPa e $\nu=0.15$ sono pensate con sezione a T rovescia (Fig. 2.34, b), lunghezza complessiva $L=9$ m (Fig. 2.34, a) e sono poste su suolo elastico ed isotropo. Le porzioni di trave deformabili hanno una lunghezza pari a 4m, mentre l'intersezione, gestita da un punch rigido, ha dimensioni di 1m. Nel seguito vengono riportati vari esempi al variare del parametro αL .

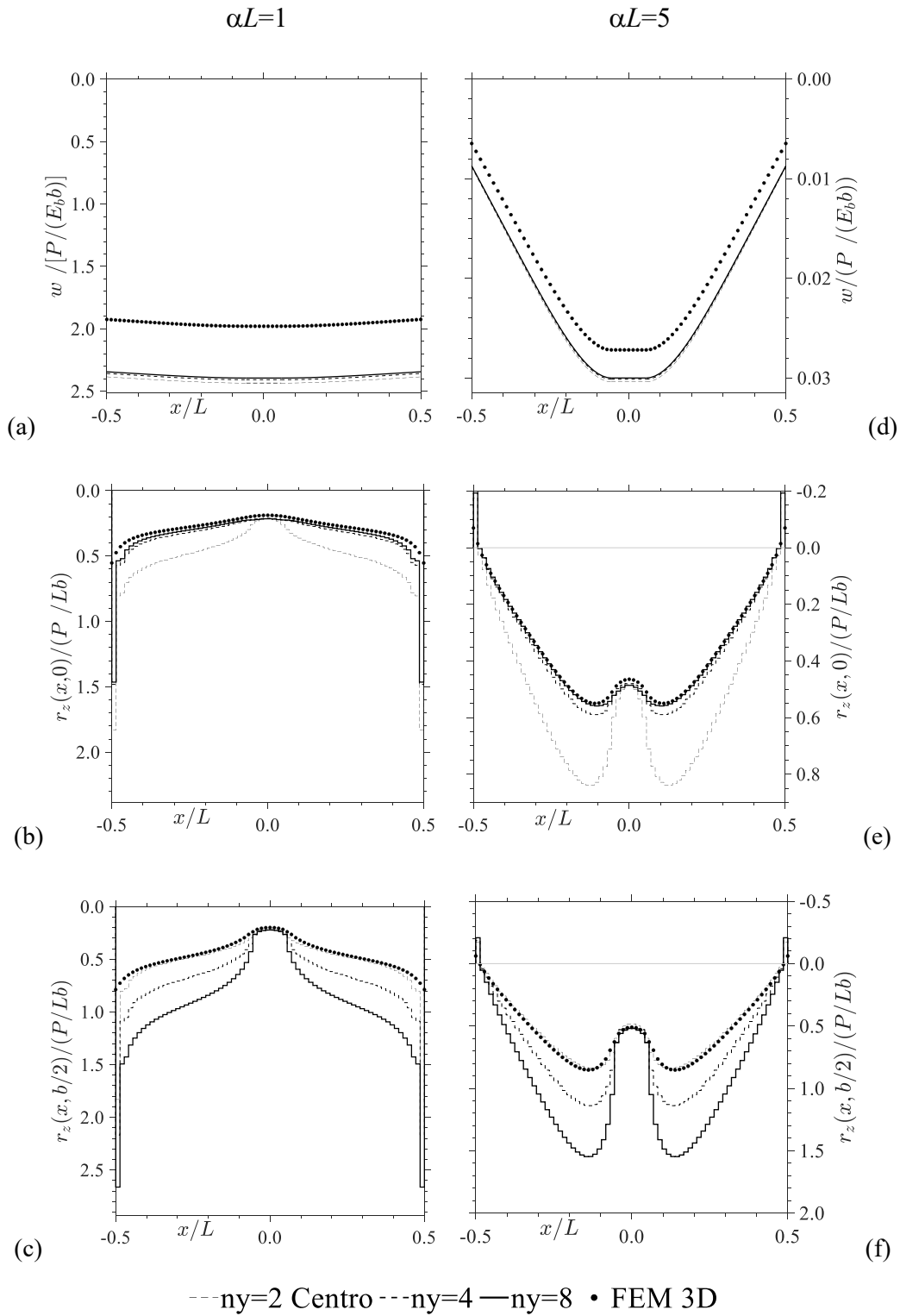


Fig. 2.35. Travi di fondazioni incrociate soggette a carico verticale. Spostamento verticale (a, d), reazioni verticali in $y=0$ (b, e), reazioni verticali in $y=b/2$ (c, f). $\alpha L=1$ (a, b, c), $\alpha L=5$ (d, e, f).

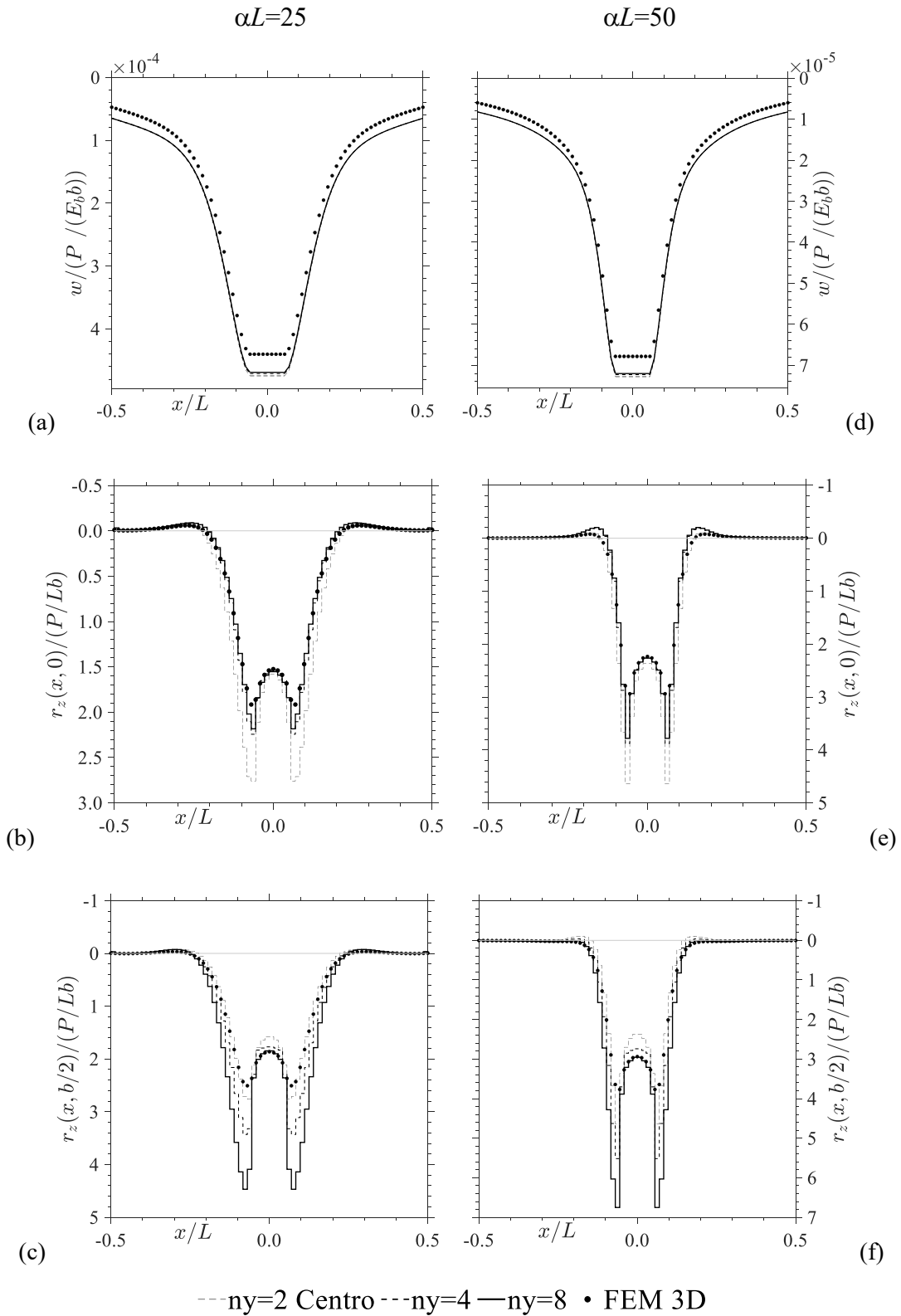


Fig. 2.36. Travi di fondazioni incrociate soggette a carico verticale. Spostamento verticale (a, d), reazioni verticali in $y=0$ (b, e), reazioni verticali in $y=b/2$ (c, f). $\alpha L=25$ (a, b, c), $\alpha L=50$ (d, e, f).

Nelle Fig. 2.35-Fig. 2.36 sono riportati gli spostamenti e le tensioni al variare della rigidezza del suolo αL .

Con riferimento agli spostamenti verticali, si nota che, all'aumentare di αL , la deformata passa da un andamento circa costante ad una concentrazione di abbassamenti in corrispondenza del punch rigido, mentre i valori assoluti diminuiscono rapidamente. Con riferimento alle reazioni verticali, emerge che, all'aumentare di αL , queste ultime passano dall'avere un comportamento tipo quello mostrato per le travi singole Fig. 2.3 (non risentendo quasi della presenza della trave trasversale) all'avere un andamento fortemente influenzato dal punch rigido.

Per chiarire meglio questo aspetto, nelle Fig. 2.37 a,b, sono riportati gli andamenti delle reazioni verticali calcolati in $y=0$ e $y=b/2$ al variare del parametro αL . Si nota il passaggio da reazioni che interessano l'intera fondazione (αL piccolo) a reazioni che si concentrano sotto il punch rigido (αL grande).

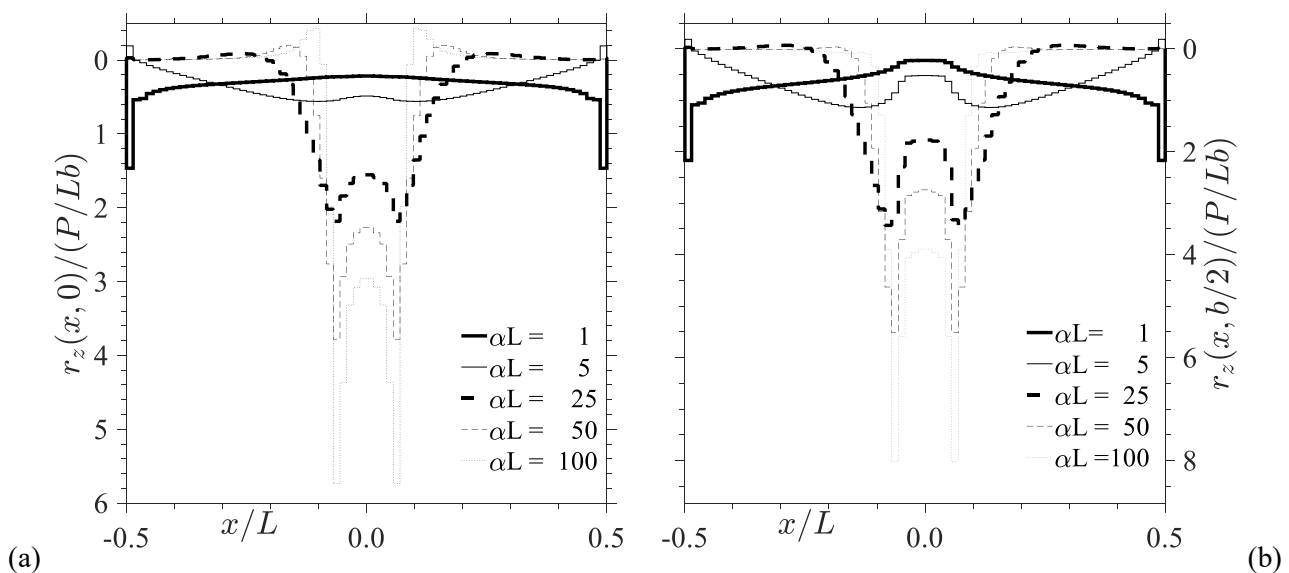


Fig. 2.37. Travi di fondazioni incrociate soggette a carico verticale. Reazioni verticali in $y=0$ (a), reazioni verticali in $y=b/2$ (b). al variare di αL .

Nelle Fig. 2.38, per una migliore lettura, viene riportato il diagramma tridimensionale delle reazioni calcolate per diversi valori di αL . Per $\alpha L = 1$ la tensione nello spigolo interno (sui bordi del punch) tende ad infinito con un gradiente minore rispetto a quello che si registra agli estremi della trave, inoltre essendo la mesh rada non si riesce ad apprezzare tale singolarità.

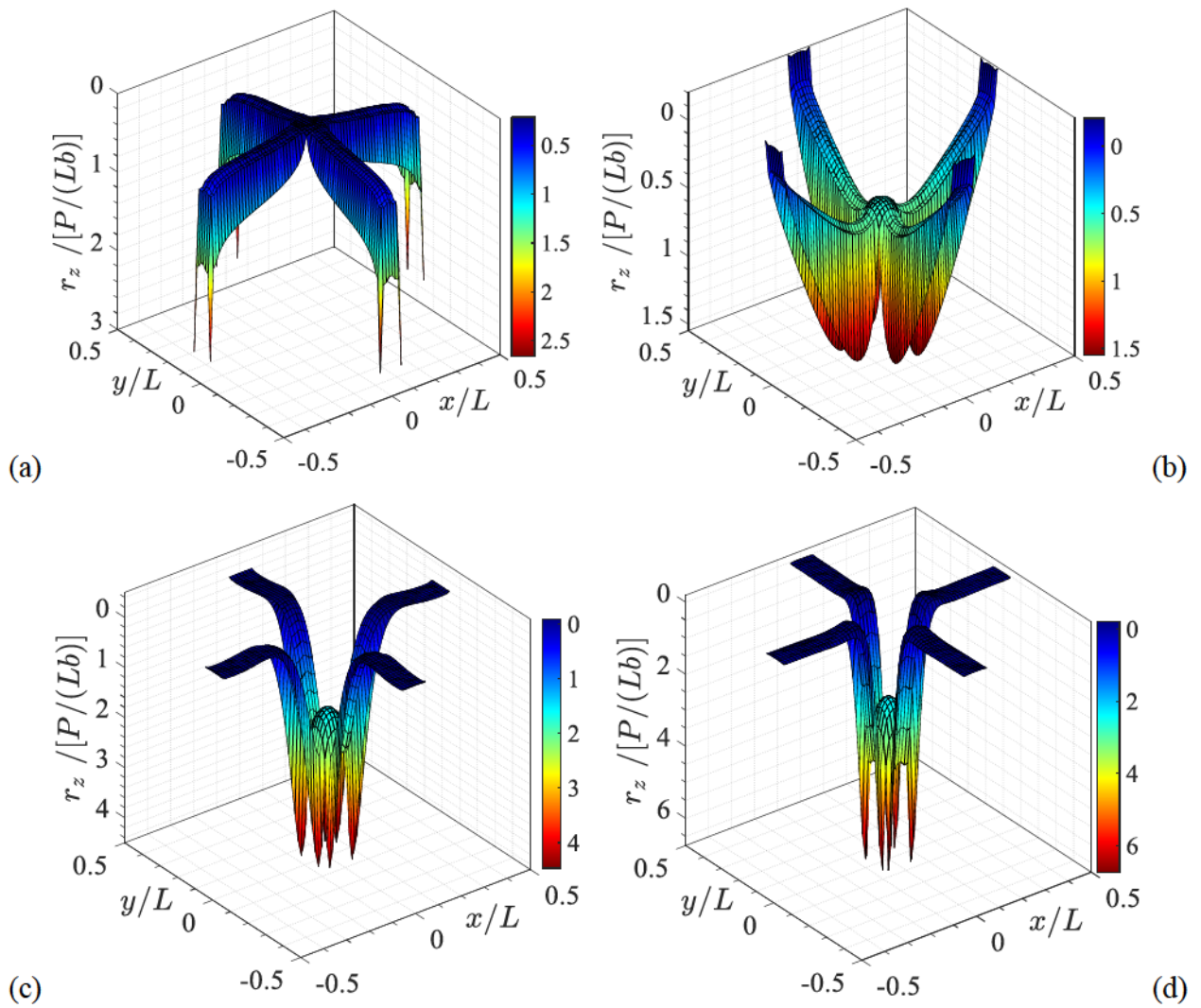


Fig. 2.38. Travi di fondazioni incrociate soggette a carico verticale con discretizzazione trasversale $n_y=8$. Reazioni verticali $\alpha L=1$ (a), $\alpha L=5$ (b), $\alpha L=25$ (c), $\alpha L=50$ (d).

2.4.2 Travi di fondazione incrociate con coppia applicata

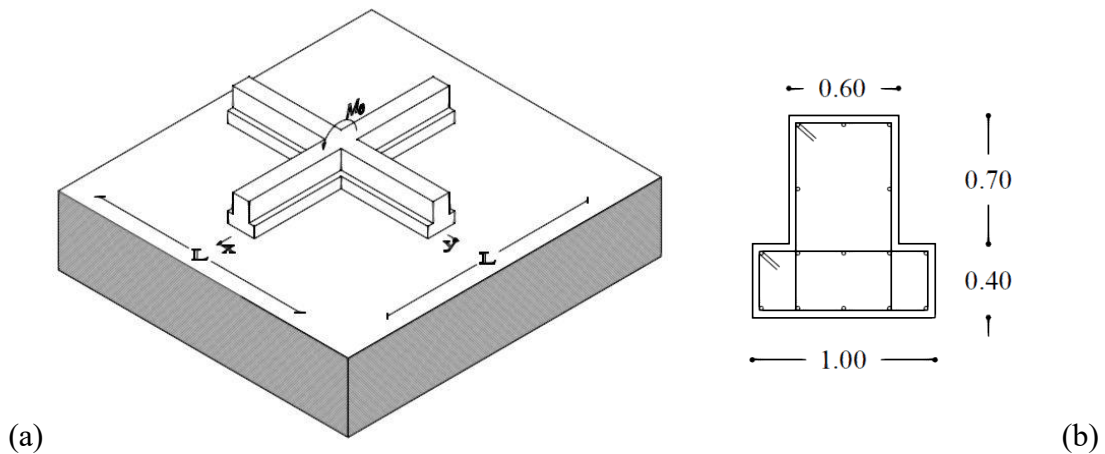


Fig. 2.39. Travi di fondazione incrociate soggette a coppia concentrata. Vista tridimensionale (a); dimensioni (in metri) sezione trasversale delle travi (b).

Nel seguito viene riportato il caso di travi incrociate nella loro mezzeria e soggette a coppia concentrata M_0 come indicato in Fig. 2.39, a. Le travi di fondazione con $E=30$ GPa e $\nu=0.15$ sono pensate con sezione a T rovescia (Fig. 2.39, b), lunghezza complessiva $L=9$ m (Fig. 2.39, a) e sono poste su suolo elastico ed isotropo. Le porzioni di trave deformabili hanno una lunghezza pari a 4m, mentre l'intersezione, gestita da un punch rigido, ha dimensioni di 1m. L'esempio vuole mettere in evidenza la ripartizione del momento applicato M_0 tra la direzione x , come momento flettente, e direzione y come momento torcente, considerando valori del parametro $\alpha L=1$ (suolo deformabile rispetto alla trave) ed $\alpha L=10$ (suolo rigido rispetto alla trave). Nelle Fig. 2.40a,d è riportato l'andamento delle reazioni verticali del suolo, si riconosce una distribuzione simile a quella vista in §2.1.3 per la trave lungo x , e una distribuzione simile a quelle vista nel §2.2 per la trave lungo y . Di maggiore interesse sono le Fig. 2.40(b, e) e le Fig. 2.40(c, f), che riportano l'andamento del momento flettente lungo le travi in direzione x e del momento torcente lungo le travi in direzione y . Il contributo dato dalla rigidità flessionale diminuisce all'aumentare di αL , mentre aumenta quello dato dalla rigidità torsionale. Nella Tab. 2-2 sono riportati i contributi a momento flettente e torcente valutati nel punto di coordinate $(x=0, y=0)$.

	$\alpha L=1$	$\alpha L=10$
Momento flettente	96%	74%
Momento torcente	4%	26%

Tab. 2-2. Ripartizione della coppia concentrata M_0 al variare della rigidità del terreno.

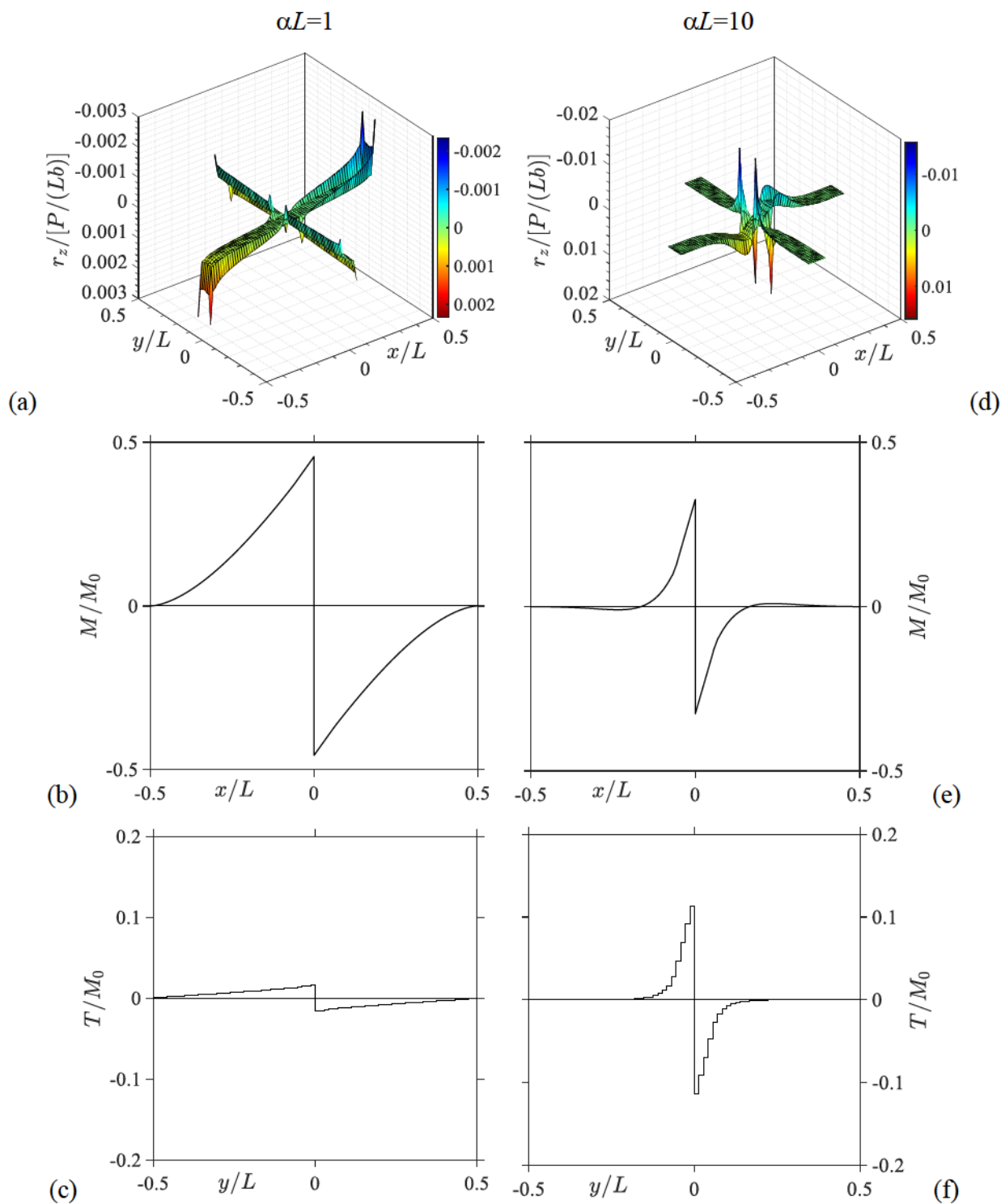


Fig. 2.40. Travi di fondazioni incrociate soggette a coppia concentrata. Reazioni verticali (a, d), momento flettente su trave lungo y (b, e), momento torcente su trave lungo x (c, f).

2.4.3 Grigliato di travi soggetto a quattro carichi concentrati

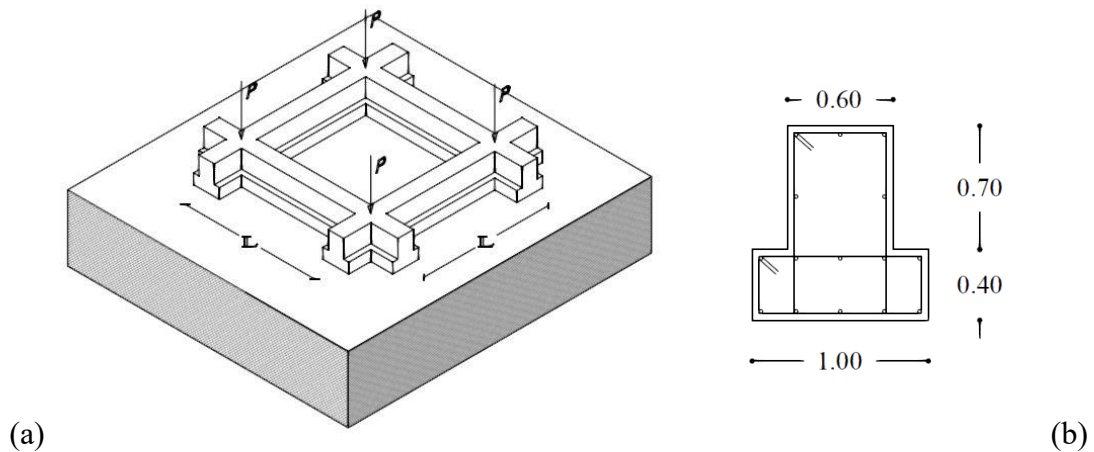


Fig. 2.41. Grigliato di travi di fondazione soggetto a carichi concentrati. Vista tridimensionale (a); dimensioni (in metri) sezione trasversale delle travi (b).

Nel presente paragrafo viene analizzato un primo caso di graticcio di travi di fondazione caricato da quattro forze concentrate disposte su suolo elastico. Le travi hanno sezione a T rovescia (Fig. 2.41, b) ed hanno lunghezza deformabile pari a $L=3\text{m}$, l'incrocio è gestito attraverso l'inserimento di punch rigidi della dimensione di 1m, inoltre, esternamente ai punch sono presenti sbalzi deformabili di lunghezza pari a 0.5m. Nelle Fig. 2.42 sono riportati i risultati relativi a terreni con parametro $\alpha L=1$ e $\alpha L=50$. Il confronto con il modello FEM 3D porta a risultati vicini tra loro. È evidente, come visto in precedenza, una forte influenza del punch rigido con valori di αL elevati, mentre per valori piccoli del parametro l'andamento degli spostamenti e delle reazioni risente quasi per nulla della presenza del punch rigido.

Le Fig. 2.43 mostrano le reazioni nella direzione trasversale della trave calcolate in $y=L/2$, tali reazioni hanno l'andamento tipico di una sezione trasversalmente rigida. In particolare si nota che nel caso di $\alpha L=50$ le reazioni risultano quasi simmetriche, mentre nel caso di $\alpha L=1$ presentano valori più alti sul bordo esterno e più bassi sul bordo interno, questa asimmetria porta alla nascita di momento torcente come indicato Fig. 2.44b. Nella Fig. 2.44a è riportato il diagramma del momento flettente sulla struttura di fondazione, che risulta distribuito lungo tutta la trave per $\alpha L=1$ e concentrato solo sotto l'incrocio delle travi nel caso di $\alpha L=50$.

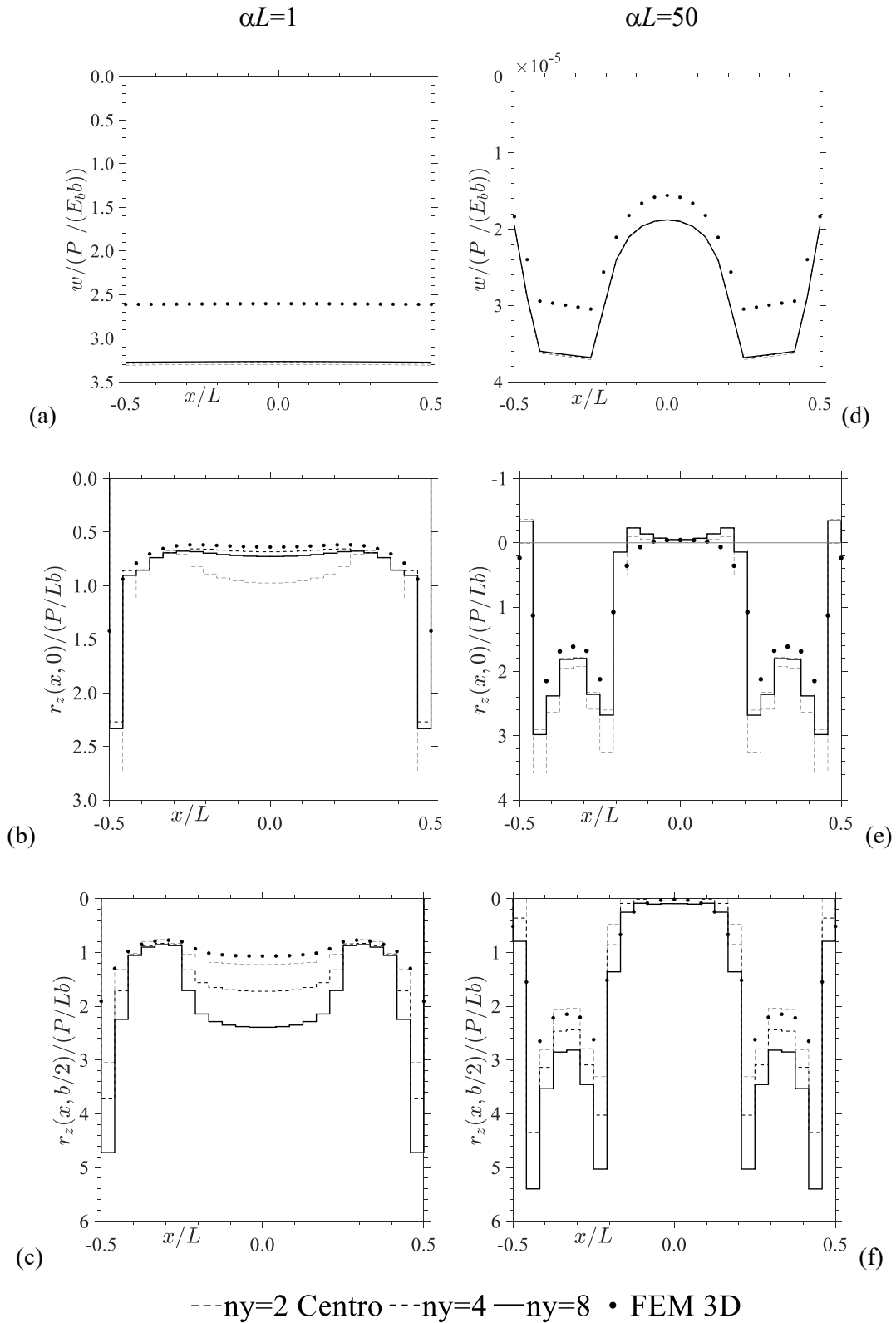


Fig. 2.42. Grigliato di travi di fondazione soggetto a carichi concentrati. Spostamento verticale (a, d), reazioni verticali in $y=0$ (b, e), reazioni verticali in $y=b/2$ (c, f). $\alpha L=1$ (a, b, c), $\alpha L=25$ (d, e, f).

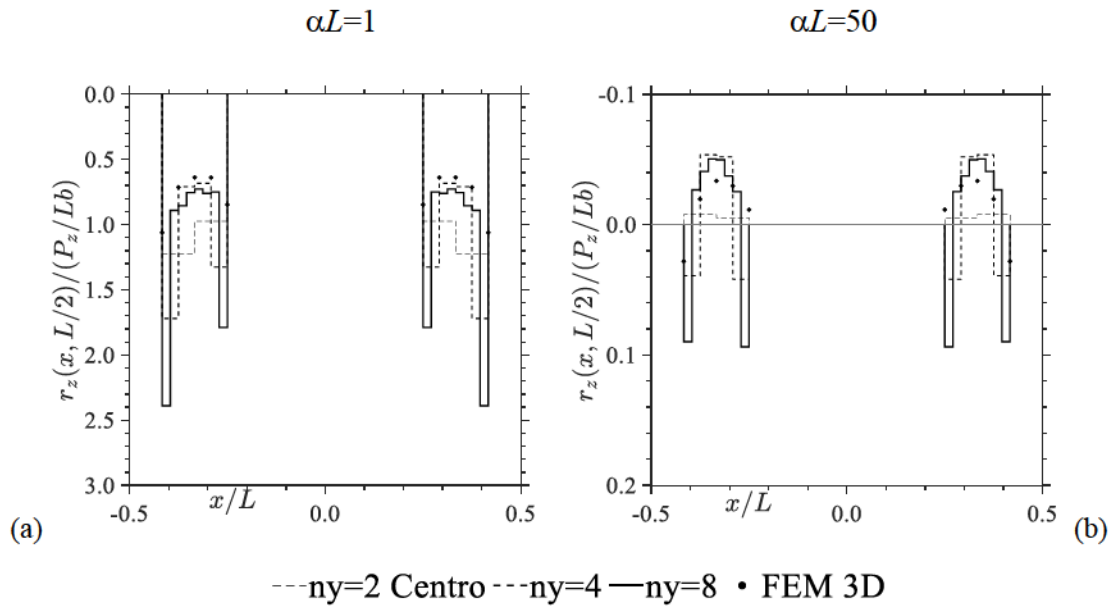


Fig. 2.43. Grigliato di travi di fondazione soggetto a carichi concentrati. Reazioni verticali sezione trasversale $y=L/2$ (a, b). $\alpha L=1$ (a), $\alpha L=50$ (b).

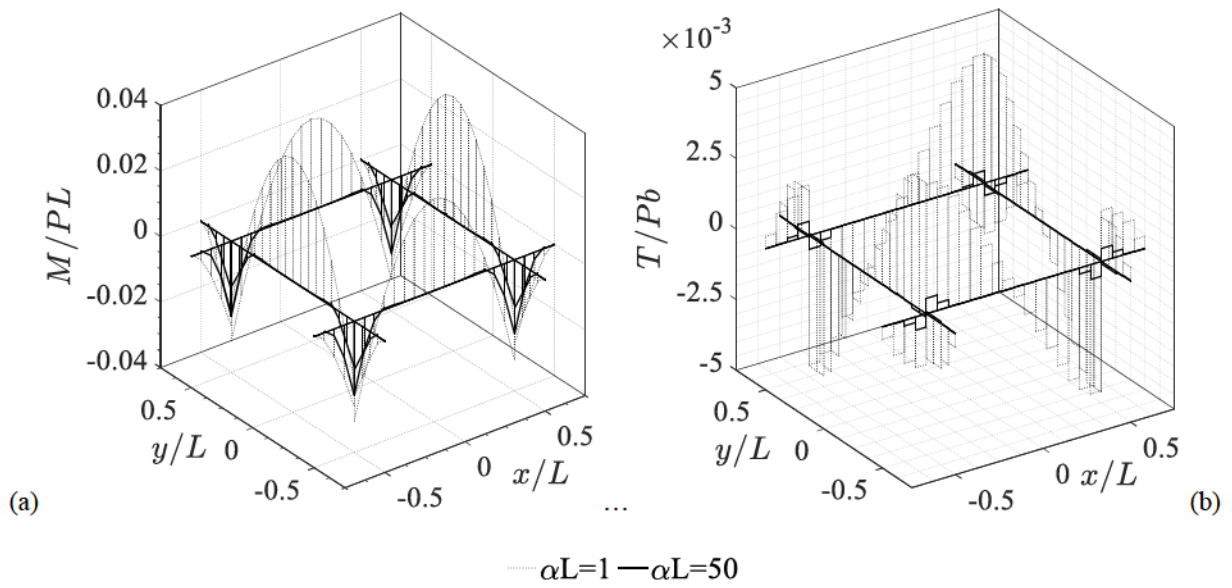


Fig. 2.44. Grigliato di travi di fondazione soggetto a carichi concentrati. Momento flettente (a), momento torcente (b).

2.4.4 Grigliato di travi soggetto a due carichi concentrati

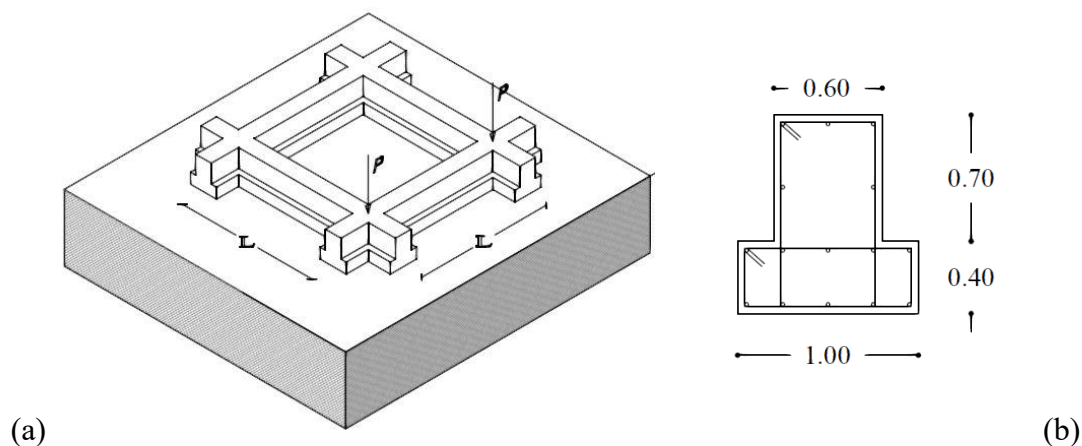


Fig. 2.45. Grigliato di travi di fondazione soggetto due carichi concentrati. Vista tridimensionale (a); dimensioni (in metri) sezione trasversale delle travi (b).

Nel presente paragrafo viene analizzato il caso di graticcio di travi di fondazione caricato da due forze concentrate disposte su suolo elastico. Le travi hanno sezione a T rovescia (Fig. 2.45, b) ed hanno lunghezza deformabile pari a $L=3\text{m}$, l'incrocio è gestito attraverso l'inserimento di punch rigidi della dimensione di 1m, inoltre, esternamente ai punch sono presenti sbalzi deformabili di lunghezza pari a 0.5m. Con la linea tratteggiata è riportato il caso con $\alpha L=1$, mentre con linea continua il caso con $\alpha L=50$. Nelle Fig. 2.46a,b sono riportati: il momento flettente ed il momento torcente rispettivamente. Il terreno con minore rigidezza ($\alpha L=1$) induce, sulla fondazione, sollecitazioni flettenti e torcenti che interessano la quasi totalità del graticcio, invece il suolo con $\alpha L=50$ localizza le sollecitazioni vicine ai punti di applicazione delle forze. In valore assoluto le sollecitazioni sulle travi del sistema con terreno deformabile ($\alpha L=1$), risultano essere maggiori rispetto a quelle con terreno rigido ($\alpha L=50$).

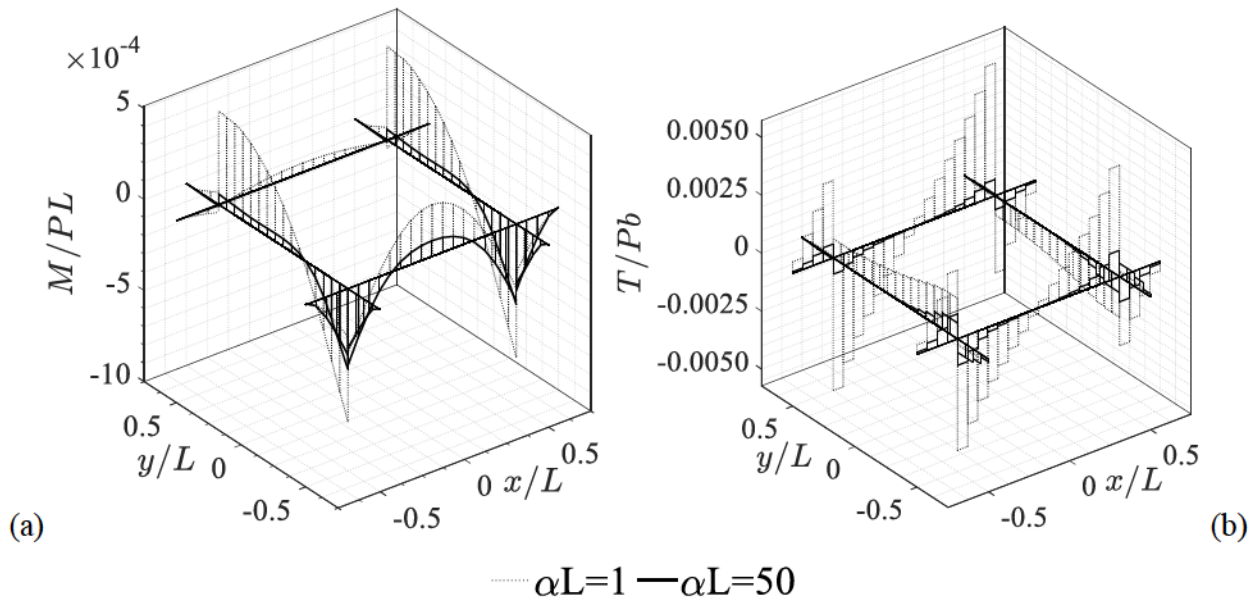


Fig. 2.46. Grigliato di travi di fondazione soggetto a due carichi concentrati. Momento flettente (a, d), reazioni verticali in $y=0$ (b, e), reazioni verticali in $y=b/2$ (c, f). $\alpha L=1$ (a, b, c), $\alpha L=50$ (d, e, f).

3 INSTABILITÀ DI TRAVI DI EULERO BERNOULLI-VLASOV SU SEMISPAZIO

3.1 Introduzione

La stabilità delle travi e dei telai di Eulero-Bernoulli-Vlasov su substrato elastico è importante in molti campi dell'ingegneria ed ha dato lo spunto per diversi lavori. Nel campo dell'ingegneria civile si trovano diversi esempi di questo problema. Per esempio nella stabilità delle pavimentazioni stradali (Kerr 1984) o nella stabilità delle rotaie ferroviarie (Kerr 1974, 1978). In questo contesto, le opere di Wieghardt (1922) e Prager (1927) si basano sul presupposto che il semispazio sotto la trave sia modellato come un insieme di molle distribuite (Winkler 1867). Nel 1937, Biot studiò il problema di una trave infinita appoggiata su un semipiano elastico caricato da forze verticali. All'interno di questo lavoro è stata ricavata una relazione tra il modulo elastico del semipiano e la costante di sottofondo di Winkler confrontando travi di lunghezza infinita. Reissner (1937) e Murthy (1970, 1973) hanno studiato il problema della stabilità di una trave infinita appoggiata su un semipiano elastico. Dopo i primi studi sulla stabilità delle strutture su suolo, l'interesse per questo problema è cresciuto, motivato dai primi problemi strutturali di elementi sandwich. Lo studio degli elementi sandwich è proseguito fino all'inizio del nuovo millennio (Allen (1969); Davies (2001)). In Timoshenko e Gere (1961), viene studiata l'instabilità con diverse condizioni di vincolo, come per esempio la trave di Bernoulli sul suolo alla Winkler. Inoltre, le condizioni di instabilità della trave sul semispazio di Winkler con vari vincoli di estremità è stato recentemente ripreso da Wang et al. (2005). Assumendo la relazione più realistica tra pressione di fondazione e spostamento della trave definito da Wieghardt, Smith (1969), ha determinato i carichi di instabilità di una trave con estremità incernierate. Gallagher (1974) è stato il primo a studiare l'instabilità di una trave di lunghezza finita ed estremità vincolate su semipiano elastico adottando i polinomi di Chebyshev. Lo stesso problema è stato studiato da Bosakov (1994) che ha applicato il metodo di Ritz per risolvere il problema di stabilità di una semplice trave appoggiata. Baraldi e Tullini (2021) hanno determinato i carichi critici flessionali di travi di lunghezza finita su semispazio elastico. Nel seguito vengono calcolati i carichi critici delle travi di Eulero-Bernoulli-Vlasov di lunghezza finita poggianti su un semi-spazio elastico, utilizzando il modello di trave proposto da Barsoum e Gallagher (1970). Tale modello utilizza 7 gradi di libertà e considera nella matrice geometrica \mathbf{K}_g il contributo all'instabilità di tutte le sollecitazioni. I carichi critici sono

valutati facendo uso di elementi finiti in spostamento per la trave accoppiati con le equazioni integrali al contorno (FE-BIE). Vengono proposti confronti tra modello FE-BIE e metodi basati su classici FEM. Per diversi tipi di carichi e vincoli sono riportate le forme modali e andamenti dei carichi critici al variare della rigidezza del terreno.

3.2 Instabilità torsionale di travi su semispazio

3.2.1 Instabilità torsionale di una trave su semispazio con stessa rotazione torsionale agli estremi

Nel seguito si considera l'instabilità di una trave doppiamente simmetrica (HEB300; $\chi=L/b=20$), con stessa rotazione torsionale agli estremi, su suolo elastico. Le equazioni che garantiscono tale vincolo sono le seguenti: $R_1 = \theta(L/2) - \theta(-L/2) = 0$ e $R_2 = \theta(L/2) + \theta(-L/2) = 0$. Assumendo un parametro di penalizzazione $k = 10^9$ che assicura una soluzione numerica stabile. Nella Fig. 3.1, a si riporta l'andamento dei carichi critici adimensionali al variare della rigidezza del terreno. Per valori di rigidezza del suolo prossimi a 0 la trave si comporta come se fosse vincolata ad avere la medesima rotazione torsionale agli estremi e senza altro vincolo nella sua lunghezza. Il primo modo è separato da tutti gli altri, mentre per i successivi si notano diversi incroci tra le curve ed il valore del moltiplicatore aumenta all'aumentare della rigidezza αL . Nella Fig. 3.1,b sono riportati i rapporti $P_{cr}/[P_{cr,t}(\alpha L)^2]$ rispetto al parametro αL , i risultati numerici non mostrano convergenza a valori stabili, mentre per αL pari a 50 i primi 2 carichi critici valgono:

$$P_{cr,t,1} = 0.102P_{cr,t}(\alpha L)^2 \quad \text{Eq. 3.1}$$

$$P_{cr,t,2} = P_{cr,t,3} = 0.129P_{cr,t}(\alpha L)^2 \quad \text{Eq. 3.2}$$

$$P_{cr,t,4} = 0.131P_{cr,t}(\alpha L)^2 \quad \text{Eq. 3.3}$$

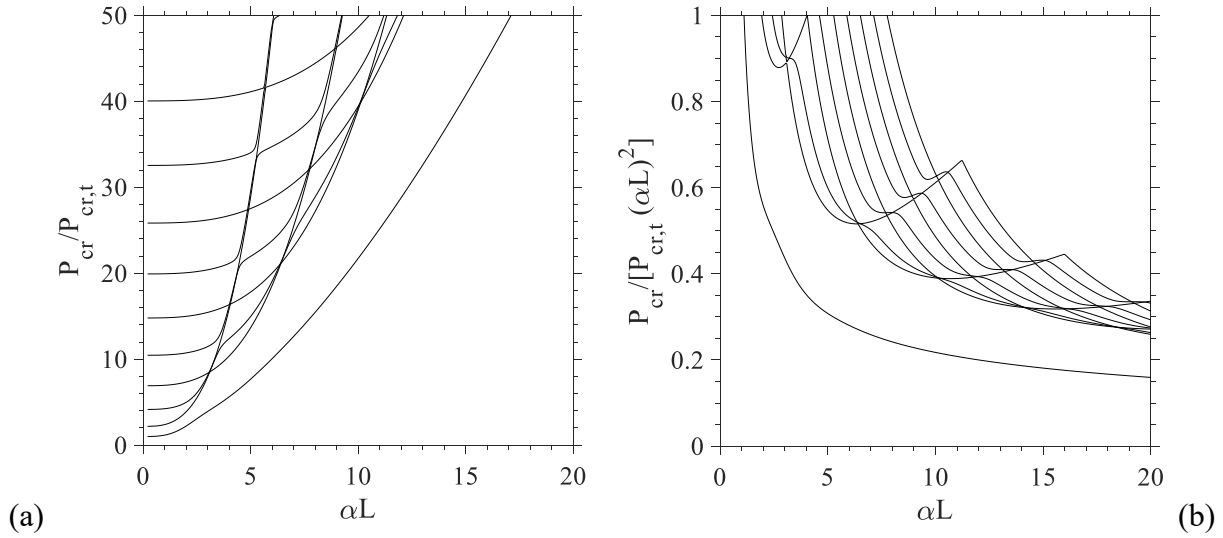


Fig. 3.1. Carichi critici torsionali adimensionalizzati al variare della rigidezza del terreno per una trave con stessa rotazione torsionale agli estremi ($\chi=L/b=20$).

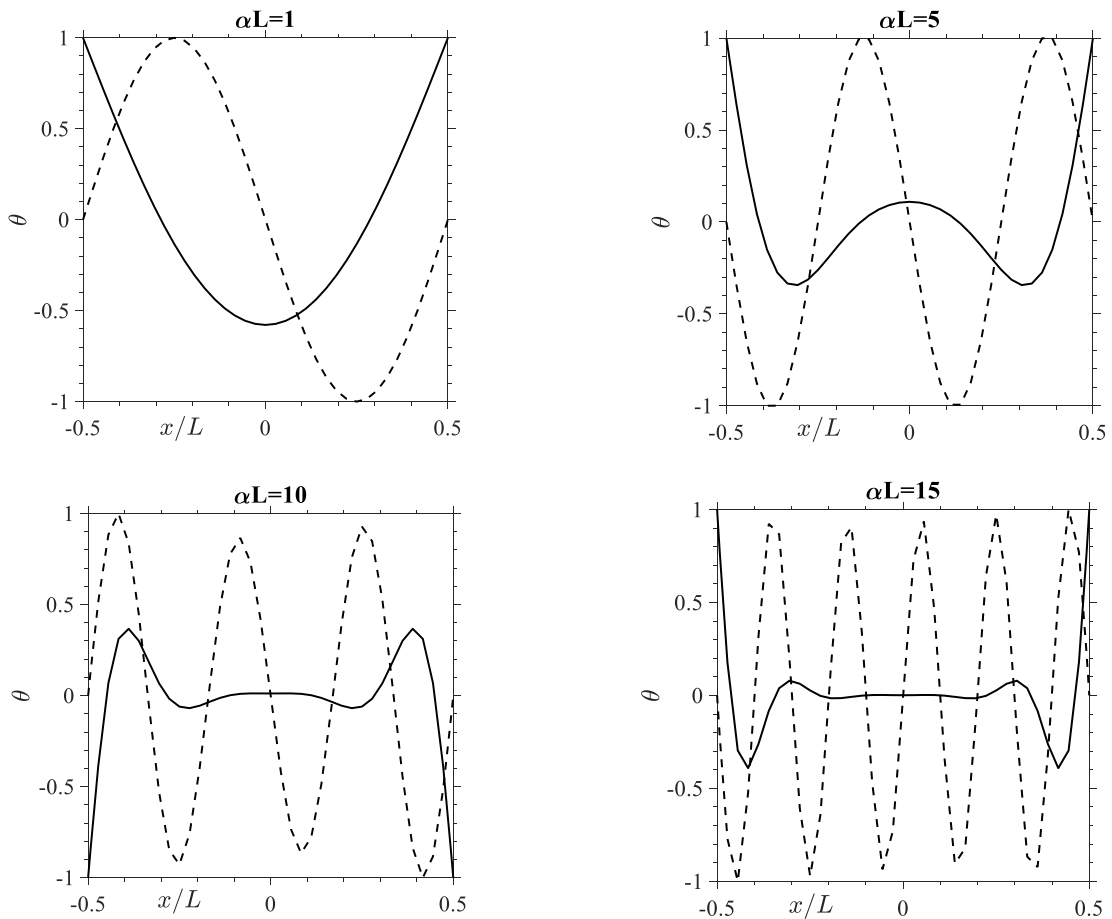


Fig. 3.2. Rotazioni torsionali relative alle prime due forme di instabilità di una trave con stessa rotazione torsionale agli estremi. Primo modo (linea continua), secondo modo (linea tratteggiata). $\alpha L = 1, 5, 10, 15$.

Nelle Fig. 3.2 e Fig. 3.3 sono riportate rispettivamente le rotazioni torsionali relative ai primi due modi di instabilità e le prime 4 forme modali tridimensionali per una trave con rapporto $L/b=20$. Per $\alpha L = 1$ si hanno i primi 4 modi sinusoidali, con numero di semionde all'aumentare del numero del modo. Per valori di αL maggiori è evidente una diversa successione delle forme di buckling pur rimanendo quasi invariata la prima, in particolare si nota uno scambio delle deformate modali in corrispondenza di $\alpha L = 5$ dove si vede che la quarta forma diventa la seconda, mentre la seconda e la terza diventano la decima e l'undicesima. Questa permutazione di forme di instabilità rappresenta il senso fisico dell'incrocio delle diverse curve riportate in Fig. 3.1.

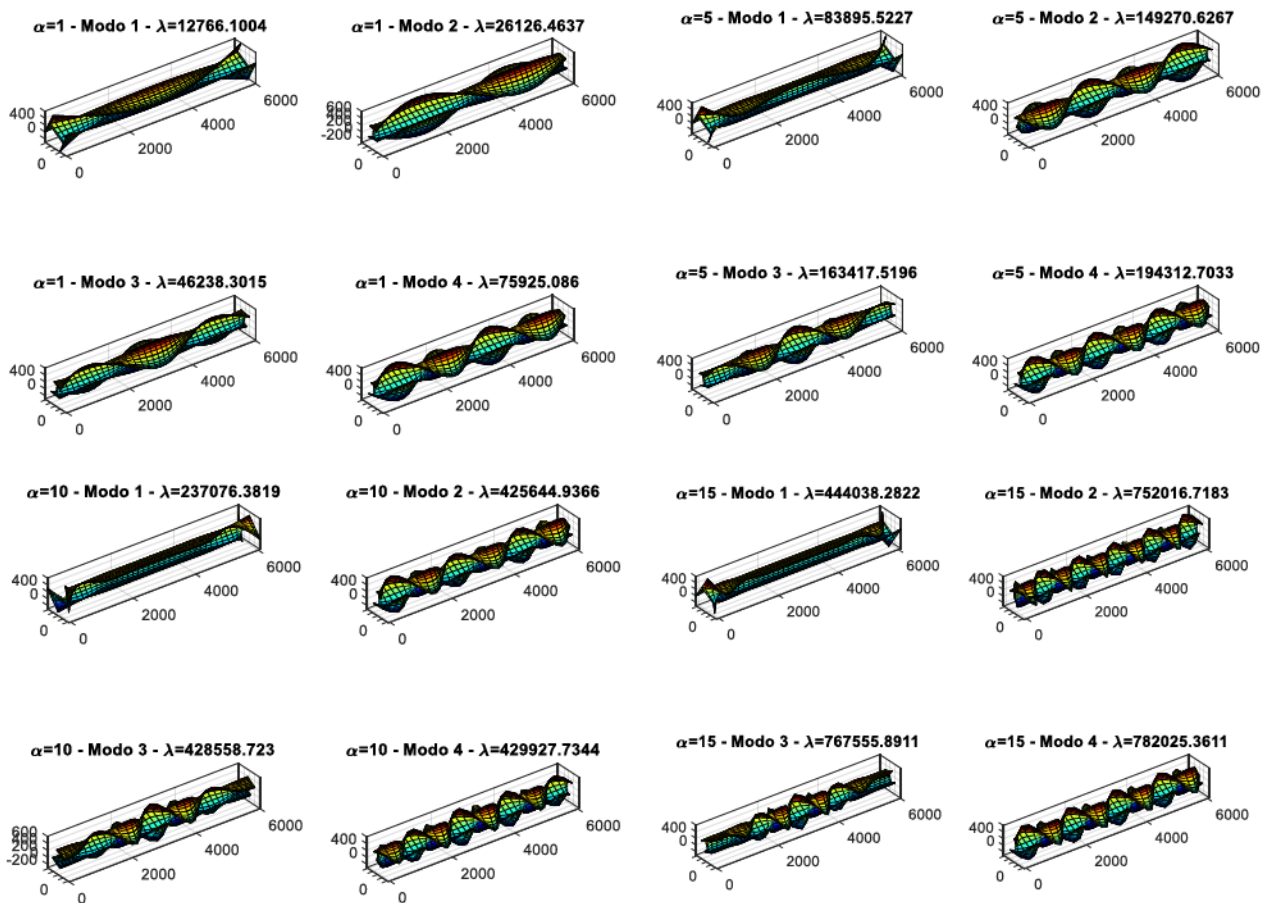


Fig. 3.3. Forme di instabilità di una trave con medesima rotazione torsionale agli estremi per $\alpha L = 1, 5, 10, 15$.

Vale la pena ricordare che il parametro αL è ottenuto dal rapporto tra la rigidezza flessionale della trave e del terreno e non è legato in nessun modo alla rigidezza torsionale della trave.

3.2.2 Instabilità torsionale di una trave su semispazio priva di vincoli alle estremità

Nel seguito si considera l'instabilità di una trave doppiamente simmetrica (HEB300; $\chi=L/b=20$), senza vincoli agli estremi, su suolo elastico. Nella Fig. 3.4, a si riporta l'andamento dei carichi critici adimensionali al variare della rigidezza del terreno. Per valori di rigidezza del suolo prossimi a 0 la trave si deforma rigidamente, facendo registrare il valore del primo moltiplicatore pari a 0. I primi due modi risultano essere staccati dagli altri, inoltre si notano diversi incroci tra le curve ed il valore del moltiplicatore aumenta all'aumentare della rigidezza αL . Nella Fig. 3.4, b sono riportati i rapporti $P_{cr}/[P_{cr,t}(\alpha L)^2]$ rispetto al parametro αL , i risultati numerici dei primi quattro modi non convergono ad un valore stabile, mentre per αL pari a 50 i primi 4 carichi critici valgono:

$$P_{ct,1} = P_{ct,2} = 0.102P_{cr,t}(\alpha L)^2 \tag{Eq. 3.4}$$

$$P_{ct,3} = P_{ct,4} = 0.129P_{cr,t}(\alpha L)^2 \tag{Eq. 3.5}$$

Il valore a cui tendono i primi due modi è lo stesso a cui tende, per $\alpha L = 50$, il primo modo nel caso con stessa rotazione torsionale agli estremi (Eq. 3.1), mentre il valore a cui tendono il terzo e quarto modo è lo stesso a cui tendono, per $\alpha L = 50$, il secondo e terzo modo nel caso con stessa rotazione torsionale agli estremi (Eq. 3.2).

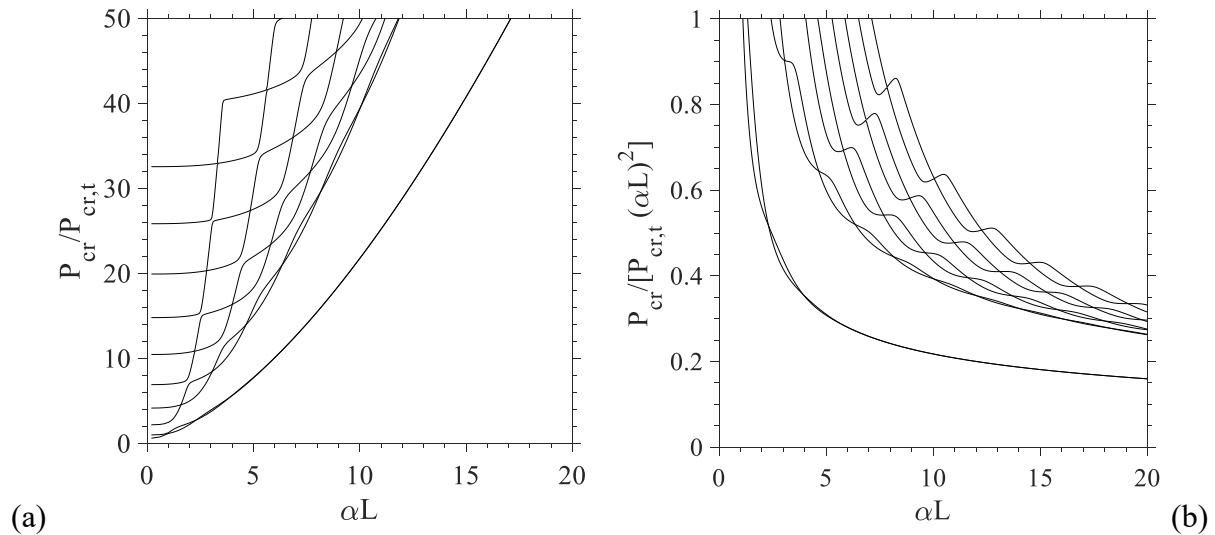


Fig. 3.4. Carichi critici torsionali adimensionalizzati al variare della rigidezza del terreno per una trave senza vincoli ($\chi=L/b=20$).

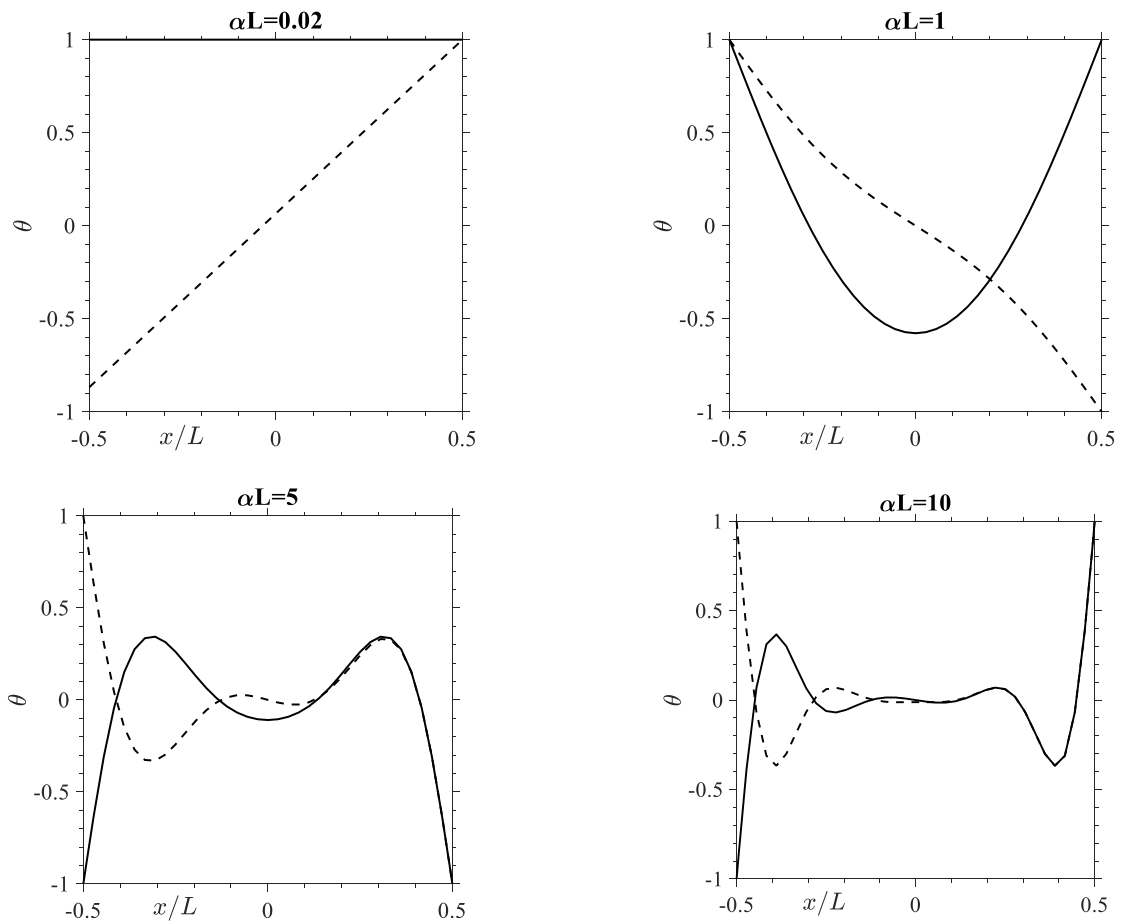


Fig. 3.5. Rotazioni torsionali relative alle prime due forme di instabilità di una trave senza vincoli. Primo modo (linea continua), secondo modo (linea tratteggiata). $\alpha L = 0.02, 1, 5, 10$.

Nelle Fig. 3.5 e Fig. 3.6 sono riportate rispettivamente le rotazioni torsionali relative ai primi due modi di instabilità e le prime 4 forme modali tridimensionali per una trave con rapporto $L/b=20$. Per $\alpha L=0.02$ il primo modo presenta un moltiplicatore prossimo a 0, corrispondente ad un moto rigido torsionale (la rotazione torsionale relativa al primo modo si presenta costante con valore unitario), mentre gli altri modi assumono una deformata con numero di semionde che aumentano all'aumentare del numero del modo.

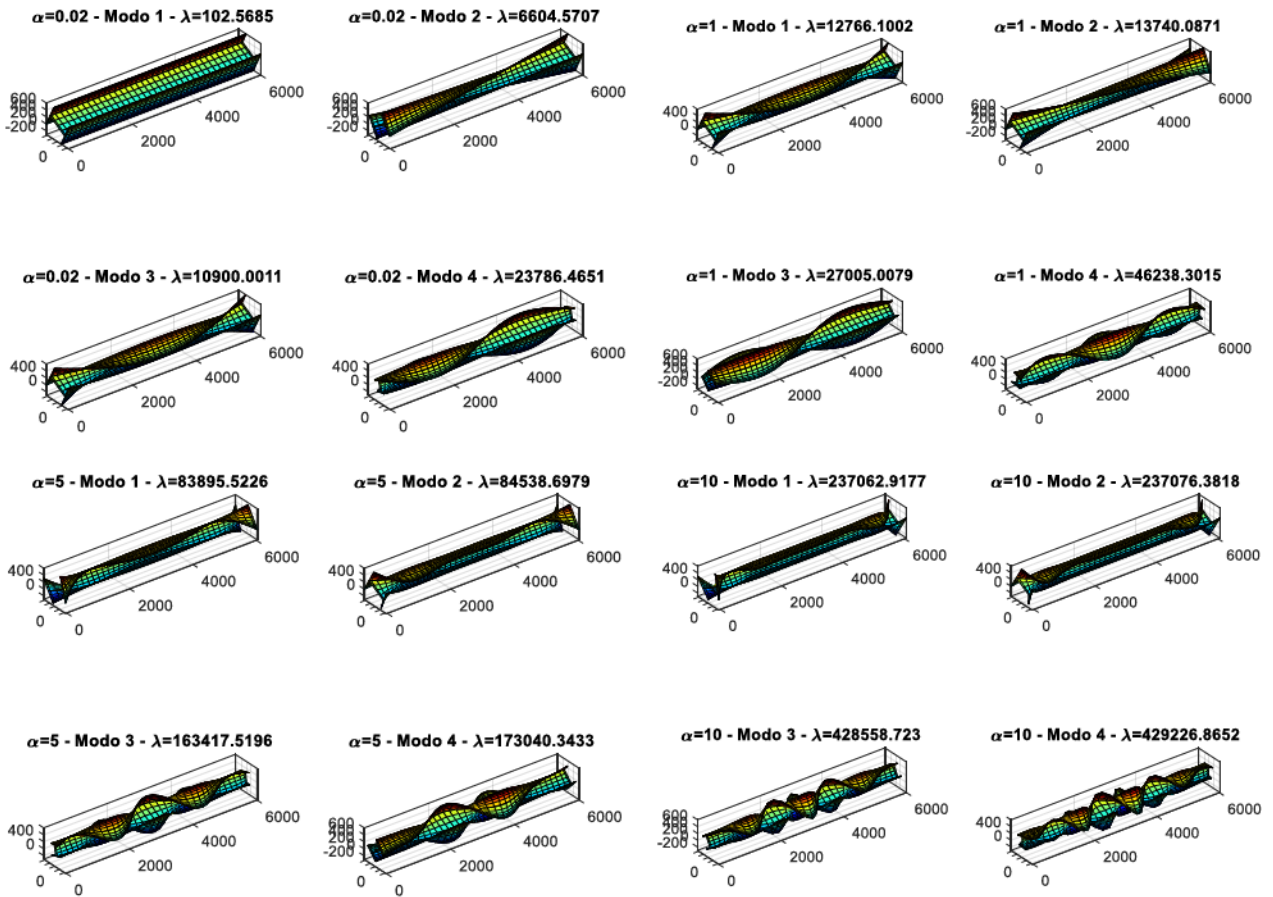


Fig. 3.6. Forme di instabilità di una trave senza vincoli agli estremi per $\alpha L = 0.02, 1, 5, 10$.

Vale la pena notare che il parametro αL è ottenuto dal rapporto tra la rigidezza flessionale della trave e del terreno e non è legato in nessun modo alla rigidezza torsionale della trave.

3.2.3 Confronto tra instabilità flessionale e torsionale

Nella presente sezione si vuole verificare quando l'instabilità torsionale anticipa quella flessionale, analizzando tre diversi rapporti di L/b . La trave modellata è una HEB300, posizionata su suolo senza alcun vincolo di estremità. Nelle Fig. 3.7 sono riportati gli andamenti dei carichi critici al variare della rigidezza del terreno. $L/b=10$ (a), $L/b=20$ (b), $L/b=30$ (c). In nero sono riportati i modi flessionali dedotti da Baraldi e Tullini (2021), in rosso quelli torsionali. Si nota che all'aumentare della lunghezza della trave aumenta il valore di αL nel quale avviene il cambio del primo modo da flessionale a torsionale. Il valore di intersezione dipende da L/b e dal rapporto tra la rigidezza flessionale e torsionale della trave. Per meglio evidenziare l'influenza del rapporto L/b in funzione della rigidezza αL , nella Fig. 3.8, sono riportati i grafici sovrapposti, si nota che per basse rigidezze i valori dei moltiplicatori sono poco influenzati da L/b , mentre all'aumentare della rigidezza la lunghezza della trave diventa molto influente. Fissata la rigidezza del terreno, all'aumentare di L/b aumenta il valore del carico critico flessionale e torsionale.

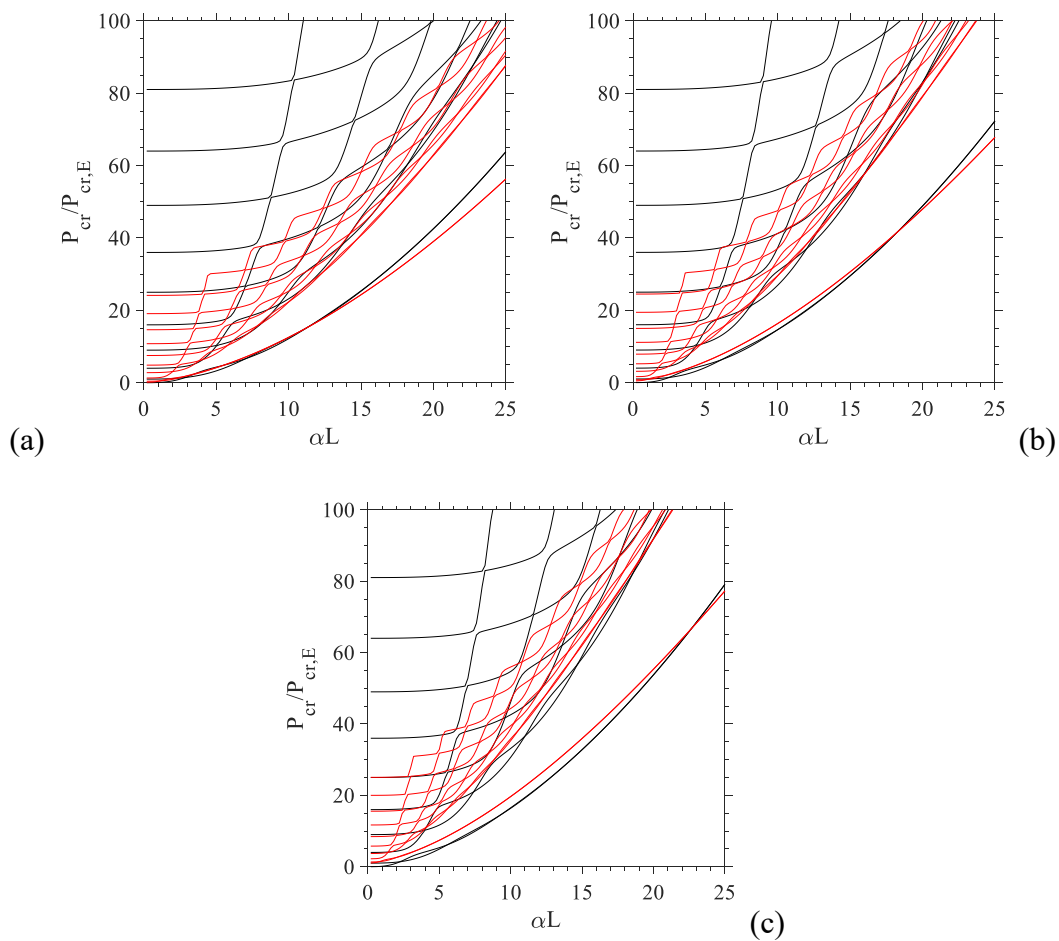


Fig. 3.7. Trave su suolo senza vincoli di estremità. Instabilità flessionale (nero), instabilità torsionale (rosso). $L/b=10$ (a), $L/b=20$ (b), $L/b=30$ (c)

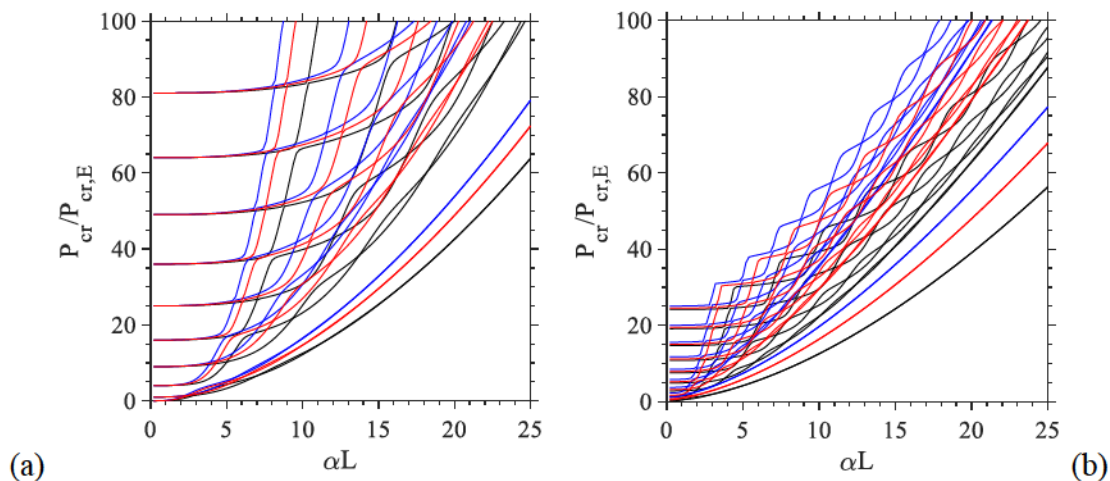


Fig. 3.8. Carico critico flessionale(a); Carico critico torsionale (b). $L/b=10$ (Nero), $L/b=20$ (Rosso), $L/b=30$ (blu)

Nelle Fig. 3.9 sono riportati i primi 4 modi per il caso $L/b=10$. Si nota che per valori di αL elevati i modi flessionali e torsionali risultano accoppiati e presentano praticamente lo stesso valore, superato il valore di $\alpha L=10$ il primo modo passa da flessionale a torsionale.

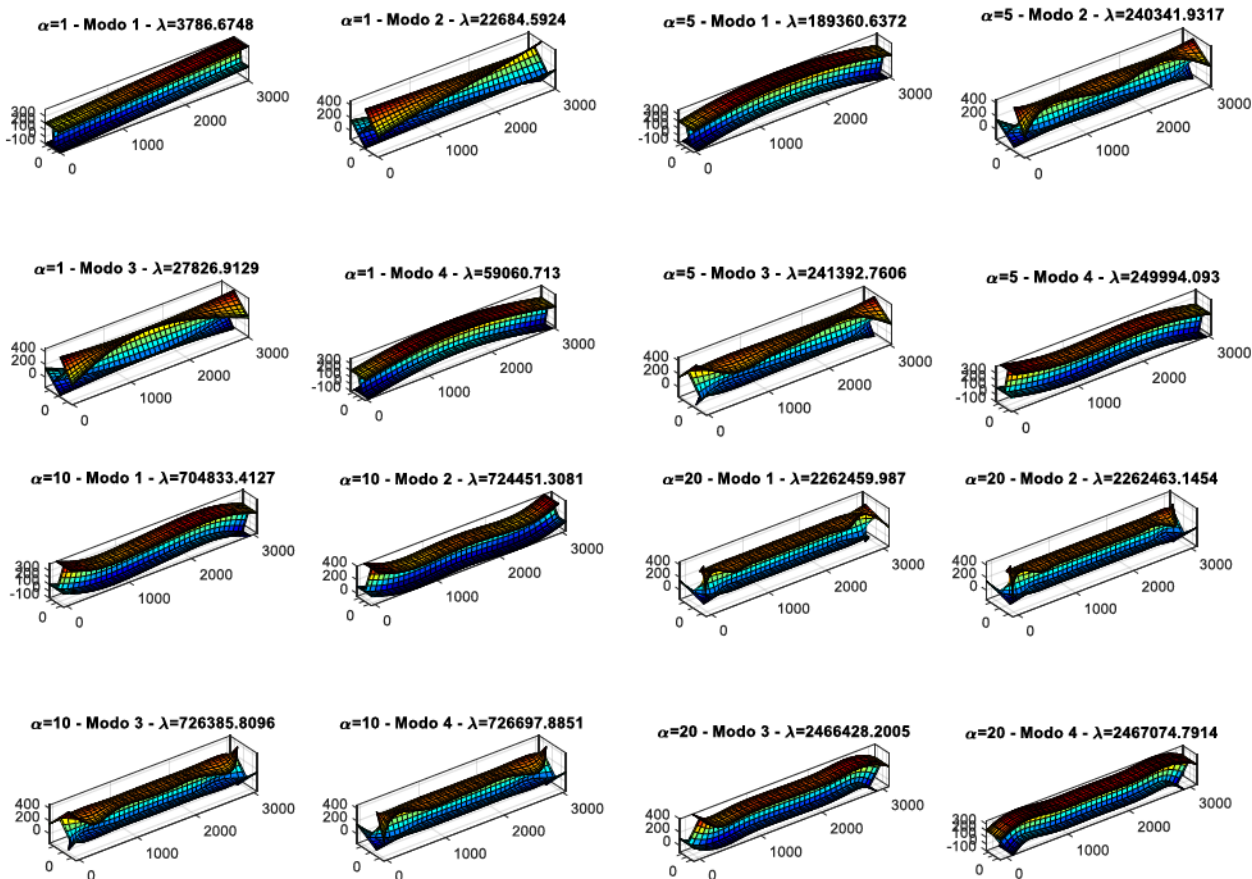


Fig. 3.9. Forme di instabilità di una trave senza vincoli agli estremi per $\alpha L = 1, 5, 10, 20$.

3.2.4 Confronto tra modelli FE-BIE e modelli FEM (carico di punta)

Nel presente capitolo è riportato il confronto, in termini di carico critico flessionale e torsionale, tra il modello FE-BIE e il modello FEM. Tale modello è stato realizzato con elementi plate per la trave, elementi brick per il suolo ed elementi link per il collegamento della fondazione all'interfaccia (Fig. 3.10). L'analisi è stata effettuata per una trave commerciale in acciaio HEB300 di lunghezza 6 m con rapporto $L/b=20$ posta su suolo senza vincoli agli estremi. Essendo la sezione doppiamente simmetrica è possibile analizzare separatamente il problema di instabilità flessionale e torsionale.

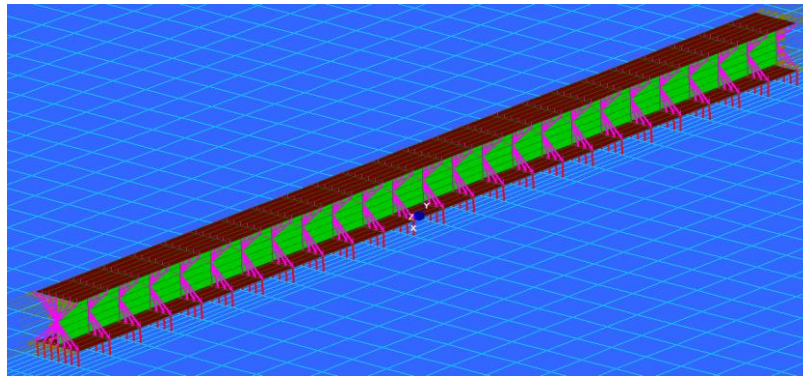


Fig. 3.10. Particolare del modello FEM *plate* su *brick*.

3.2.4.1 Carico critico flessionale

Il problema di instabilità flessionale è analizzato nella Fig. 3.11 dove è riportato in nero l'andamento dei moltiplicatori al variare della rigidezza del suolo, mentre i punti rossi rappresentano i valori dei primi due modi del modello FEM *plate* su *brick*. Si nota che il carico critico aumenta all'aumentare della rigidezza del suolo. I primi due carichi critici sono separati rispetto agli altri e presentano diversi punti di intersezione. Già da αL prossimo a 10 i primi due modi risultano avere valori molto simili tra loro. Per il modello FEM sono stati calcolati i primi due modi in corrispondenza di $\alpha L = 1, 5, 10$.

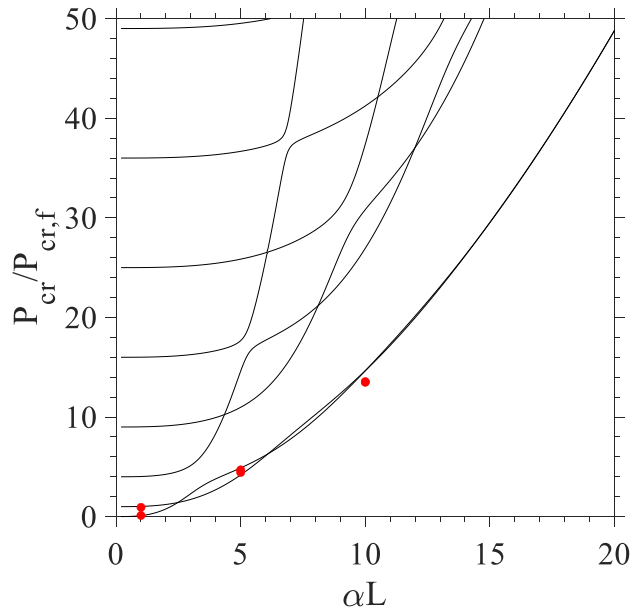


Fig. 3.11. Instabilità flessionale al variare della rigidezza del suolo con $L/b=20$ (linea nera). Primo e secondo modo FEM per 3 diversi valori di αL (Plate su Brick) (punti rossi).

Nelle Tab. 3-1 e Tab. 3-2 sono riportati i valori dei carichi con le differenze relative. Considerando il primo modo, per αL pari a 1 si presenta un errore del 20% dovuto alla presenza di un modo rigido, mentre per terreni più rigidi l'errore non supera l'8%. Per quanto riguarda il secondo modo, invece, le differenze relative non superano il 9%.

Primo carico critico flessionale [kN]			
αL	FE-BIE	FEM (Plate su Brick)	(FE-BIE-FEM)/FE-BIE
1	1433	1713	-20%
5	60675	64271	-6%
10	212267	195487	8%

Tab. 3-1. Valori dei carichi critici e differenze relative per il primo modo.

Secondo carico critico flessionale [kN]			
αL	FE-BIE	FEM (Plate su Brick)	(FE-BIE-FEM)/FE-BIE
1	14889	13484	9%
5	70869	67989	4%
10	212413	196405	8%

Tab. 3-2. Valori dei carichi critici e differenze relative per il secondo modo.

Nella Fig. 3.12 sono riportati i primi due modi flessionali per αL pari a 1, 5, 10.

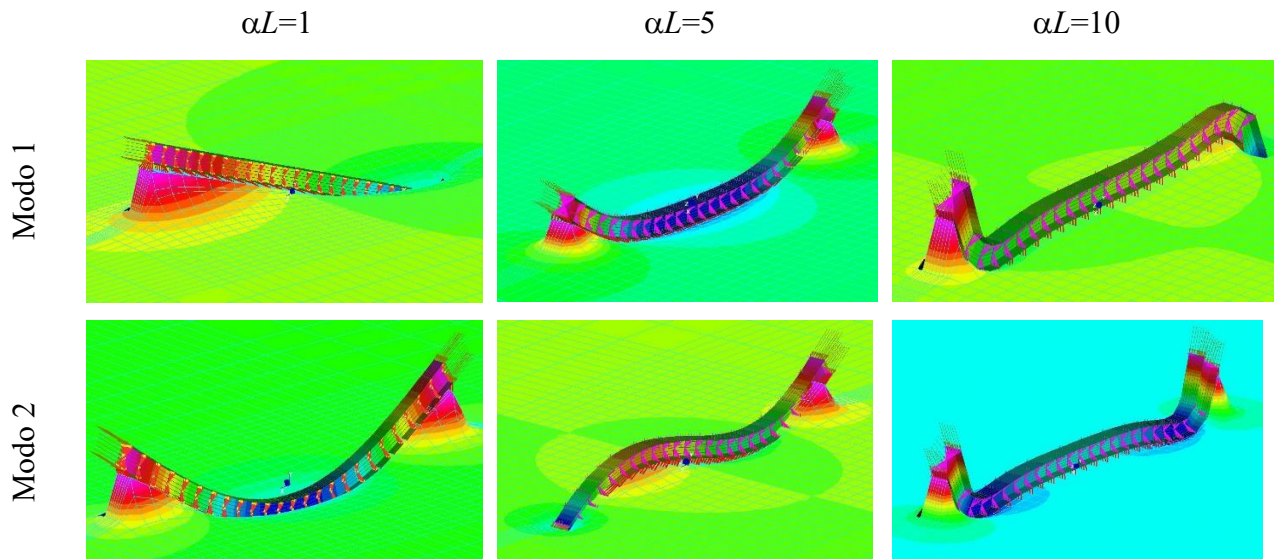


Fig. 3.12. Instabilità flessionale con $L/b=20$. Primo e secondo modo FEM per 3 diversi valori di αL (Plate su Brick).

3.2.4.2 Carico critico torsionale

Il problema di instabilità torsionale è analizzato nella Fig. 3.13 dove è riportato in nero l'andamento dei moltiplicatori al variare della rigidezza del suolo, mentre i punti rossi rappresentano i valori del primo modo del modello FEM plate su brick.. Si nota che il carico critico aumenta all'aumentare della rigidezza del suolo. I primi due carichi critici sono separati rispetto agli altri e presentano diversi punti di intersezione. Già da αL prossimo a 4 i primi due modi risultano avere valori praticamente coincidenti. Per il modello FEM è riportato il primo modo in corrispondenza di $\alpha L = 1, 5, 10$.

Nelle Tab. 3-3 sono riportati i valori dei carichi con le differenze relative. Considerando il primo modo, per αL pari a 1 e 5 si presenta un errore non superiore al 3. Mentre per terreni con $\alpha L=10$ l'errore si attesta intorno al 15%.

αL	Primo carico critico torsionale [kN]		
	FE-BIE	FEM (Plate su Brick)	(FE-BIE-FEM)/FE-BIE
1	13740	13193	-3%
5	83896	82915	2%
10	237063	201312	15%

Tab. 3-3. Valori dei carichi critici e differenze relative per il primo modo.

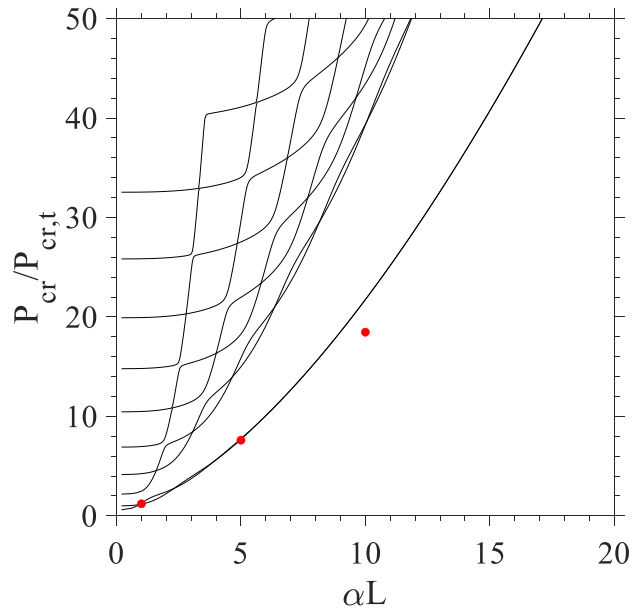


Fig. 3.13. Instabilità torsionale al variare della rigidezza del suolo con $L/b=20$ (linea nera). Primo modo FEM per 3 diversi valori di αL (Plate su Brick) (punti rossi).

Nella Fig. 3.14Fig. 3.12 sono riportati i primi due modi torsionali per αL pari a 1, 5, 10.

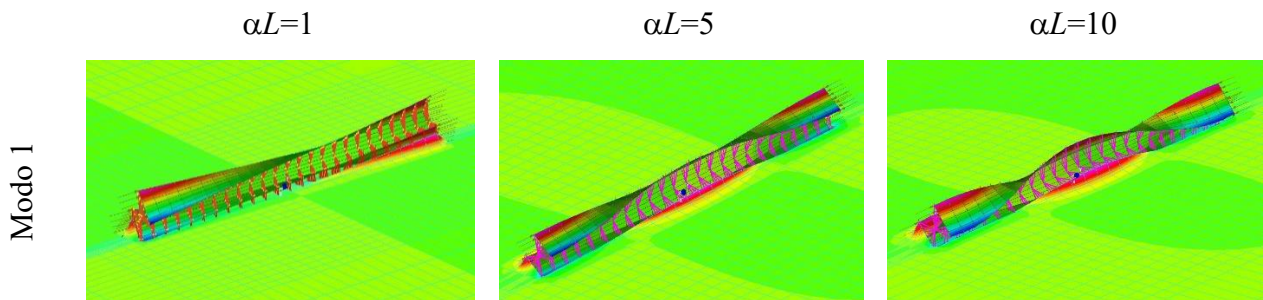


Fig. 3.14. Instabilità torsionale con $L/b=20$. Primo modo FEM per 3 diversi valori di αL (Plate su Brick).

3.2.5 Confronto dell'instabilità flessionale tra una trave appoggiata su suolo elastico e di Winkler

Nel presente capitolo è proposto il confronto dell'instabilità flessionale tra una trave appoggiata su suolo elastico e di Winkler, in quest'ultimo caso la costante k_s viene stimata facendo uso dell'equazione di Vesic 1961 (Eq. 3.7).

$$P_{cr} = \frac{\pi EI_y}{L^2} \left(n^2 + \frac{L^4 k_s}{n^2 \pi^4 EI_y} \right) \quad \text{Eq. 3.6}$$

$$k_s = \frac{0.65 E_s}{b(1-\nu_s^2)} \sqrt[12]{\frac{E_s b^4}{EI_y}} \quad \text{Eq. 3.7}$$

dove n rappresenta il numero del modo; b ed L rappresentano rispettivamente la base e la lunghezza della trave; E ed E_s rappresentano rispettivamente il modulo di Young della trave e del terreno; I_y rappresenta il momento di inerzia; k_s la rigidezza delle molle; ν_s è il coefficiente di Poisson del suolo.

Il modello FE-BIE è stato realizzato con appoggi modellati con approccio penalty, imponendo agli estremi lo stesso spostamento verticale (Eq. 3.8).

$$w_1 - w_{end} = 0 \quad \text{Eq. 3.8}$$

Che porta al seguente sistema da assemblare nel sistema di riferimento globale:

$$k_{penalty} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_{end} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad k_{penalty} = 1E + 10 \quad \text{Eq. 3.9}$$

Nella Fig. 3.15 sono riportati gli andamenti dei primi 10 carichi critici al variare della rigidezza del suolo. In nero sono riportati i moltiplicatori relativi al modello FE-BIE, mentre in rosso i moltiplicatori ottenuti direttamente dall'equazione di Timoshenko-Gere. Si nota che per valori bassi di αL i carichi critici del modello FE-BIE coincidono con quelli ottenuti con la soluzione analitica. All'aumentare della rigidezza del suolo si perde tale corrispondenza, in particolare la soluzione analitica sovrastima il valore dei moltiplicatori per $\alpha L > 2$.

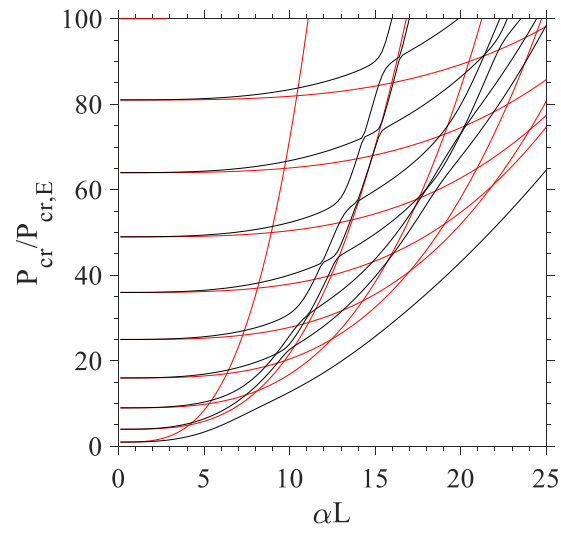


Fig. 3.15. Buckling flessionale FE-BIE(nero) Winkler (rosso).

3.2.6 Confronto dell'instabilità torsionale per una trave appoggiata su suolo elastico e di Winkler

Nel presente capitolo è proposto il confronto del buckling torsionale tra una trave appoggiata su suolo elastico e di Winkler, in quest'ultimo caso la costante k_ϕ delle molle rotazionali viene stimata facendo uso dell' Eq. 3.7 e tenendo conto del fatto che le molle sono posizionate sotto la flangia inferiore, e non nel baricentro. Nella Fig. 3.16,a è riportato lo schema adottato da Timoshenko e Gere, mentre nella Fig. 3.16,b è riportata la configurazione modificata che permette di calcolare k_ϕ considerando delle molle verticali sotto l'ala inferiore.

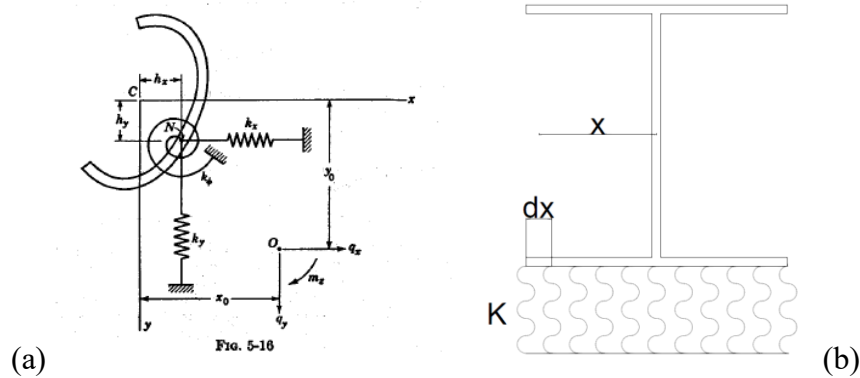


Fig. 3.16. Schema utilizzato da Timoshenko per il calcolo del carico critico torsionale (figura tratta da Timoshenko-Gere) (a), schema utilizzato per considerare le molle nella flangia inferiore (b)

Partendo dall'equazione della linea elastica torsionale (Eq. 3.10)

$$EI_\omega \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ_t \frac{d^2 \phi}{dz^2} - m_z = 0 \quad \text{Eq. 3.10}$$

con

$$dm_z = -(\sigma t ds)(y_0 - y) \left[\frac{d^2 u}{dz^2} + (y_0 - y) \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right] + (\sigma t ds)(x_0 - x) \left[\frac{d^2 w}{dz^2} + (x_0 - x) \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right] + k_s dx [w - (x_0 - x)\phi] (x_0 - x) \quad \text{Eq. 3.11}$$

$y_0 = x_0 = 0$ per sezioni doppiamente simmetriche

ricordando che:

$$\sigma \int_A t ds = P; \int_A x t ds = \int_A y t ds = 0; \int_A y^2 t ds = I_x; \int_A x^2 t ds = I_y \quad \text{Eq. 3.12}$$

Si ottiene:

$$m_z = \int_A m_z = -\sigma I_x \frac{d^2\phi}{dz^2} + -\sigma I_y \frac{d^2\phi}{dz^2} + \int_{-b/2}^{+b/2} k_s wx dx - \int_{-b/2}^{+b/2} k_s x^2 \phi dx = -\sigma I_0 \frac{d^2\phi}{dz^2} - \frac{k_s b^3}{12} \phi \quad \text{Eq. 3.13}$$

Considerando la funzione ϕ (Eq. 3.14) (e le sue derivate) relativa al caso di trave con appoggi torsionali e sostituendola insieme a m_z nella (Eq. 3.10) si ottiene il carico critico torsionale considerando le molle poste nella flangia inferiore (Eq. 3.16).

$$\phi = A \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad \text{Eq. 3.14}$$

$$EI_\omega A_3 \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + GJ_t A_3 \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{PI_0}{A} A_3 \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{k_s b^3}{12} A_3 \text{sen}\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = 0 \quad \text{Eq. 3.15}$$

$$P_{cr} = \left[EI_\omega \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + GJ_t + k_\phi \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \right] \frac{A}{I_0}; \quad \text{con } k_\phi = \frac{k_s b^3}{12} \quad \text{Eq. 3.16}$$

Il modello FE-BIE di confronto è stato realizzato con appoggi torsionali agli estremi, modellati con approccio penalty, imponendo la stessa rotazione torsionale.

$$\theta_1 - \theta_{end} = 0 \quad \text{Eq. 3.17}$$

che porta al seguente sistema da assemblare nel sistema di riferimento globale:

$$k_{penalty} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_{end} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad k_{penalty} = 1E+13 \quad \text{Eq. 3.18}$$

Nella Fig. 3.17 sono riportati gli andamenti dei primi 10 carichi critici al variare della rigidezza del suolo. In nero sono riportati i moltiplicatori relativi al modello FE-BIE, mentre in rosso i moltiplicatori ottenuti con il modello di Winkler. Si nota che per valori bassi di αL i carichi critici del modello FE-BIE coincidono con quelli ottenuti con la soluzione analitica. All'aumentare della rigidezza del suolo si perde tale corrispondenza, in particolare si nota il discostamento in corrispondenza di $\alpha L > 2$. Il modello di Winkler sottostima notevolmente il carico critico.

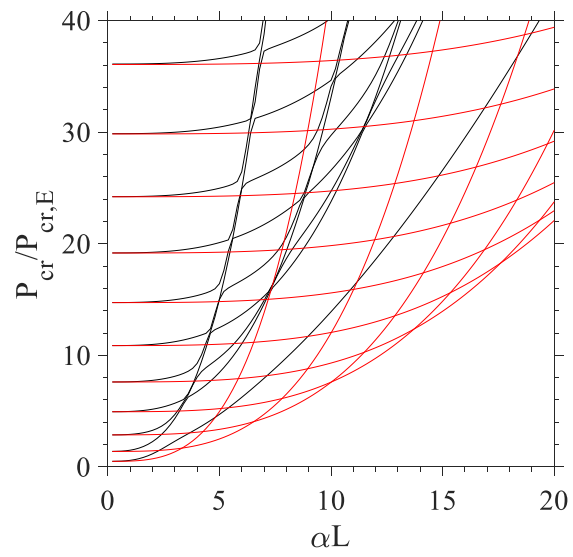


Fig. 3.17. Carico critico torsionale (vincoli appoggi torsionali agli estremi). Modello FE-BIE (Nero); Winkler (Rosso).

3.3 Instabilità flessio-torsionale di travi su semispazio

3.3.1 Instabilità flessio-torsionale per una trave con coppie concentrate agli estremi e vincoli laterali

Il primo esempio di lateral buckling che si riporta riguarda una trave su suolo caricata da coppie flettenti all'estremità e vincoli laterali che impongono lo stesso spostamento orizzontale ai bordi. La trave scelta per l'esempio è una HEB300 con rapporto $L/b=10$. Il vincolo è applicato con approccio penalty ed è governato dall'equazione $v_l - v_{end} = 0$ che porta all'assemblaggio nella matrice \mathbf{K} globale della seguente sottomatrice:

$$k_{penalty} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_l \\ v_{end} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 3.19}$$

Dove v_l e v_{end} sono i gradi di libertà iniziali e finali relativi allo spostamento laterale, $k_{penalty} = 10^6 E_b I_y / L^3$.

Nel modello si è tenuto conto dell'effetto instabilizzante del momento flettente, del taglio e delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore. Tali reazioni vengono mediate e considerate carico di linea. Inoltre, si è tenuto conto dei termini del secondo ordine che nascono dall'aver le reazioni sotto la flangia inferiore e la cinematica della trave descritta con riferimento al baricentro (Barsoum Gallagher 1970). Nel seguito verranno presentati i risultati in termini di momento critico adimensionalizzato con il valore $M_{cr,E}$ (Eq. 1.137).

Nella Fig. 3.19,a sono riportati i valori dei momenti critici adimensionalizzati in modulo, mentre nella Fig. 3.19,b è stato mantenuto il segno. In nero sono riportati i valori relativi al momento negativo (reazioni sotto l'ala inferiore dirette verso l'alto), in rosso quelli relativi al momento positivo (reazioni sotto l'ala inferiore dirette verso il basso), mentre in blu i valori che si ottengono considerando le reazioni nel baricentro (caso ideale, utile per capire meglio l'effetto della posizione delle reazioni). Si nota che il momento critico aumenta all'aumentare della rigidezza del suolo, inoltre, la curva del momento critico negativo, per i primi modi, risulta essere sempre minore di quella con momento positivo e la curva ottenuta con le reazioni nel baricentro è equidistante dalle due. La curva con reazioni nel baricentro è stata introdotta per mostrare il diverso contributo delle stesse all'instabilità laterale, il loro apporto è notevole e dipende dalla loro posizione e dal loro verso. Nella Fig. 3.18 e nella Tab. 3-4 è riportato, schematicamente, il contributo delle reazioni in funzione della posizione e del verso.

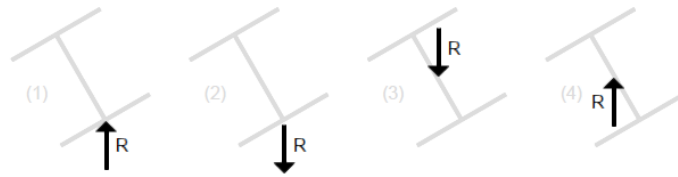


Fig. 3.18. Posizione della reazione del terreno

Configurazione	Contributo delle reazioni	Curva
(1)	Instabilizzante	Nera
(2)	Stabilizzante	Rossa
(3)	Neutro	Blu
(4)	Neutro	Blu

Tab. 3-4. Posizione della reazione del terreno con indicazione sul contributo sulle reazioni.

Le configurazioni (3) e (4) portano a coppie di momenti con lo stesso modulo ma di segno opposto e corrispondono alle curve blu (momento positivo e negativo), la configurazione (1) è considerata sfavorevole e corrisponde alle curve nere (momento negativo), mentre la configurazione (2) è considerata favorevole e corrisponde alle curve rosse (momento negativo).

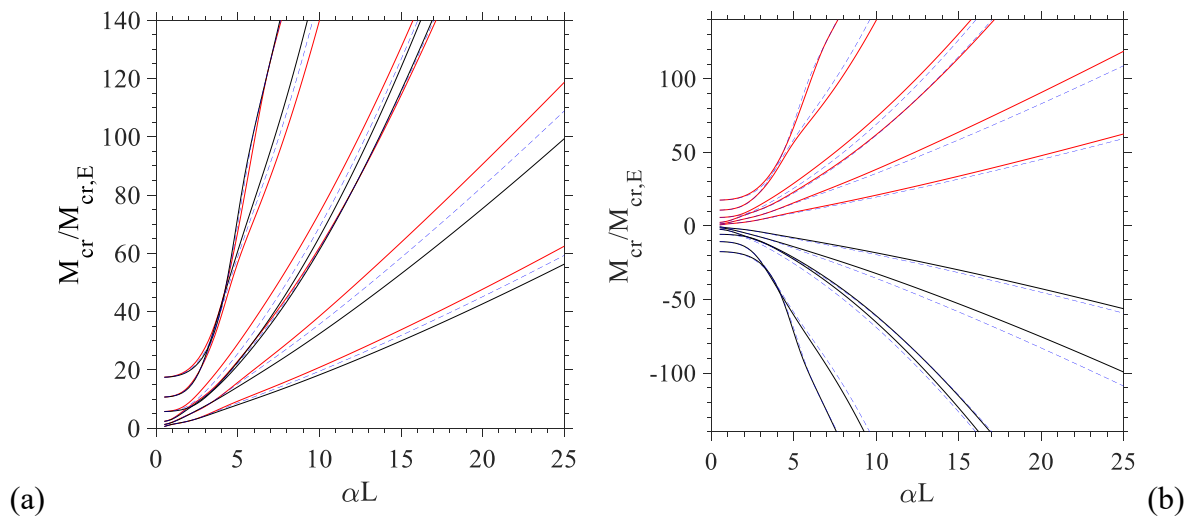


Fig. 3.19. Lateral buckling con coppie flettenti agli estremi, vincoli laterali agli estremi e $L/b=10$. Modulo del Momento critico al variare della rigidezza del suolo (a), Momento critico con segno al variare della rigidezza del suolo (b). Momento critico relativo a momento positivo (Rosso), Momento critico relativo a momento negativo (Nero), Momento critico considerando le reazioni nel baricentro (Blu tratteggiato)

Nelle Fig. 3.20 sono riportati i diagrammi, calcolati per quattro valori di αL , utilizzati per costruire la matrice geometrica \mathbf{K}_g : momento flettente (a), taglio (b), reazioni mediate e riportate come carico di linea (c).

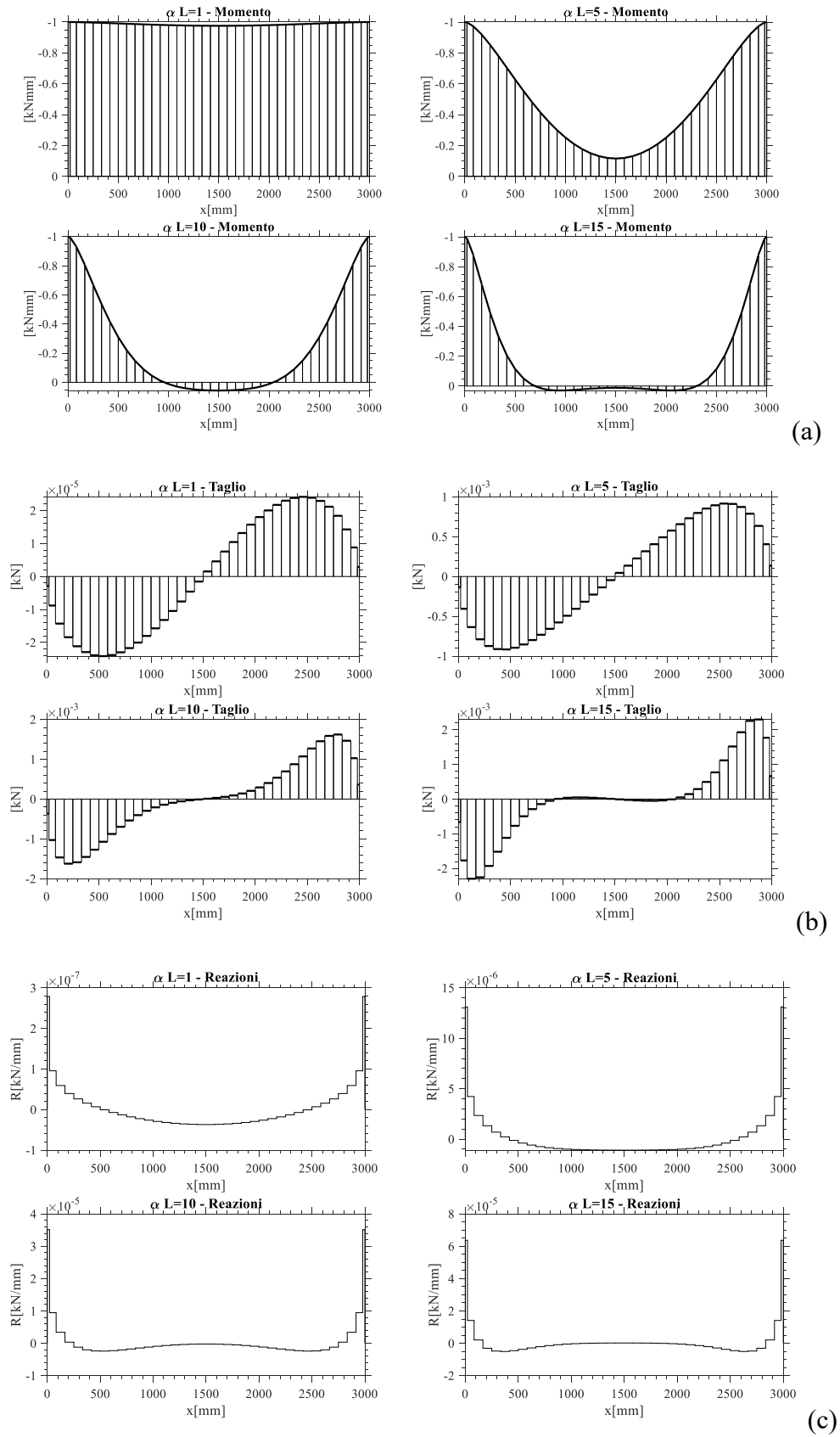


Fig. 3.20. Trave con due coppie unitarie applicate agli estremi su suolo. Andamento del momento flettente (a), del taglio (b), delle reazioni (c) per quattro valori di rigidezza del suolo $\alpha L= 1; 5; 10; 15$.

3.3.2 Instabilità flessione-torsionale per una trave con coppia concentrata ad un estremo in presenza di vincoli laterali

Un altro esempio di lateral buckling è quello che riguarda una trave su suolo caricata da una coppia flettente all'estremità sinistra e vincoli laterali che impongono lo stesso spostamento orizzontale ai bordi. La trave scelta per l'esempio è una HEB300 con rapporto $L/b=20$. Il vincolo è applicato con approccio penalty ed è governato dall'equazione $v_l - v_{end} = 0$ che porta all'assemblaggio nella matrice \mathbf{K} globale della matrice riportata nell'Eq. 3.19. Nel modello si è tenuto conto dell'effetto instabilizzante del momento flettente, del taglio e delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore. Tali reazioni vengono mediate e considerate carico di linea. Inoltre, si è tenuto conto dei termini del secondo ordine che nascono dall'avere le reazioni sotto la flangia inferiore e la cinematica della trave descritta con riferimento al baricentro (Barsoum Gallagher 1970). Nel seguito verranno presentati i risultati in termini di momento critico adimensionalizzato con il valore $M_{cr,E}$ (Eq. 1.137).

Nella Fig. 3.21 sono riportati i valori dei momenti critici adimensionalizzati in modulo, sono presenti i primi 7 modi positivi ed i primi 7 negativi. In nero sono riportati i valori relativi al momento negativo (reazioni sotto l'ala inferiore dirette verso l'alto), in rosso quelli relativi al momento positivo (reazioni sotto l'ala inferiore dirette verso il basso). Si nota che il momento critico aumenta all'aumentare della rigidezza del suolo, inoltre, la curva del momento critico negativo, per il primo modo, risulta essere sempre minore di quella con momento positivo e le loro differenze aumentano all'aumentare della rigidezza del suolo. Nel secondo modo si nota un'intersezione, tra la curva di momento negativo e positivo per valori di αL pari circa a 20, mentre i modi successivi presentano punti di intersezione per valori di αL bassi e successivamente il moltiplicatore più piccolo risulta sempre quello relativo al momento positivo. La presenza di questi scambi può essere giustificata osservando l'andamento delle sollecitazioni e delle reazioni riportate in Fig. 3.23, infatti, si può notare come queste, all'aumentare della rigidezza, vadano ad impegnare un segmento di trave sempre minore portando ad effetti instabilizzanti che agiscono in posizioni diverse. Nelle Fig. 3.22 sono riportate le deformate dei primi 8 modi con i relativi moltiplicatori per valori di αL pari a 1, 10.

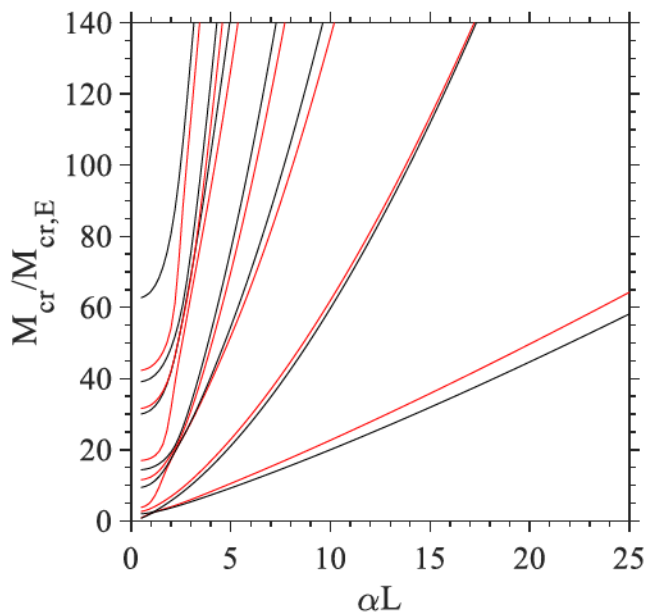


Fig. 3.21. Lateral buckling con coppia flettente all'estremo sinistro, vincoli laterali agli estremi e $L/b=20$. Modulo del Momento critico al variare della rigidità del suolo. Momento critico relativo a momento positivo (Rosso), Momento critico relativo a momento negativo (Nero).

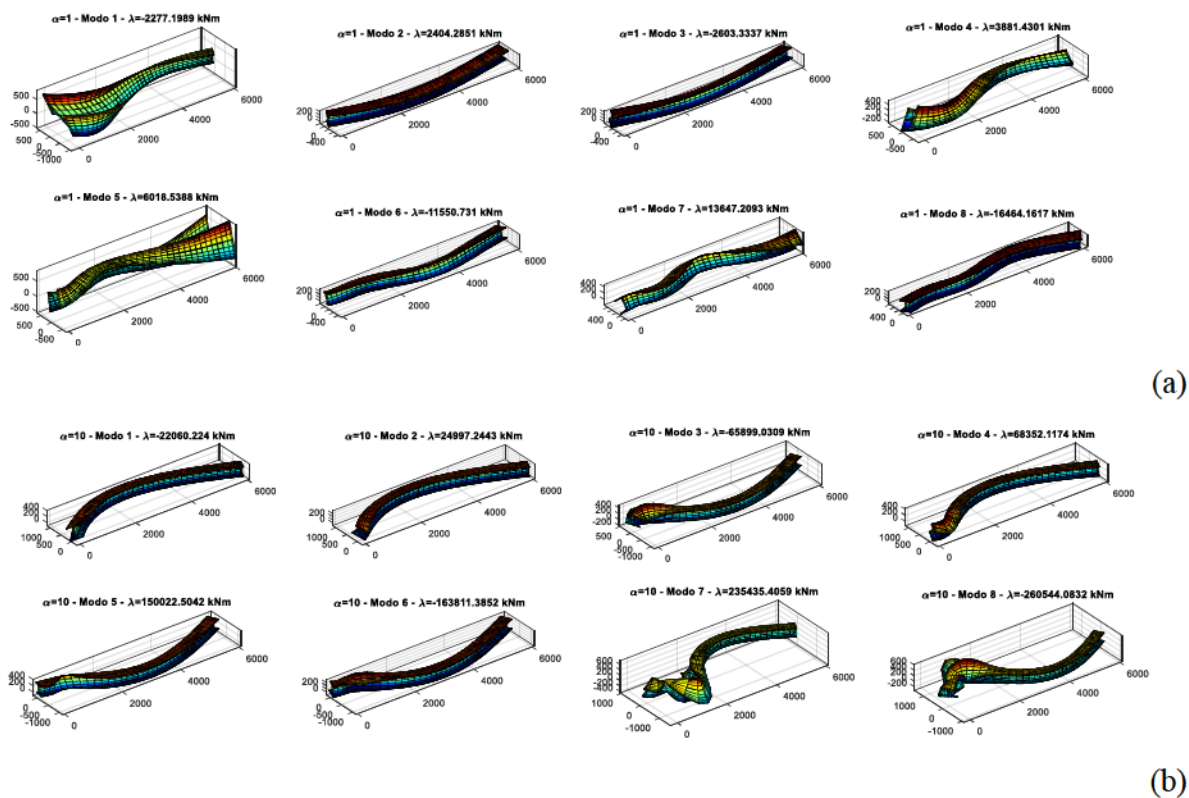


Fig. 3.22. Primi 8 modi di lateral buckling per trave su suolo con momento all'estremità di sinistra. $\alpha L=1$ (a), $\alpha L=10$ (b) (Le deformate presentano scala di deformazione diverse).

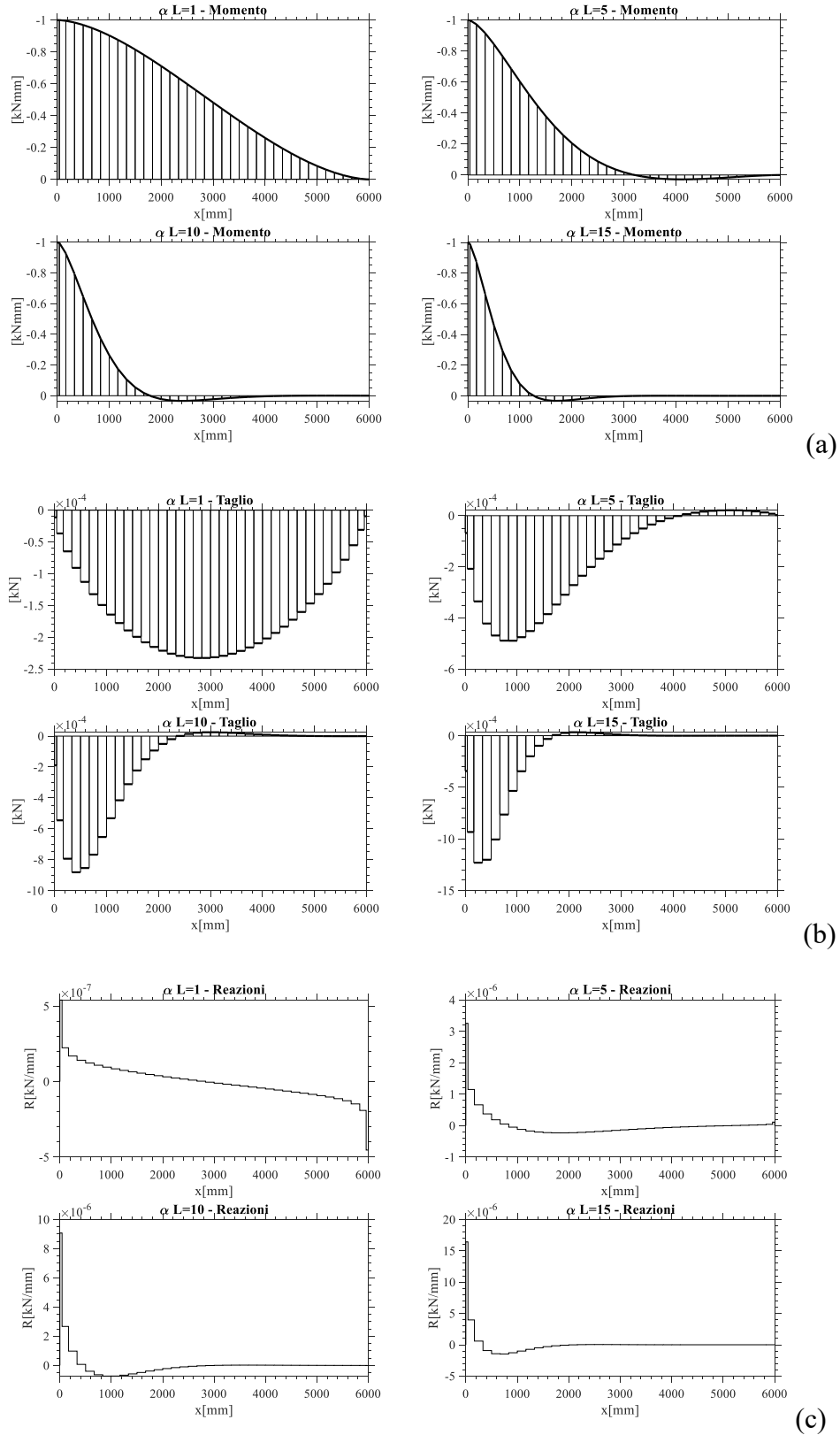


Fig. 3.23. Trave con coppia unitaria applicata all'estremo sinistro su suolo. Andamento del momento flettente (a), del taglio (b), delle reazioni (c) per quattro valori di rigidezza del suolo $\alpha L=1;5; 10; 15$.

3.3.3 Instabilità flessio-torsionale per una trave con coppia concentrata al centro in presenza di vincoli laterali

Un altro esempio di lateral buckling è quello che riguarda una trave su suolo caricata da una coppia flettente in mezzzeria e vincoli laterali che impongono lo stesso spostamento orizzontale ai bordi. La trave scelta per l'esempio è una HEB300 con rapporto $L/b=20$. Il vincolo è applicato con approccio penalty ed è governato dall'equazione $v_l - v_{end} = 0$ che porta all'assemblaggio nella matrice \mathbf{K} globale della matrice riportata nell'Eq. 3.19.

Nel modello si è tenuto conto dell'effetto instabilizzante del momento flettente, del taglio e delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore. Tali reazioni vengono mediate e considerate carico di linea. Inoltre, si è tenuto conto dei termini del secondo ordine che nascono dall'avere le reazioni sotto la flangia inferiore e la cinematica della trave descritta con riferimento al baricentro (Barsoum Gallagher 1970). Nel seguito verranno presentati i risultati in termini di momento critico adimensionalizzato con il valore $M_{cr,E}$ (Eq. 1.137). Nella Fig. 3.25 sono riportati i valori dei momenti critici adimensionalizzati in modulo, sono presenti i primi 7 modi positivi ed i primi 7 negativi. In nero sono riportati i valori relativi al momento negativo (reazioni sotto l'ala inferiore dirette verso l'alto), in rosso quelli relativi al momento positivo (reazioni sotto l'ala inferiore dirette verso il basso). Si nota che il momento critico aumenta all'aumentare della rigidezza del suolo, inoltre, le curve relative al momento positivo e negativo per i diversi modi sono molto vicine tra loro e presentano intersezioni per valori di rigidezza relativa pari circa a 5. Essendo il problema completamente simmetrico in termini di sollecitazioni e reazioni (Fig. 3.27), ci si aspetterebbe di vedere le curve relative a momento positivo e negativo sovrapposte, tuttavia ciò non accade e questo è giustificato dal fatto che le reazioni, essendo assimilate a carichi di linea, possono avere contributo instabilizzante o stabilizzante, a seconda del loro verso Fig. 3.24.

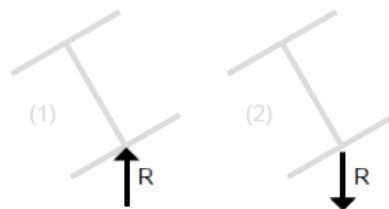


Fig. 3.24. Posizione della reazione del terreno.

Configurazione	Contributo delle reazioni
(1)	Instabilizzante
(2)	Stabilizzante

Tab. 3-5. Posizione della reazione del terreno con indicazione sul contributo delle reazioni.

Nelle Fig. 3.26 sono riportate le deformate dei primi 8 modi per valori di αL pari a 1 e 10.

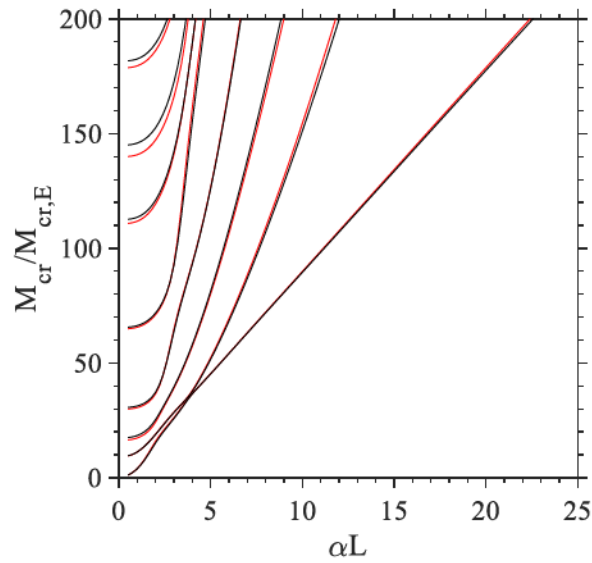


Fig. 3.25. Lateral buckling con coppia flettente in mezzeria, vincoli laterali agli estremi e $L/b=20$. Modulo del Momento critico al variare della rigidità del suolo. Momento critico relativo a momento positivo (Rosso), Momento critico relativo a momento negativo (Nero).

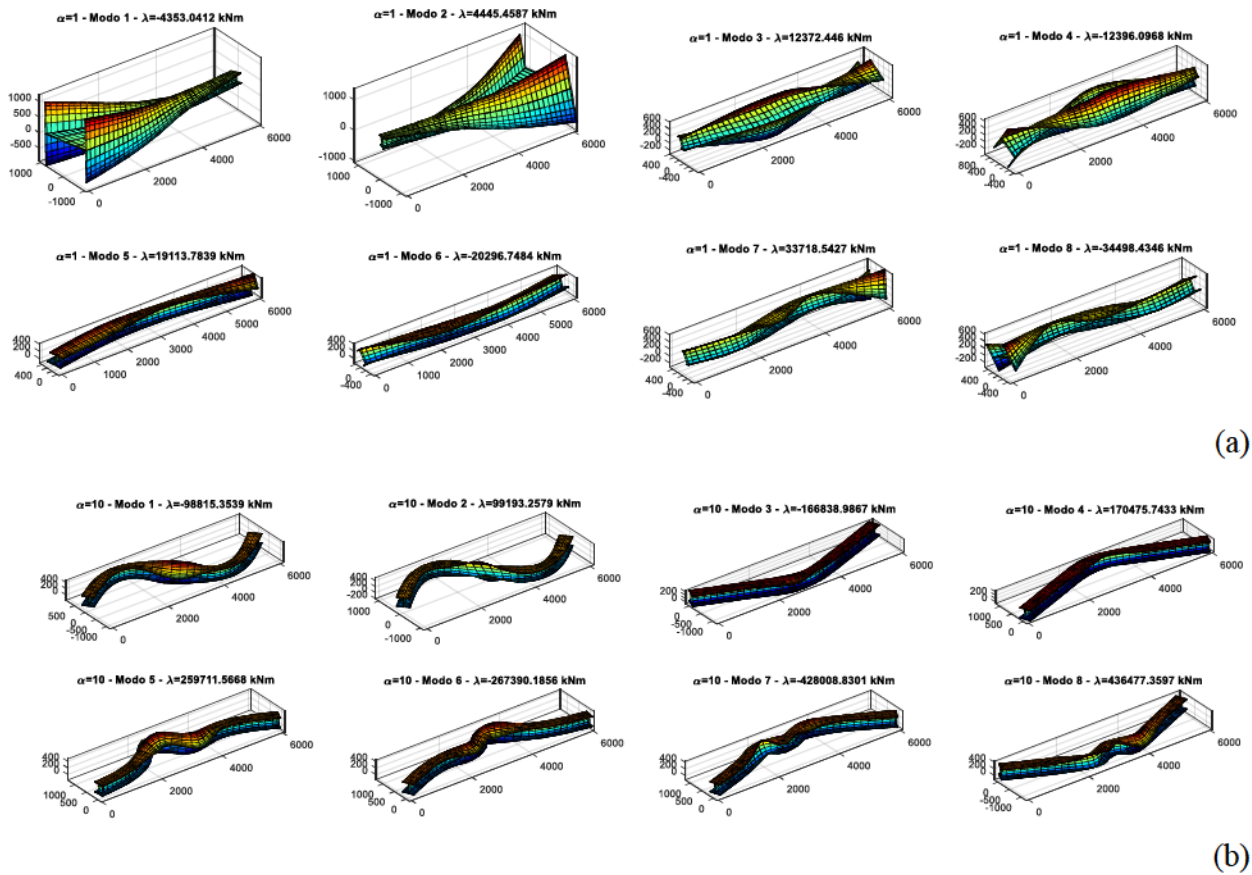


Fig. 3.26. Primi 8 modi di lateral buckling per trave su suolo con momento in mezzeria. $\alpha L=1$ (a), $\alpha L=10$ (b). (Le deformate presentano scala di deformazione diverse).

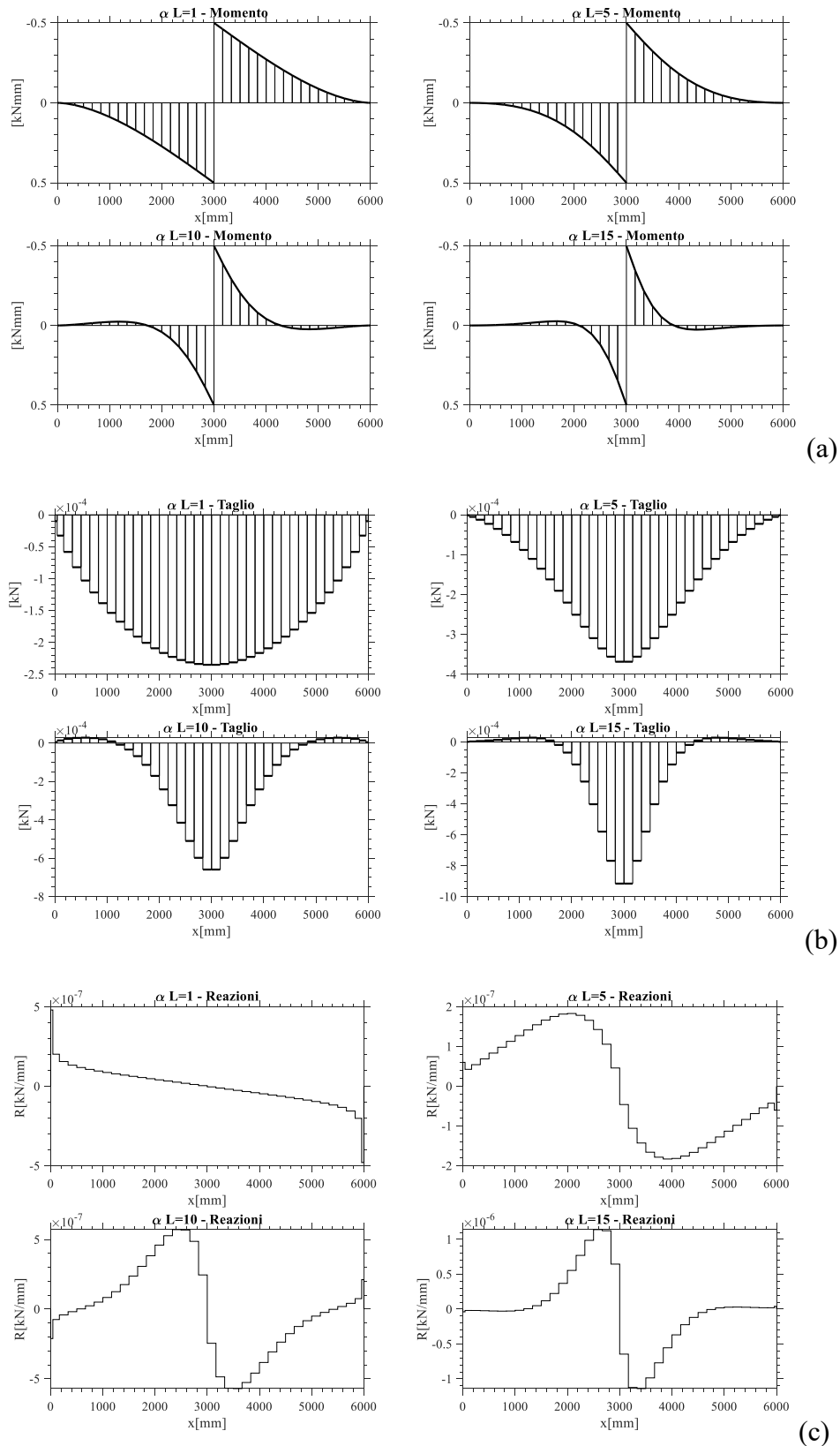


Fig. 3.27. Trave con coppia in mezzeria su suolo. Andamento del momento flettente (a), del taglio (b), delle reazioni (c) per quattro valori di rigidezza del suolo $\alpha L=1;5; 10; 15$.

3.3.4 Instabilità flesso-torsionale per una trave con coppie concentrate agli estremi priva di vincoli laterali

Il secondo esempio di lateral buckling che si riporta riguarda una trave su suolo caricata da coppie flettenti all'estremità e senza vincoli laterali. La trave scelta per l'esempio è una HEB300 con rapporto $L/b=10$. Nel modello si è tenuto conto dell'effetto instabilizzante del momento flettente, del taglio e delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore. Tali reazioni vengono mediate e considerate carico di linea. Inoltre, si è tenuto conto dei termini del secondo ordine che nascono dall'aver le reazioni sotto la flangia inferiore e la cinematica della trave descritta con riferimento al baricentro (Barsoum Gallagher 1970). Nel seguito verranno presentati i risultati in termini di momento critico adimensionalizzato con il valore $M_{cr,E}$ (Eq. 1.137), che rappresenta la sollecitazione di instabilità per una trave con momento costante e appoggi agli estremi. Nella Fig. 3.28 sono riportati i valori dei momenti critici adimensionalizzati in modulo. In nero sono riportati i valori relativi a momento negativo, in rosso quelli relativi a momento positivo, mentre in blu i valori che si ottengono considerando le reazioni nel baricentro.

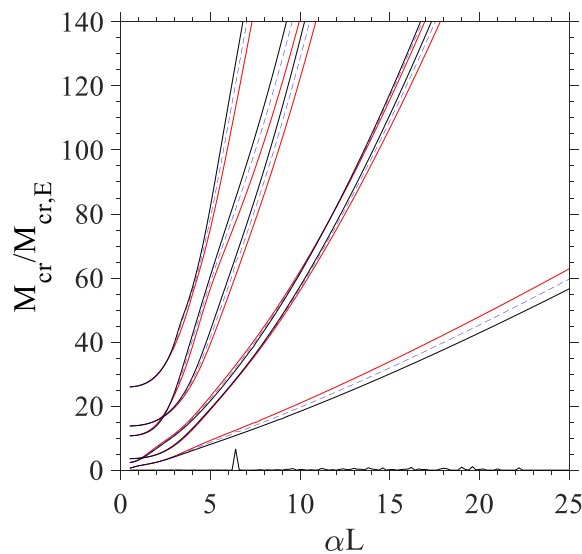


Fig. 3.28. Lateral buckling con coppie flettenti agli estremi, senza vincoli laterali agli estremi e $L/b=10$. Modulo del Momento critico al variare della rigidezza del suolo (a), Momento critico con segno al variare della rigidezza del suolo (b). Momento critico relativo a momento positivo (Rosso), Momento critico relativo a momento negativo (Nero), Momento critico considerando le reazioni nel baricentro (Blu tratteggiato)

I primi due modi risultano essere staccati dagli altri. Si nota che il momento critico aumenta all'aumentare della rigidezza del suolo, inoltre, la curva del momento critico negativo, per i primi modi, risulta essere sempre minore di quella con momento positivo e la curva ottenuta con le reazioni nel baricentro è equidistante dalle due. La curva con reazioni nel baricentro è stata introdotta per

mostrare il diverso contributo delle stesse all'instabilità laterale, il loro apporto è notevole e dipende dalla loro posizione e dal verso. Nel caso di assenza di vincoli laterali si nota la presenza di due moti rigidi, cui corrispondono moltiplicatori prossimi a 0. Nelle Fig. 3.29 sono riportate le deformate dei primi 8 modi per valori di αL pari a 1, 5, 10. si può notare come i primi due modi siano sempre riconducibili a moti rigidi, mentre all'aumentare di αL aumenta solo la rigidità torsionale e non quella flessionale nel piano orizzontale, non essendo presenti reazioni tangenziali.

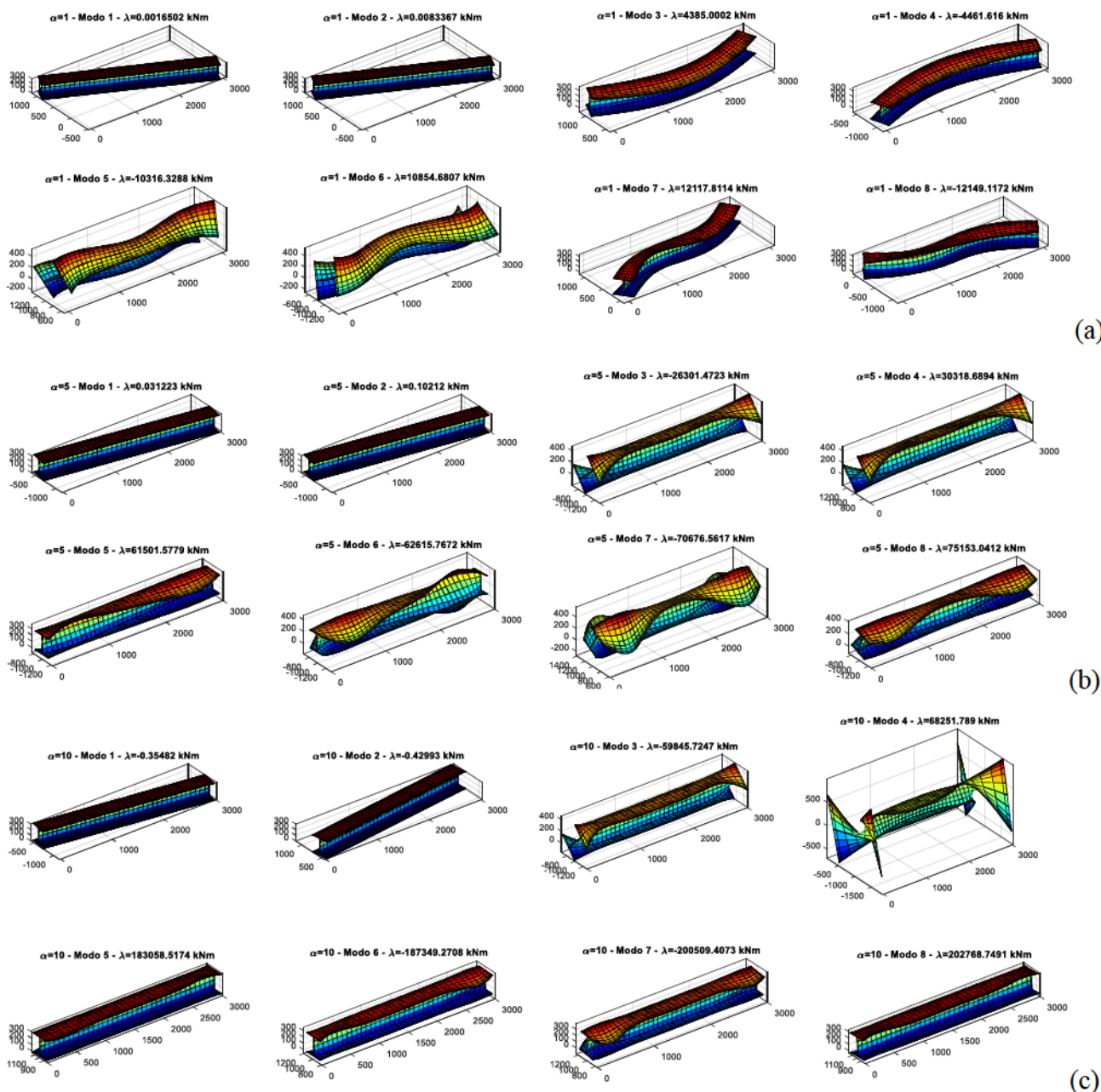


Fig. 3.29. Primi 8 modi di lateral buckling per trave su suolo con momenti alle estremità. $\alpha L=1$ (a), $\alpha L=5$ (b), $\alpha L=10$ (c) (Le deformate presentano scala di deformazione diverse).

3.3.5 Instabilità flessione-torsionale per una trave con carico uniformemente distribuito in presenza di vincoli laterali

Un'altra interessante applicazione è quella di una trave soggetta a carico distribuito posta su un suolo elastico ed isotropo con vincoli laterali. La trave scelta per l'esempio è una HEB300 con rapporto $L/b=30$. Il vincolo è applicato con approccio penalty ed è governato dall'equazione $v_l - v_{end} = 0$ che porta all'assemblaggio nella matrice \mathbf{K} globale della matrice riportata nell'Eq. 3.19. Nel modello si è tenuto conto dell'effetto instabilizzante del momento flettente, del taglio, del carico distribuito e delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore. Tali reazioni vengono mediate e considerate carico di linea. Inoltre, si è tenuto conto dei termini del secondo ordine che nascono dall'avere le reazioni sotto la flangia inferiore e la cinematica della trave descritta con riferimento al baricentro (Barsoum Gallagher 1970). Nel seguito verranno presentati i risultati in termini di carico critico adimensionalizzato utilizzando il valore $M_{cr,q}$ (Eq. 1.138) ($\psi_1 = 1.13$ e $\psi_2 = 0$), ed ottenendo $q_{cr,E} = M_{cr,q} \delta / L^2$.

Nelle Fig. 3.30 sono riportati i moduli degli andamenti dei carichi critici al variare di αL . In rosso il caso del carico sull'ala superiore (a), in blu il caso del carico sul baricentro (b) ed in nero il caso del carico sull'ala inferiore (c), inoltre, con la linea tratteggiata viene riportato il modulo di q_{cr}^- e con la linea continua viene riportato q_{cr}^+ . All'aumentare di αL , nel caso di carico sull'ala inferiore e baricentrico, il primo modo q_{cr}^+ avviene dopo un numero sempre più alto di modi q_{cr}^- , ed in particolare superato αL pari a 5 il modulo del carico q_{cr}^+ è notevolmente più grande di q_{cr}^- . Nel caso di carico sull'ala inferiore, invece, i due carichi sono sempre vicini tra loro e presentano frequenti intersezioni.

Nella Fig. 3.31 sono riportate le possibili configurazioni di carico e, quindi, di reazioni analizzate. Le configurazioni (1) e (4) sono relative a carichi applicati sulla flangia superiore, le configurazioni (2) e (5) sono relative a carichi applicati nel baricentro, infine, le posizioni (3) e (6) sono relative a carichi applicati sulla flangia inferiore. Le configurazioni di carico (1) e (6) hanno un effetto instabilizzante nei confronti del carico critico, le configurazioni di carico (3) e (4) hanno un effetto stabilizzante nei confronti del carico critico, mentre le configurazioni (2) e (5) non hanno nessun effetto aggiuntivo. Per quanto riguarda le reazioni, le configurazioni (1), (2) e (3) hanno effetto instabilizzante, mentre le configurazioni (4), (5) e (6) hanno effetto stabilizzante. Nella Tab. 3-6 sono riassunte tutte le possibili configurazioni.

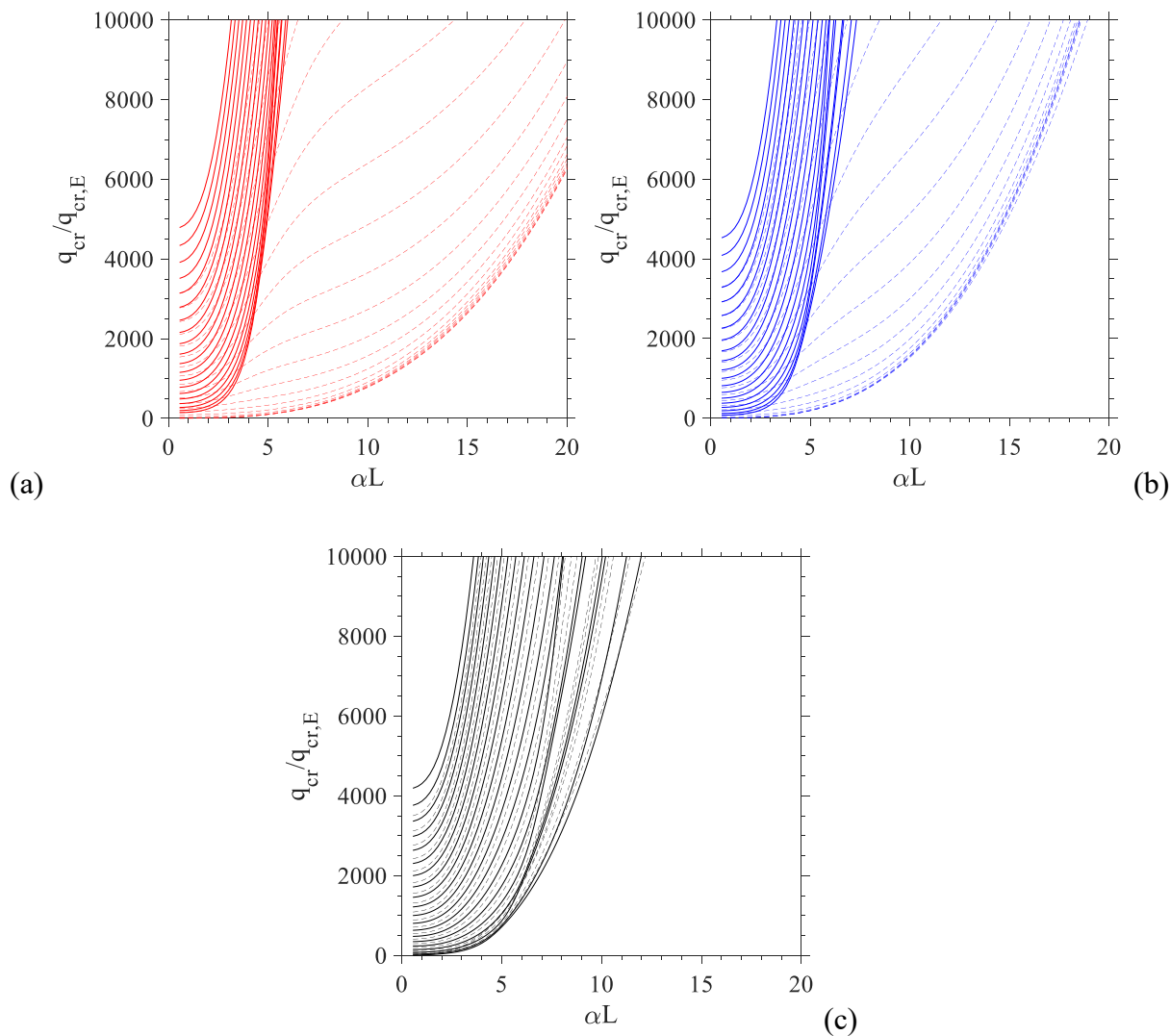


Fig. 3.30. Lateral buckling con carico distribuito su suolo. Modulo del carico alla superiore (a, rosso), modulo del carico baricentro (b, blu), modulo del carico alla inferiore (c, nero).

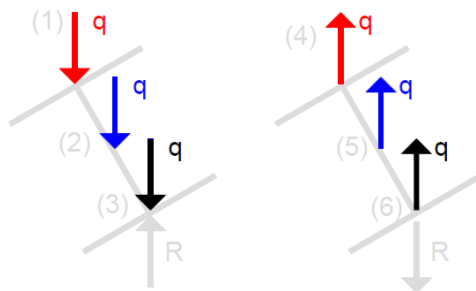


Fig. 3.31. Possibili configurazioni dei carichi e delle reazioni.

Nella Fig. 3.32,a sono riportati i valori dei carichi critici adimensionalizzati relativi alle 6 diverse configurazioni di carico sopra descritte. Nella Fig. 3.32,b sono riportati i moduli dei primi carichi critici adimensionalizzati relativi alle 6 diverse configurazioni di carico sopra descritte. Si nota che i

moltiplicatori minori sono quelli relativi alla configurazione (1), che mostra la contemporanea presenza dell'effetto instabilizzante del carico e delle reazioni. I moltiplicatori maggiori sono, invece, relativi alla configurazione (4), che mostra la contemporanea presenza dell'effetto stabilizzante del carico e delle reazioni. Tutte le altre combinazioni risultano intermedie a queste due. Vale la pena notare che le combinazioni (3) e (6) non sono perfettamente sovrapposte pur essendo quasi speculari, infatti l'andamento delle reazioni non è perfettamente distribuito ma presenta dei picchi (Fig. 3.33)

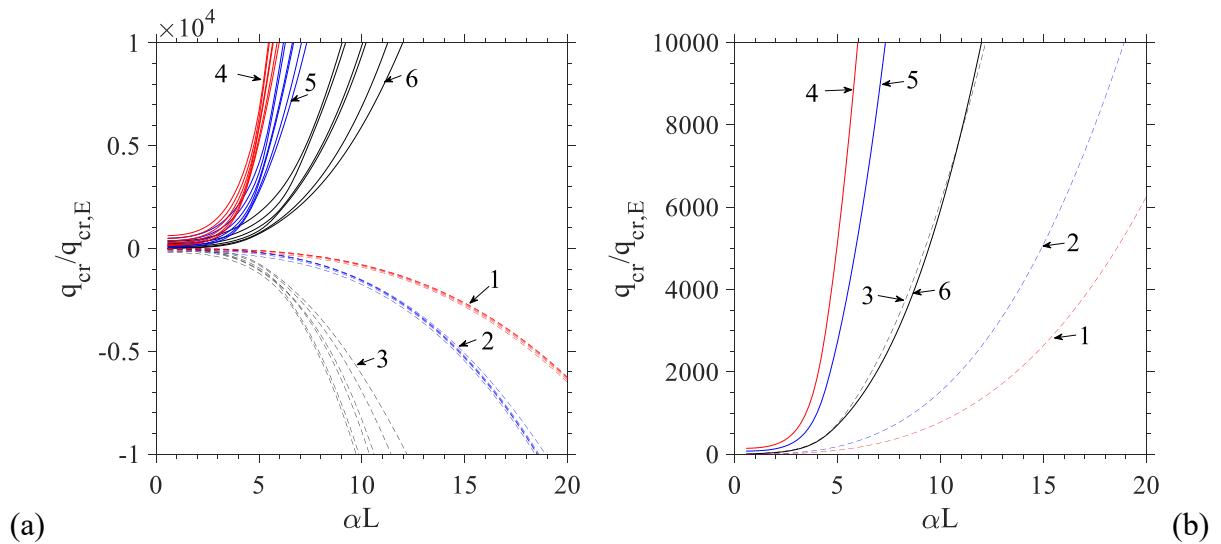


Fig. 3.32. Lateral buckling con carico uniformemente distribuito, vincoli laterali agli estremi e $L/b=30$. Carico critico con segno al variare della rigidezza del suolo (a); modulo del primo carico critico al variare della rigidezza del suolo (b).

Configurazione	Contributo delle reazioni	Contributo dei carichi
(1)	Instabilizzante	Instabilizzante
(2)	Instabilizzante	Neutro
(3)	Instabilizzante	Stabilizzante
(4)	Stabilizzante	Stabilizzante
(5)	Stabilizzante	Neutro
(6)	Stabilizzante	Instabilizzante

Tab. 3-6. Possibili configurazioni di carico e relativo contributo all'instabilità.

Nelle Fig. 3.33 sono riportati i diagrammi, calcolati per quattro valori di αL , utilizzati per costruire la matrice \mathbf{K}_g : momento flettente (a), taglio (b), reazioni mediate e riportate come carico di linea (c).

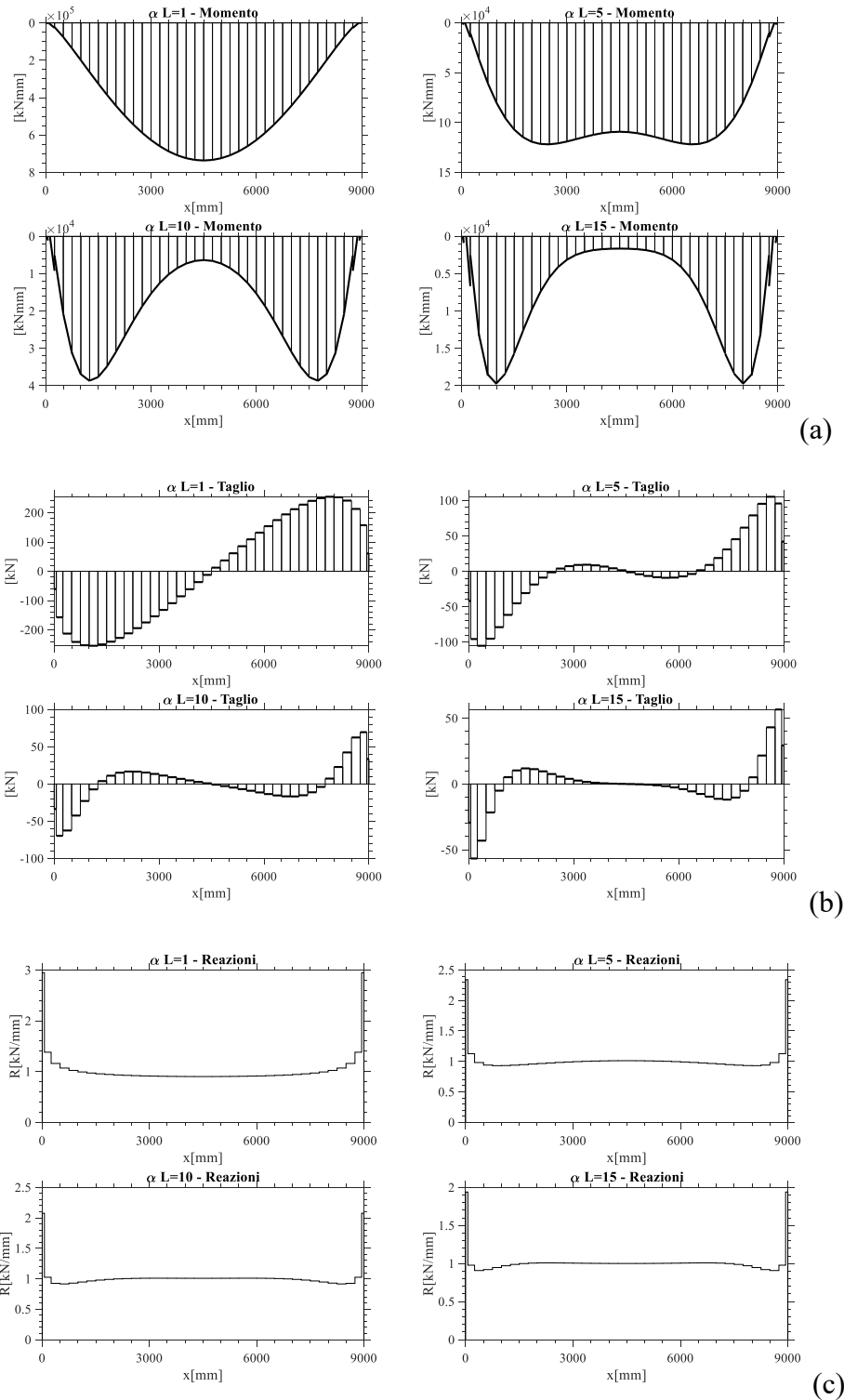


Fig. 3.33. Trave con carico distribuito su suolo. Andamento del momento flettente (a), del taglio (b), delle reazioni (d) per quattro valori di rigidezza del suolo $\alpha L=1;5; 10, 15$.

Nelle Fig. 3.34 sono riportate le deformate dei primi 8 modi per valore di αL pari a 1, con diverse posizioni del carico: alla superiore (a), baricentro (b), ala inferiore (c). Nel caso (a) i primi 6 modi sono relativi al carico q verso il basso, mentre il modo 7 è relativo al carico q diretto verso l'alto. Nel caso (b) i primi 5 modi sono relativi al carico q verso il basso, mentre il modo 6 è relativo al carico q diretto verso l'alto. Nel caso (c) il primo modo è relativo al carico verso l'alto ed il secondo è relativo al carico verso il basso, con valori molto vicini tra loro. All'aumentare di αL , nel caso (a) e (b), la posizione del primo modo relativo a q_c^+ si sposta sempre più verso modi maggiori, relativi a moltiplicatori sempre più elevati.

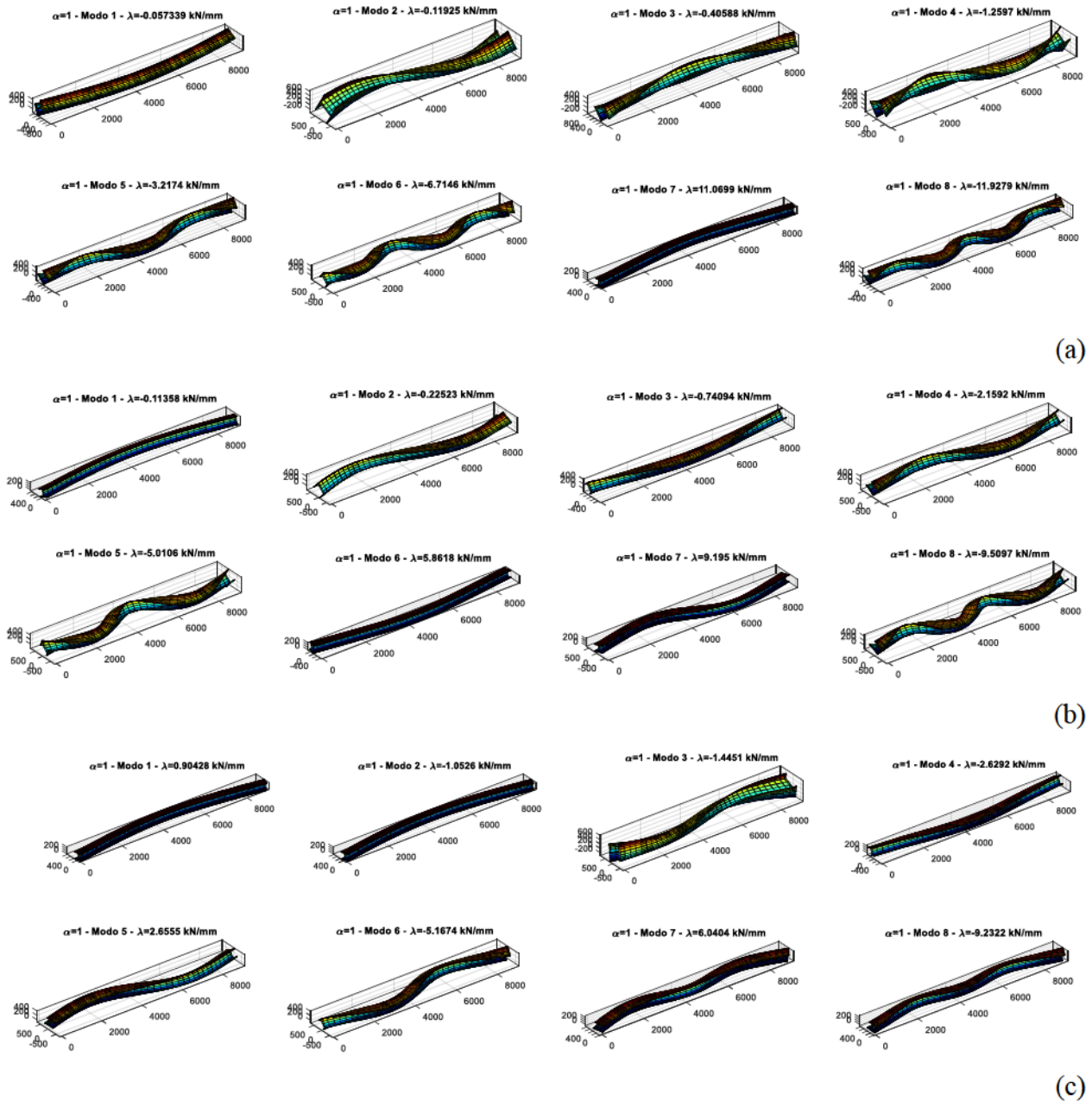


Fig. 3.34. Primi 8 modi di lateral buckling per trave su suolo con momenti alle estremità ($\alpha L=1$). Carico sull'ala superiore (a), carico sul baricentro (b), carico sull'ala inferiore (c).

3.3.6 Confronto tra FE-BIE e modelli FEM (Instabilità flessio-torsionale)

3.3.6.1 Instabilità flessio-torsionale per una trave con coppie concentrate agli estremi priva di vincoli laterali

Nel presente paragrafo è riportato il confronto, in termini di carico critico laterale con momento alle estremità, tra il modello FE-BIE e il modello FEM con *face support*. Tale modello è stato realizzato con elementi *plate* che rappresentano la trave irrigiditi da elementi *beam* rigidi svincolati agli estremi, per simulare il suolo sono stati scelti dei *face support* (Fig. 3.35), che rappresentano una distesa continua di molle con rigidezza stimata attraverso la relazione proposta da Vesic 1961 e riportata nell' Eq. 3.7. I modelli presentano vincoli alla traslazione trasversale agli estremi, inoltre, per il modello FEM è stato necessario inserire un irrigidimento della sezione per evitare possibili modi locali. Il terreno scelto per il confronto presenta un valore del parametro αL pari a 1.

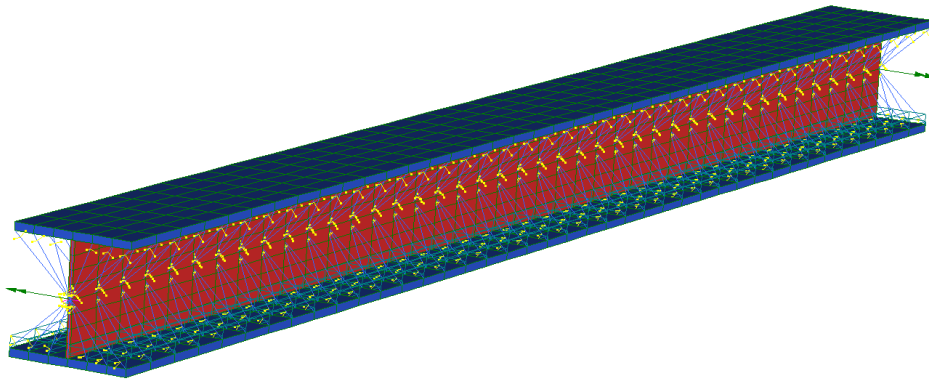


Fig. 3.35. Modello FEM *plate* su *face support* con momento agli estremi.

Nelle Fig. 3.36 (a), (b) sono riportati i primi due modi del modello FE-BIE, mentre, nelle Fig. 3.36 (c), (d) sono riportati i primi due modi per il modello FEM. Si può apprezzare la somiglianza delle forme relative alle due modellazioni, mentre i moltiplicatori fanno registrare un errore relativo di circa il 10% come riportato nella Tab. 3-7.

$\alpha L=1$	Momento critico [kNm]		
	FE-BIE	FEM (<i>plate</i> su <i>face support</i>)	(FE-BIE-FEM)/FE-BIE
1	2792	3092	-11%
2	2841	3107	-9%

Tab. 3-7. Modulo del momento critico per i primi due modi, confronto tra modello FE-BIE e modello FEM.

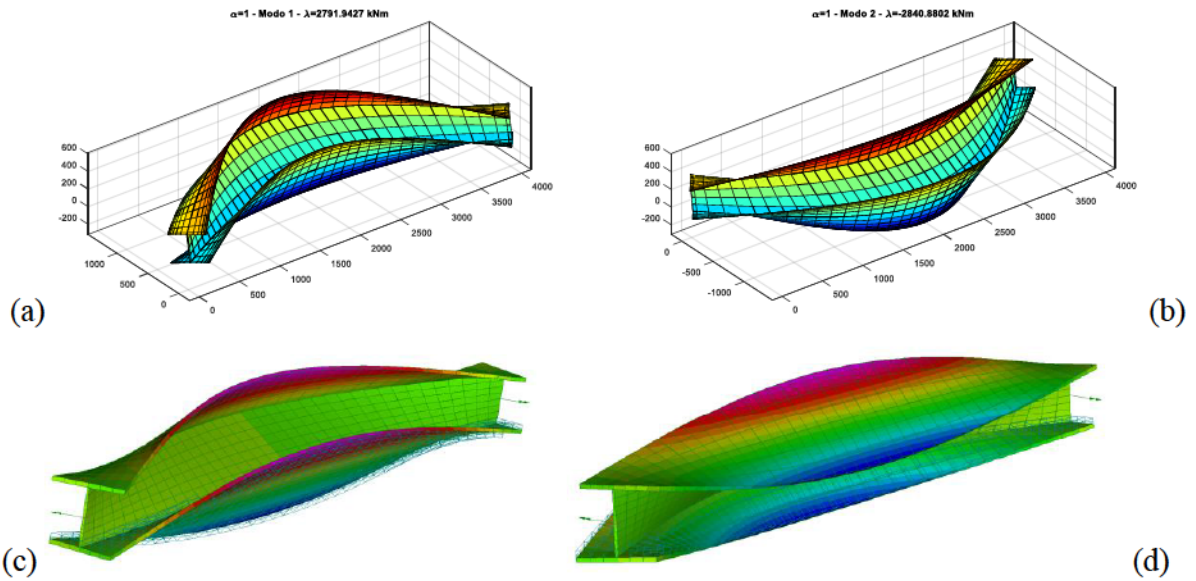


Fig. 3.36. Lateral buckling con momenti agli estremi. Primi due modi modello FE-BIE (a), (b); primi due modi modello FEM su *face support* (c), (d).

3.3.6.2 Instabilità flesso-torsionale per una trave con carico distribuito priva di vincoli laterali

Nel presente paragrafo è riportato il confronto, in termini di carico critico laterale con carico distribuito sull'ala superiore, tra il modello FE-BIE e il modello FEM con *face support*. Tale modello è stato realizzato con elementi *plate* che rappresentano la trave irrigiditi da elementi *beam* rigidi svincolati agli estremi, per simulare il suolo sono stati scelti dei *face support* (Fig. 3.37), che rappresentano una distesa continua di molle con rigidità stimata attraverso la relazione proposta da Vesic (1961) e riportata nell' Eq. 3.7. I modelli presentano vincoli alla traslazione trasversale agli estremi, inoltre, per il modello FEM è stato necessario inserire un irrigidimento della sezione per evitare possibili modi locali. Il terreno scelto per il confronto presenta un valore del parametro αL pari a 1.

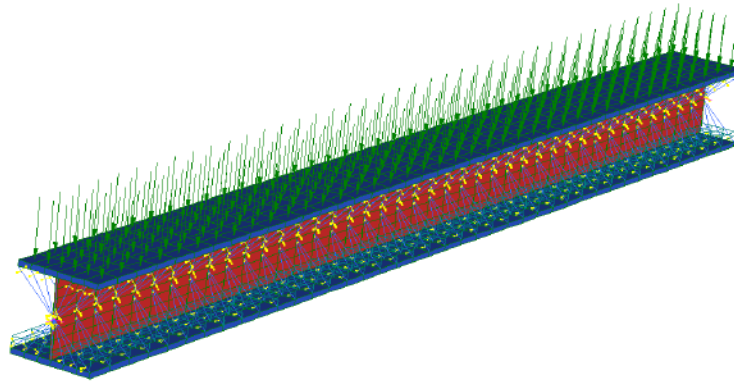


Fig. 3.37. Modello FEM *plate* su *face support* con carico distribuito.

Nelle Fig. 3.38 (a), (b) sono riportati i primi due modi del modello FE-BIE, mentre, nelle Fig. 3.38 (c), (d) sono riportati i primi due modi per il modello FEM. Si può apprezzare la somiglianza delle forme relative alle due modellazioni, mentre i moltiplicatori fanno registrare un errore relativo di circa l' 11% sul secondo modo ed un errore del 96% sul primo modo, dovuto alla presenza di un moto rigido torsionale (Tab. 3-8).

Modo	Carico critico [kN/mm]		
	FE-BIE	FEM (<i>plate su face support</i>)	(FE-BIE-FEM)/FE-BIE
1	0.663	0.029	96%
2	0.977	0.871	11%

Tab. 3-8. Modulo del carico critico per i primi due modi, confronto tra modello FE-BIE e modello FEM.

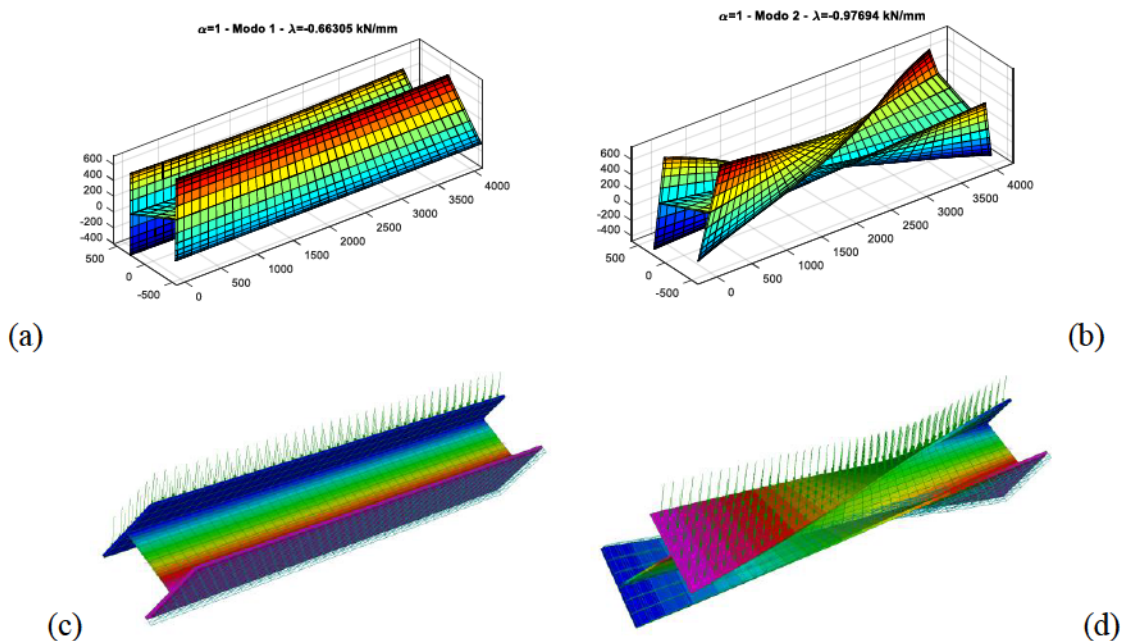


Fig. 3.38. Lateral buckling con carico distribuito. Primi due modi modello FE-BIE (a), (b); primi due modi modello FEM su face support (c), (d).

4 ANALISI LINEARE DI TELAI SU SUOLO ELASTICO

4.1 Modelli di interazione suolo-struttura

4.1.1 Modelli semplificati

Uno dei modelli semplificati più utilizzati è quello che prevede la trave di fondazione infinitamente più rigida del suolo. Si studia la sovrastruttura ipotizzando degli incastri al piede, si registrano le reazioni vincolari che poi si applicano, cambiate di segno, alle travi di fondazione (Fig. 4.1).

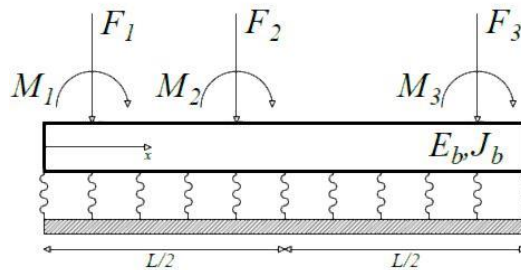


Fig. 4.1. Trave di fondazione molto più rigida del suolo, con carichi applicati.

Considerando una sezione rigida, caricata come appena descritto, si calcola la risultante delle azioni e la sua posizione xR rispetto all'origine del sistema per poi calcolare l'eccentricità rispetto al baricentro geometrico attraverso $e = xR - L/2$. Per permettere alla sezione di base di reagire interamente si deve limitare e al valore del semi asse del nocciolo centrale di inerzia, vale a dire $L/6 \geq e$ (Fig. 4.2).

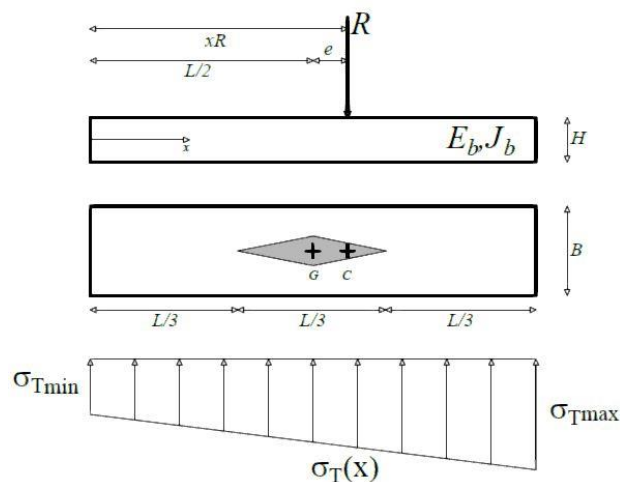


Fig. 4.2. Trave infinitamente rigida rispetto al suolo. Posizione della risultante, indicazioni sul nocciolo centrale di inerzia e andamento delle tensioni nel suolo.

Ottenuto l'andamento delle tensioni sul terreno $\sigma_T(x)$, è possibile risalire al carico lineare sotto la trave e quindi alle sollecitazioni. A questo punto risulta interessante dividere il problema in due casi particolari per il caso fondazione infinitamente rigida e cioè: sovrastruttura deformabile e sovrastruttura rigida, nel seguito indicate come DS e RS rispettivamente.

4.1.2 Modello di Winkler

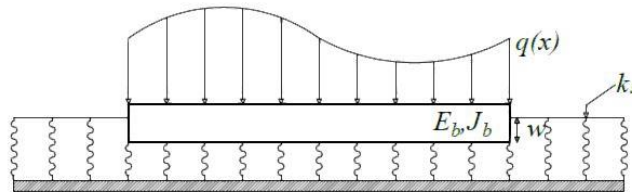


Fig. 4.3. Schematizzazione di una trave su suolo di Winkler.

Il modello di suolo di Winkler(1867) (Fig. 4.3), pur essendo approssimato, è uno degli strumenti più utilizzati per interpretare il comportamento delle strutture di fondazione. Tale teoria è basata, come è noto, sulla non rigorosa ipotesi che il terreno, in corrispondenza della zona caricata, reagisca con una pressione costante e proporzionale all'abbassamento. Questo corrisponde a schematizzare il suolo come un letto di molle indipendenti l'una dall'altra e dotate della stessa portanza.

Immaginando il terreno costituito da molle indipendenti e caratterizzate dalla stessa rigidezza k_v , l'equazione della linea elastica per una trave a sezione costante appoggiata per tutta la lunghezza al mezzo elastico così definito, può esprimersi come segue:

$$E_b J_b \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) - b k_s w(x) \quad \text{Eq. 4.1}$$

dove E_b e J_b sono il modulo elastico e l'inerzia della sezione, rispettivamente; $v(x)$ è lo spostamento verticale dell'asse della trave; B è la base della fondazione; $q(x)$ è la distribuzione di carico applicato. Introducendo il parametro α , l'Eq. 4.1 si trasforma nell'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\alpha^4 w(x) = q(x) \quad \text{Eq. 4.2}$$

con α pari a:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{b k_s}{4 E_b J_b}} \quad \text{Eq. 4.3}$$

L'energia potenziale di una trave appoggiata su un terreno alla Winkler, considerando gli effetti del secondo ordine dovuti al carico assiale, è data dalla seguente espressione:

$$\Pi(w) = \Pi_b - b \int_L q(x)w(x)dx + \int_L k_s [w(x)]^2 dx \quad \text{Eq. 4.4}$$

dove Π_b rappresenta l'energia potenziale della trave. La forma discreta dell'energia potenziale totale (Eq. 4.5), è ottenuta adattando le espressioni utilizzate per la trave su semispazio.

$$\Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_w) \mathbf{q} - b \mathbf{q}^T \mathbf{F} \quad \text{Eq. 4.5}$$

dove \mathbf{K}_w rappresenta la matrice di rigidezza del suolo di Winkler.

Particolare importanza, per una corretta applicazione della teoria, riveste la scelta della costante di sottofondo k_s . Per il valore della rigidezza delle molle, sono state proposte diverse modalità di stima utilizzando vari approcci, come quelli proposti da Terzaghi (1955), Biot (1937), Vesic (1961).

La proposta di Terzaghi è quella di stimare la costante k_s attraverso un valore k_0 , relativo alla risposta media del terreno reale caricato con una piastra di dimensioni standard $B \times B$ ($B=30\text{cm}$). Utilizzando le Eq. 4.6 si può risalire al valore della k_s da utilizzare nei modelli.

$$k_s = k_0 \frac{B}{b} \quad \text{per le argille}$$

$$k_s = k_0 \left(\frac{b+B}{2b} \right)^2 \quad \text{per le sabbie} \quad \text{Eq. 4.6}$$

I valori empirici di k_0 sono riportati nella Tab. 4-1

Sabbia				Argilla			
Densità relativa	Sciolta	Media	Densa	Consistenza	Compatta	Molto compatta	Dura
Sabbia umida (valori limite)	0.7 - 2.1	2.1 - 10.8	10.8 - 36	Resistenza a compressione	1 - 2	2 - 4	<4
Sabbia umida (valori proposti)	1.4	4.7	18	Valori limite	1.8 - 3.6	3.6 - 7.2	7.2
Sabbia satura (valori proposti)	0.9	2.9	11	Valori proposti	2.7	5.4	10.8

Tab. 4-1. Valori della costante k_0 proposti da Terzaghi.

Le proposte di Biot (Eq. 4.8) e Vesic (Eq. 4.7) utilizzano una formulazione semi empirica, sono funzione delle caratteristiche elastiche del terreno attraverso E_s e ν_s e delle caratteristiche della fondazione attraverso b e I_y .

$$k_s = \frac{0.65E_s}{b(1-\nu_s^2)} \sqrt{\frac{E_s b^4}{E_b I_b}} \quad (w_1) \quad \text{Eq. 4.7}$$

$$k_s = \frac{0.95E_s}{b(1-\nu_s^2)} \left[\frac{E_s b^4}{(1-\nu_s^2)E_b I_b} \right]^{0.108} \quad (w_2) \quad \text{Eq. 4.8}$$

4.2 Analisi di telai su suolo elastico

Di seguito vengono presentati alcuni esempi che mettono in luce problematiche relative all'interazione suolo struttura. Prima viene studiata l'influenza della rigidezza del terreno e della lunghezza dell'aggetto laterale presente nelle fondazioni, successivamente vengono analizzati telai tridimensionali al variare della rigidezza della sovrastruttura.

4.2.1 Influenza della rigidezza del terreno e della lunghezza dello sbalzo

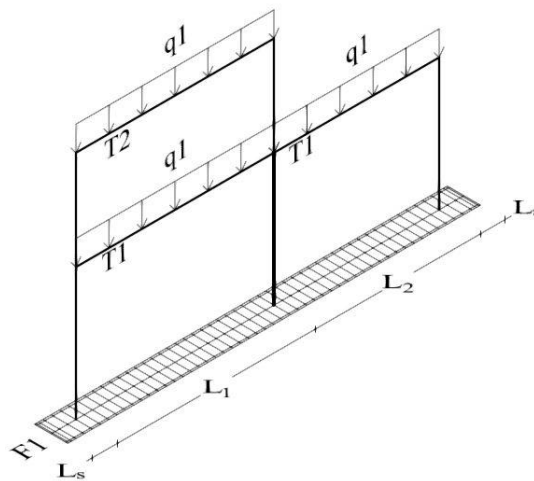


Fig. 4.4. Telaio bidimensionale su suolo elastico.

Il primo esempio che viene riportato, per i telai su suolo, riguarda la semplice struttura bidimensionale di Fig. 4.4. La struttura è composta da travi in elevazione di sezione $30 \times 50 \text{ cm}^2$, pilastri di sezione $40 \times 40 \text{ cm}^2$ alti 4m al piano terra e 3m al piano primo. Il carico applicato alle trave vale $q=30.75 \text{ kN/m}$. Le lunghezze L_1 ed L_2 sono 6m e 5m, rispettivamente. È stata utilizzata una discretizzazione graduale con $\beta=3$, $n_{x,end}=3$ e un $n_y=4$.

All'interno di questa sezione si vogliono analizzare due aspetti: l'influenza della lunghezza dello sbalzo L_s e della rigidezza del terreno sull'andamento del momento flettente nella trave di fondazione.

Nella Fig. 4.5a sono riportati i diagrammi del momento al variare di L_s tra 0.50m, 0.75m e 1.00m con un suolo $E_s=10$ MPa. Si nota che il valore del modulo del momento flettente in campata (Sez.A) diminuisce all'aumentare della lunghezza dello sbalzo, mentre il modulo sotto i pilastri (Sez.B) ha l'andamento opposto, nella Tab. 4-2 sono riportati i valori nelle due sezioni.

Nella Fig. 4.5b sono riportati i diagrammi del momento al variare della rigidezza del terreno E_s con L_s fissato a 0.50m. È evidente che, all'aumentare della rigidezza del terreno E_s , il diagramma del momento si appiattisce ed il modulo del momento diminuisce. Infatti, come visto nel paragrafo 2.4, all'aumentare di E_s , le sollecitazioni e le reazioni si concentrano in prossimità del punto di applicazione della forza.

Modello	$E_s=25\text{MPa}$	
	Momento flettente [kNm]	
	Sez.A	Sez.B
$L_s=0.50\text{m}$	79.15	209.3
$L_s=0.75\text{m}$	59.86 (-24%)	223.4 (+7%)
$L_s=1.00\text{m}$	41.85 (-47%)	236.3 (+13%)

Tab. 4-2. Valore del modulo del momento flettente e differenze relative rispetto al caso $L_s=0.5\text{m}$ ($M_{L_s}-M_{L_s=0.5\text{m}})/(M_{L_s=0.5\text{m}})\times 100$.

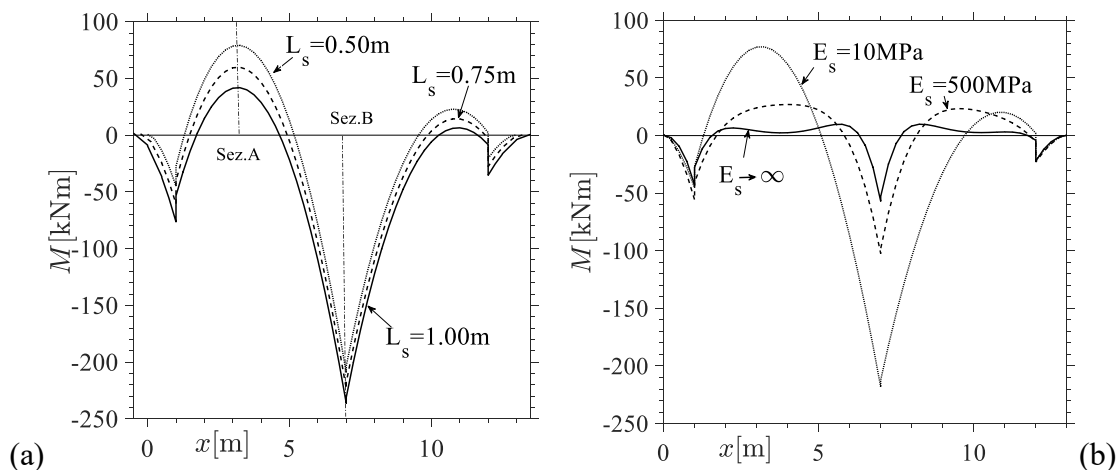


Fig. 4.5. Telaio bidimensionale su suolo elastico. Momento flettente al variare della lunghezza L_s dello sbalzo con $E_s=10\text{MPa}$ (a), momento flettente al variare della rigidezza del terreno con $L_s=0.50\text{m}$ (b).

4.2.2 Influenza della rigidità strutturale

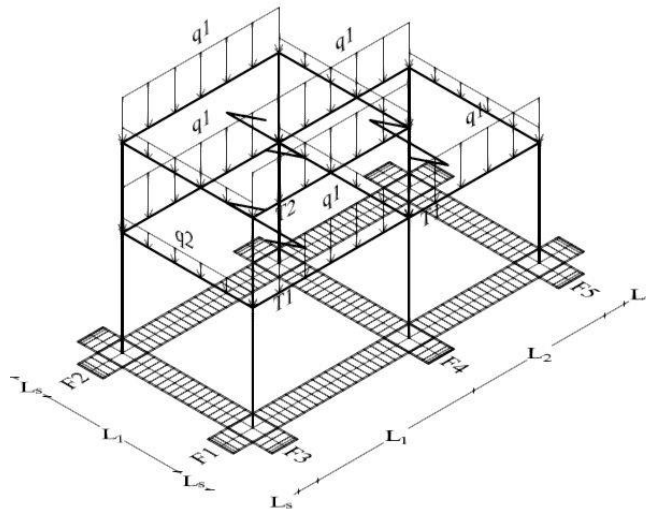


Fig. 4.6. Telaio tridimensionale su suolo elastico.

Nel presente paragrafo viene analizzata la struttura riportata nella Fig. 4.6 che ha le stesse dimensioni geometriche di quella discussa al paragrafo precedente. Nell'intersezione tra travi di fondazione ortogonali sono stati inseriti dei punch rigidi, anche in questo caso è stata utilizzata una discretizzazione graduale con $\beta=3$, $n_{x, end}=3$ e un $n_y=4$. La rigidità del suolo è fissata e pari a $E_s=25\text{MPa}$.

Di seguito si fa riferimento a quattro situazioni limite che possono verificarsi nella realtà, vale a dire: struttura rigida-fondazione rigida (SR FR), struttura rigida-fondazione deformabile (SR FD), struttura deformabile -fondazione rigida (SD FR), struttura deformabile -fondazione deformabile (SD FD) (si veda Tab. 4-3).

Modello	Fondazione Rigida	Fondazione Deformabile
Struttura Rigida	SR FR	SR FD
Struttura Deformabile	SD FR	SD FD

Tab. 4-3. Combinazioni studiate.

Nelle Fig. 4.7(a, b) sono riportati gli andamenti delle reazioni verticali sotto la trave di fondazione F1, in corrispondenza di $y=b/2$ e $y=0$, rispettivamente. Si nota che le reazioni, per fondazione rigida, non sono influenzate dalla rigidità della struttura, infatti i diagrammi ottenuti per SR FR e SD FR sono praticamente sovrapponibili, mentre per fondazioni deformabili si nota una leggera differenza tra SD FD e SR FD.

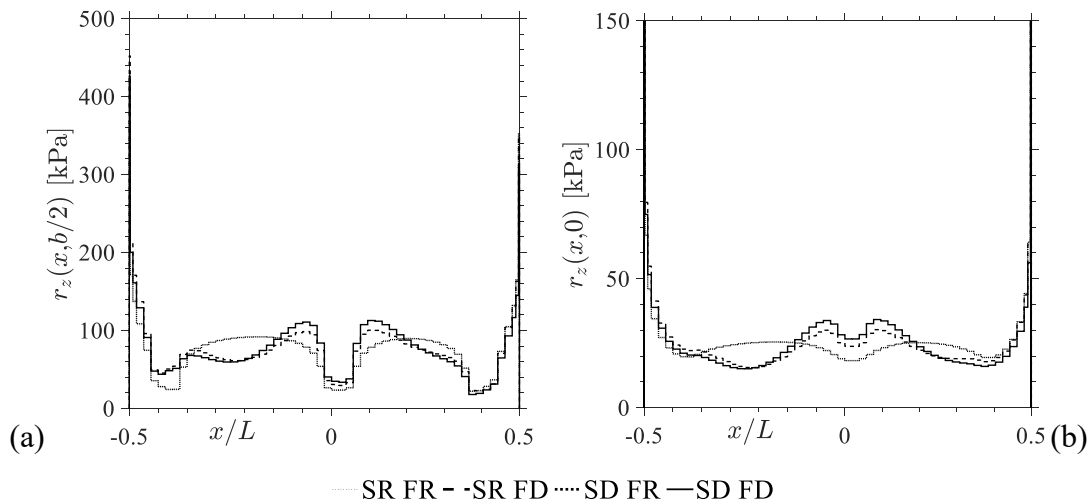


Fig. 4.7. Influenza della rigidezza della struttura e della fondazione su suolo con $E_s=25\text{MPa}$. Reazioni verticali al variare della rigidezza della struttura e delle travi di fondazione, $y=L/2$ (a), $y=0$ (b). (SR=Struttura Rigida, SD=Struttura Deformabile, FR=Fondazione Rigida, FD=Fondazione Deformabile)

Nella Fig. 4.8a è riportato l'andamento del momento flettente sulla trave di fondazione FI . È evidente che la rigidezza della fondazione influenza notevolmente l'andamento del momento flettente, governando, di fatto, il valore in prossimità del pilastro centrale. La condizione FR, fissata la rigidezza del terreno, tende al caso già discusso di $\alpha L=1$, mentre la condizione FD tende al caso di αL elevato. Prendendo in considerazione il caso di FD, si nota che la SR rispetto a SD ha valori più bassi in campata (circa 25%) e più alti in appoggio (circa 4%). Nel caso di FR il valore massimo in campata è circa uguale, mentre sotto il pilastro centrale la differenza è di circa il 13%.

Nella Fig. 4.8b sono riportati i diagrammi dei momenti torcenti per la trave FI , che risultano trascurabili in valore assoluto, derivando da una condizione di carico abbastanza simmetrica.

Nella Fig. 4.8c sono presentati i diagrammi dei momenti flettenti della trave TI del primo impalcato. Per una migliore lettura dei risultati si riporta la tabella, con i moduli dei momenti e gli errori relativi.

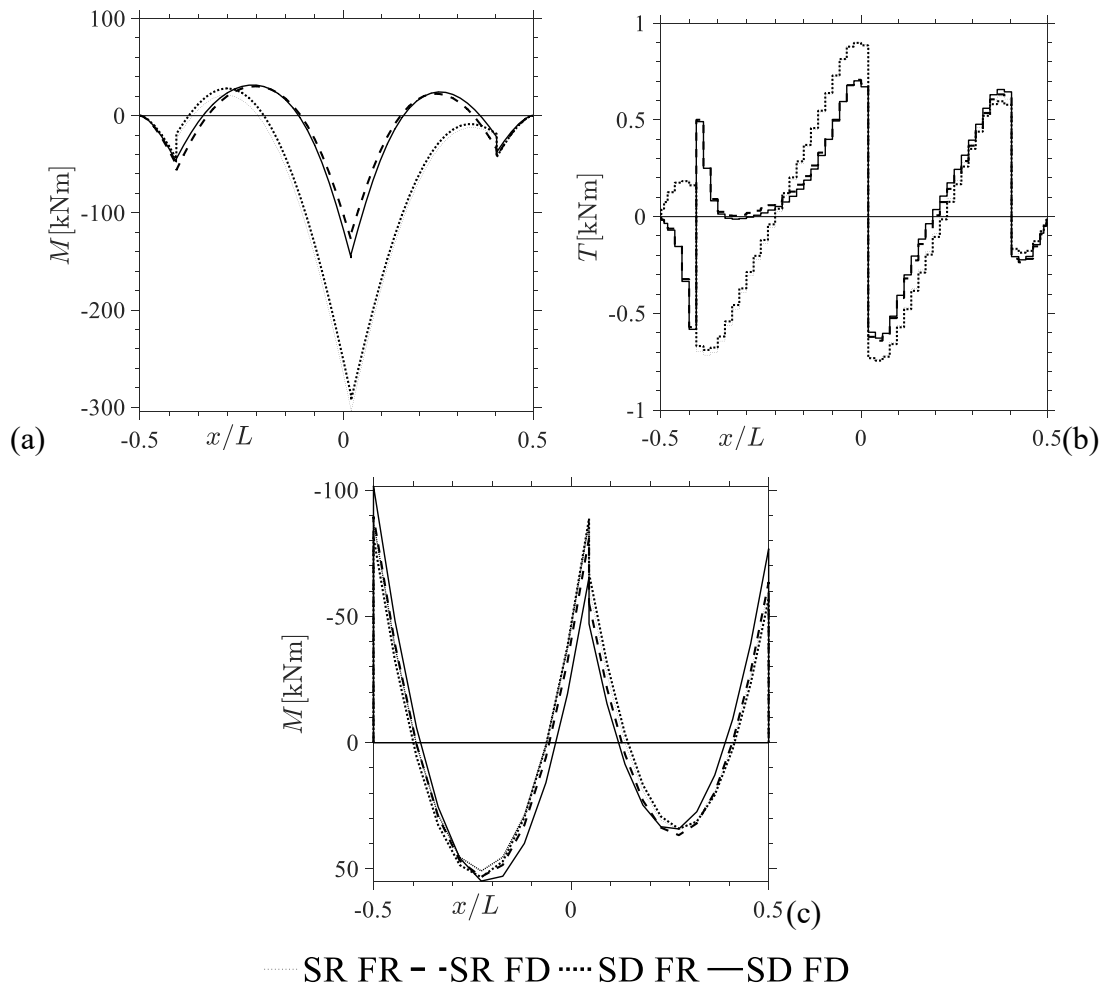


Fig. 4.8. Influenza della rigidità della struttura e della fondazione su suolo con $E_s=25\text{MPa}$. Momento flettente trave di fondazione (a), momento torcente trave di fondazione (b), momento flettente trave primo impalcato (c).

$M[\text{kNm}]$	SR FR	SR FD	SD FR	SD FD
$x/L=-0.5$	87.62	89.53 (2%)	81.43 (-7%)	101.6 (16%)
$x/L=0.0$	88.72	80.99 (-9%)	87.44 (-1%)	65.47 (-26%)
$x/L=0.5$	61.57	63.61 (3%)	56.97 (-7%)	76.76(25%)

Tab. 4-4. Trave primo impalcato, valore del modulo del momento flettente e differenze relative rispetto al caso al variare di x/L $(M_{SIFi} - M_{SR FR}) / (M_{SR FR}) \times 100$.

Volendo evidenziare il diverso comportamento della struttura di fondazione al variare delle diverse rigidezze nelle Fig. 4.9 sono riportate le deformate delle travi di fondazione.

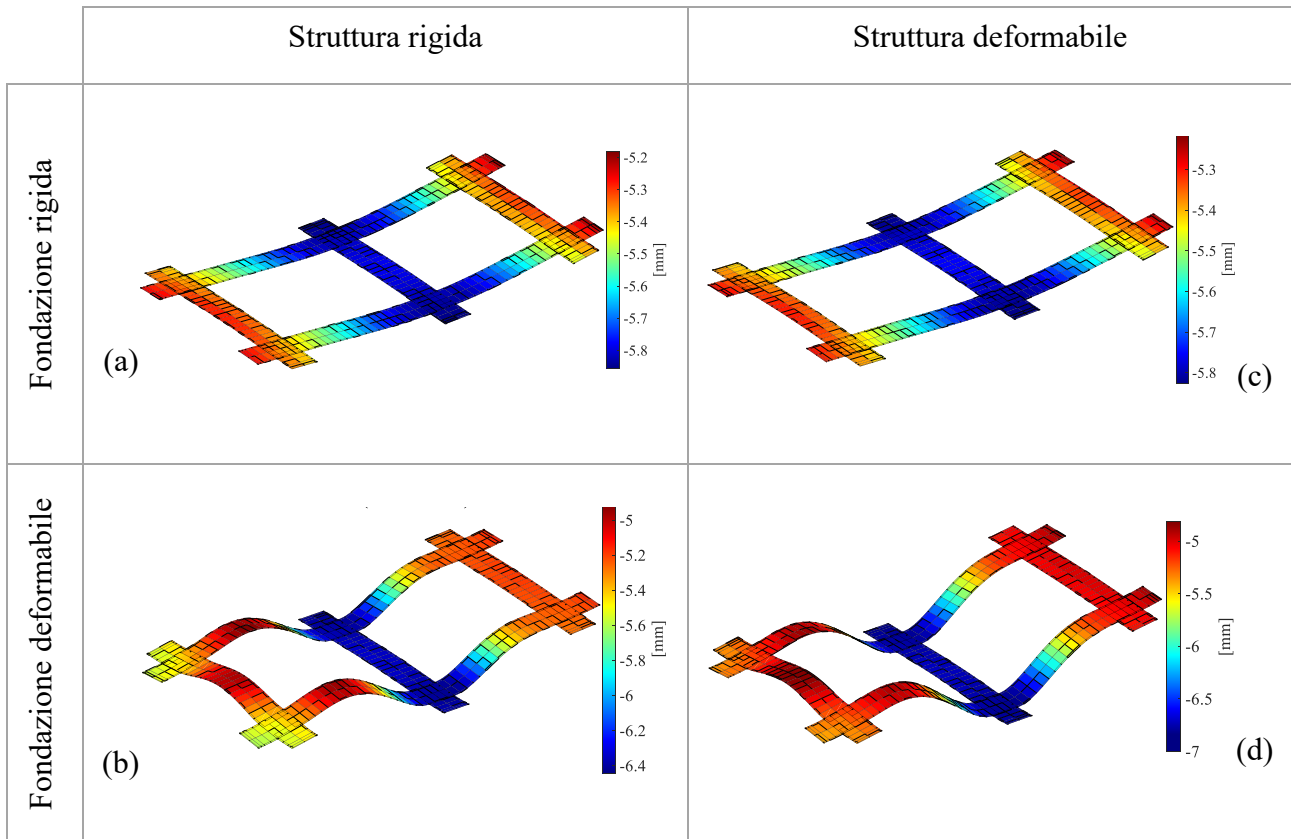


Fig. 4.9. Influenza della rigidezza della struttura e della fondazione su suolo con $E_s=25\text{MPa}$. Deformata al variare della rigidezza della struttura e delle travi di fondazione.

4.3 Telaio monopiano

Si riporta di seguito l'applicazione del metodo FE-BIE ad un telaio monopiano (Fig. 4.10). Per il suolo sono stati assunti i seguenti valori: $E_s=25$ MPa e $\nu_s=0.2$, mentre per la struttura sono stati assunti $E_b=30$ GPa, $G_b=13$ GPa (per il modello con rigidezza completa) e $G_b=6.5$ GPa (per il modello con rigidezza ridotta). Il telaio studiato (Fig. 4.10) è composto da travi di fondazione a T rovescia con larghezza di 1.00 m, altezza della soletta di 0.40 m, collo largo 0.60 m e alto 0.70 m. I pilastri quadrati di lato 0.40 m hanno altezza di 4.25 m. Le travi sono emergenti e presentano dimensioni di 0.30 m e 0.50 m rispettivamente per la base e l'altezza.

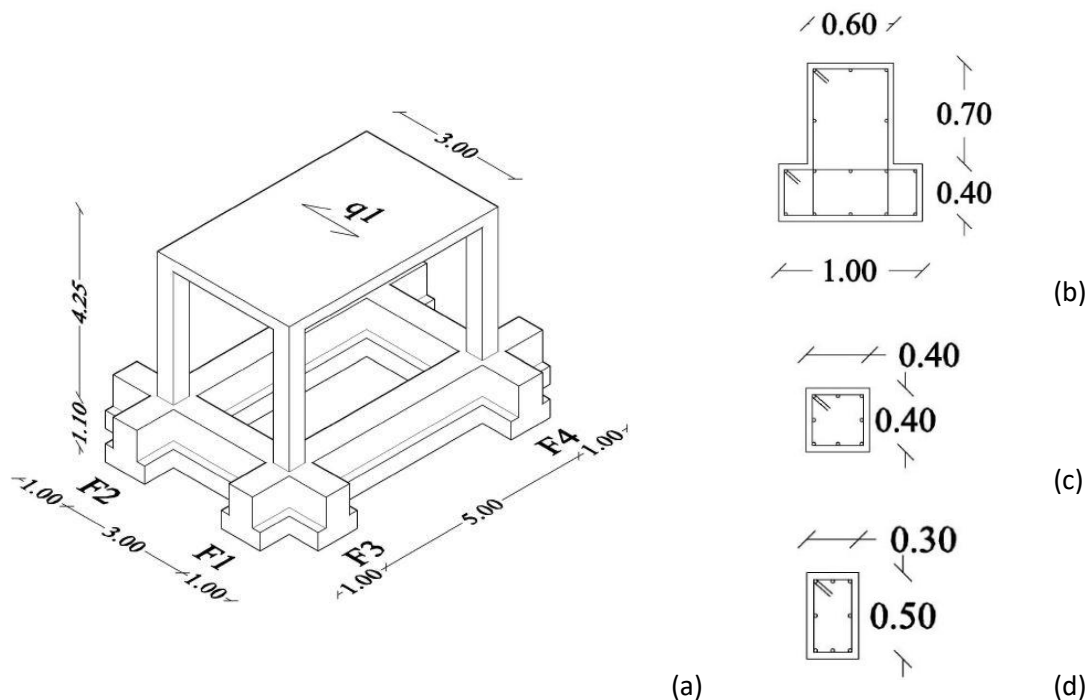


Fig. 4.10. Telaio tridimensionale: dimensioni (in m) e carichi applicati (a); sezione trasversale trave di fondazione (b), colonne (c) e travi in elevazione (d).

Il solaio, pensato per civile abitazione, ha carichi $G_1=4.0$ kN/m², $G_2=1.0$ kN/m² e $Q_{var}=2.0$ kN/m². La fattorizzazione allo stato limite ultimo porta alla distribuzione di carico sul solaio q_1 ed al peso delle travi q_2 (Tab. 4-5).

Carico	Valore
q_1 (Carico SLU su solaio)	9.70 kN/m ²
q_2 (Peso proprio trave)	4.88 kN/m

Tab. 4-5. Carichi su telaio

Il modello numerico è realizzato con elementi finiti *beam* di Eulero-Bernoulli. La fondazione deformabile è suddivisa nella direzione dell'asse in $n_{el_asse}=64$ e nella direzione ortogonale in

$n_{el_orto}=4$. L'incrocio delle travi è gestito con elementi punch rigidi. La discretizzazione è realizzata con raffittimenti in prossimità delle estremità, per meglio cogliere le singolarità dovute al salto di rigidità tra trave e terreno. In particolare per la discretizzazione trasversale è stato utilizzato un valore di β pari a 3.

Nelle Fig. 4.11 sono riportati i diagrammi dei momenti flettenti delle travi di fondazione. Con la linea continua è indicato il modello con rigidità torsionale completa (G_{t_full}), mentre con la linea tratteggiata quello con rigidità trasversale ridotta ($G_{t_reduced}$). Si nota che per carichi uniformemente distribuiti sulla struttura l'andamento del momento flettente è sostanzialmente lo stesso nei due casi considerati. Risulta prossimo a zero il momento torcente sulle travi di fondazione nelle diverse sezioni.

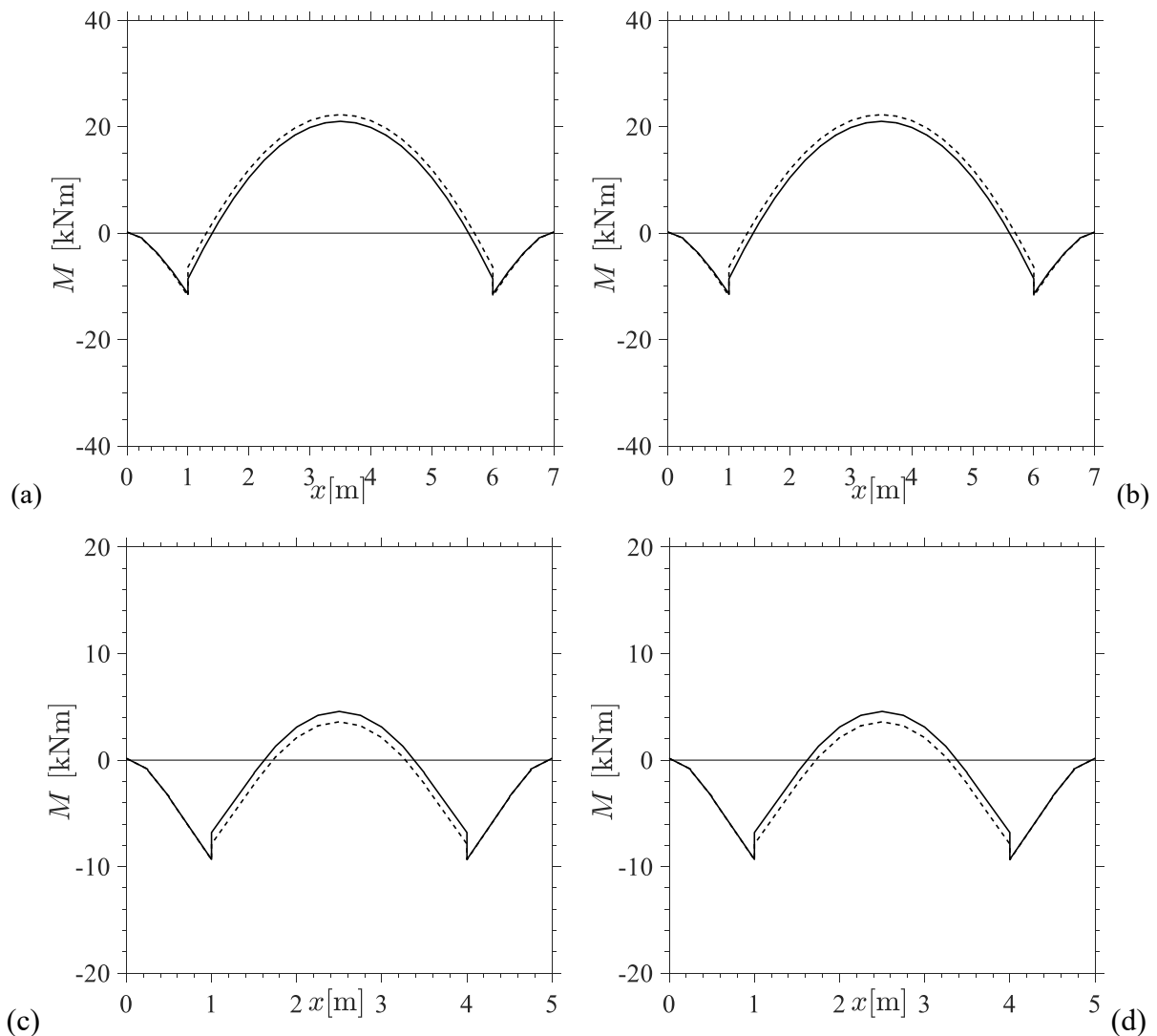


Fig. 4.11. Momento flettente sulla fondazione, $F1$ (a) $F2$ (b) $F3$ (c) $F4$ (d). Rigidità torsionale completa (linea continua), rigidità torsionale ridotta (linea tratteggiata)

4.4 Telaio monopiano con sbalzo

Nel presente paragrafo si è fatto riferimento al telaio di Fig. 4.12. Alla struttura considerata nella Fig. 4.11 è stato aggiunto uno sbalzo sul lato lungo. Il terreno presenta i seguenti valori: $E_s=25$ MPa e $\nu_s=0.2$. Le caratteristiche geometriche ed elastiche della struttura sono le medesime del precedente paragrafo.

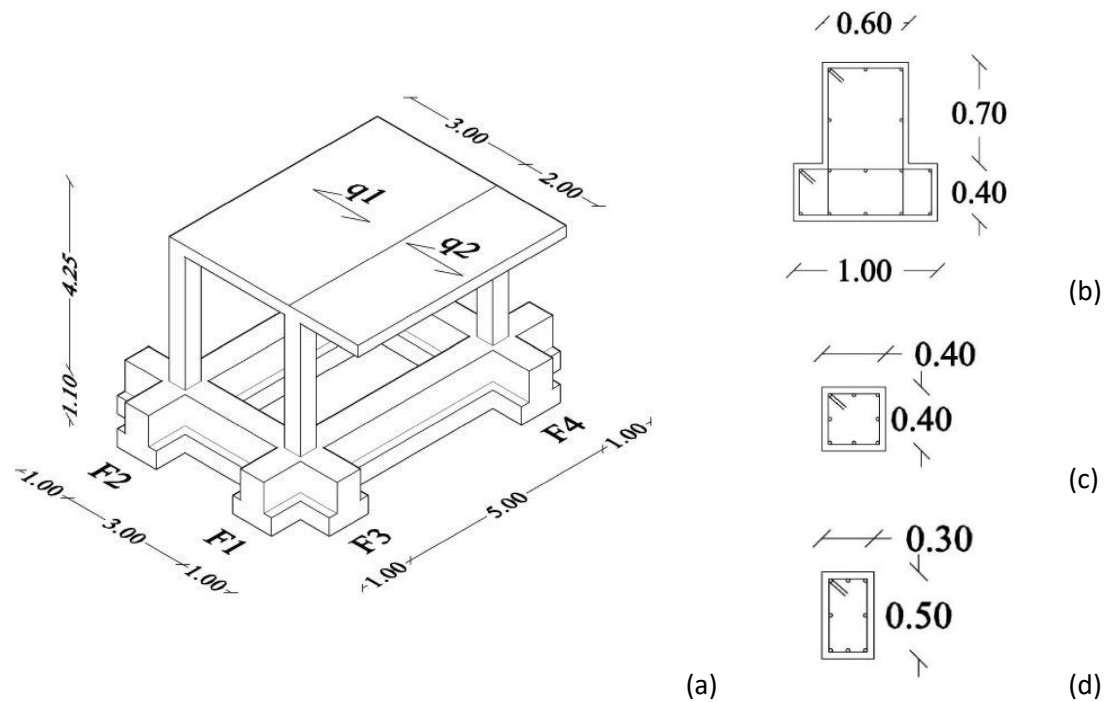


Fig. 4.12. Telaio tridimensionale (in m) e carichi applicati (a); sezione trasversale trave di fondazione (b), colonne (c) e travi in elevazione (d).

Il solaio, pensato per civile abitazione, ha carichi $G_1=4.0$ kN/m², $G_2=1.0$ kN/m² e $Q_{var}=2.0$ kN/m² nella campata interna e $Q_{var}=4.0$ kN/m² sullo sbalzo. La fattorizzazione allo stato limite ultimo porta alla distribuzione di carico sul solaio q_1 e q_2 ed al peso delle travi q_3 (Tab. 4-6).

Carico	Valore
q_1 (Carico SLU su solaio)	9.70kN/m ²
q_2 (Carico SLU su sbalzo)	12.50kN/m ²
q_3 (Peso proprio trave)	4.88 kN/m

Tab. 4-6. Carichi su telaio

Nelle Fig. 4.13 sono riportati i diagrammi dei momenti flettenti delle travi di fondazione. Con la linea continua è indicato il modello con rigidezza torsionale completa (G_{t_full}), mentre con la linea tratteggiata quello con rigidezza trasversale ridotta($G_{t_reduced}$). Nella Fig. 4.13,a si nota che, sulla trave $F1$, il momento flettente relativo al modello con $G_{t_reduced}$ è costantemente superiore al momento relativo al modello con G_{t_full} . Sulle altre travi di fondazione succede esattamente l'opposto.

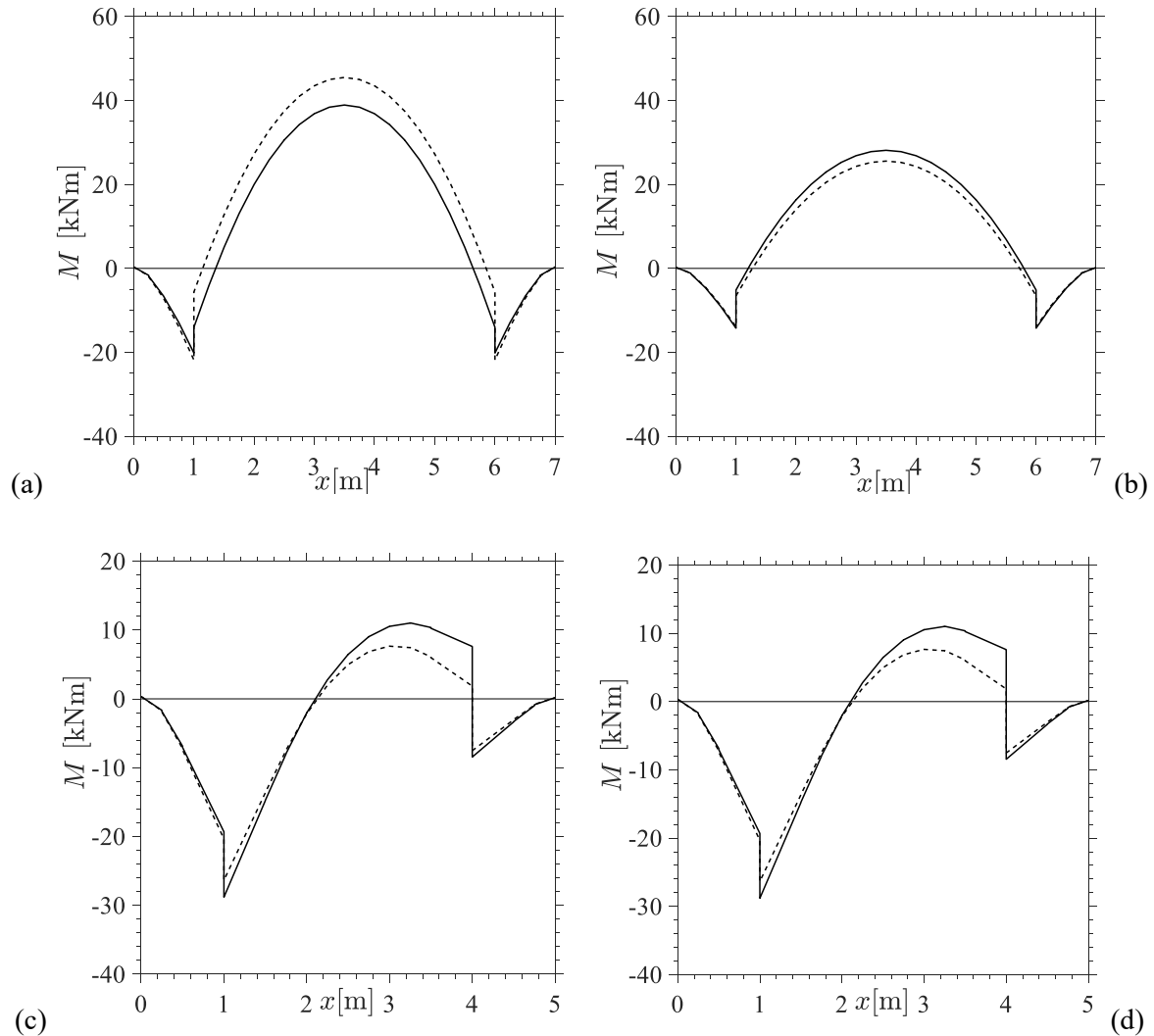


Fig. 4.13. Momento flettente su travi di fondazione, $F1$ (a) $F2$ (b) $F3$ (c) $F4$ (d). Rigidezza torsionale completa (linea continua), rigidezza torsionale ridotta (linea tratteggiata)

Nella Tab. 4-7 sono riportati i valori delle massime differenze relative tra i momenti flettenti. Le differenze maggiori si hanno in corrispondenza delle travi F3/F4 parallele al lato corto.

Modello	$E_s=25\text{MPa}$		
	Momento flettente [kNm]		
	Trave di fondazione $F1$	Trave di fondazione $F2$	Trave di fondazione $F3/F4$
FE-BIE(G_t full)	38.91	28.12	7.61
FE-BIE(G_t reduced)	45.48 (17%)	25.55 (-9%)	1.85 (-76%)

Tab. 4-7. Valore del modulo del momento flettente ed errore relativo $(M_{G_t_Reduced}-M_{G_t_Full})/(M_{G_t_Full}) \times 100$.

Nelle Fig. 4.14 sono riportati momenti torcenti, con la linea continua è indicato il modello con rigidezza torsionale completa (G_t full), mentre con la linea tratteggiata quello con rigidezza trasversale ridotta (G_t reduced). La presenza dello sbalzo fa nascere, nelle travi in elevazione ortogonali ad esso, un momento torcente. Vista l'asimmetria del carico anche sulle fondazioni risulterà una torsione

diversa da 0. In particolare si può notare come, nelle travi di Fig. 4.14c,d, il valore della torsione cresce in prossimità dei pilastri che sostengono lo sbalzo. La riduzione della rigidezza torsionale, in definitiva, porta ad una redistribuzione delle azioni flettenti sulle travi di fondazione.

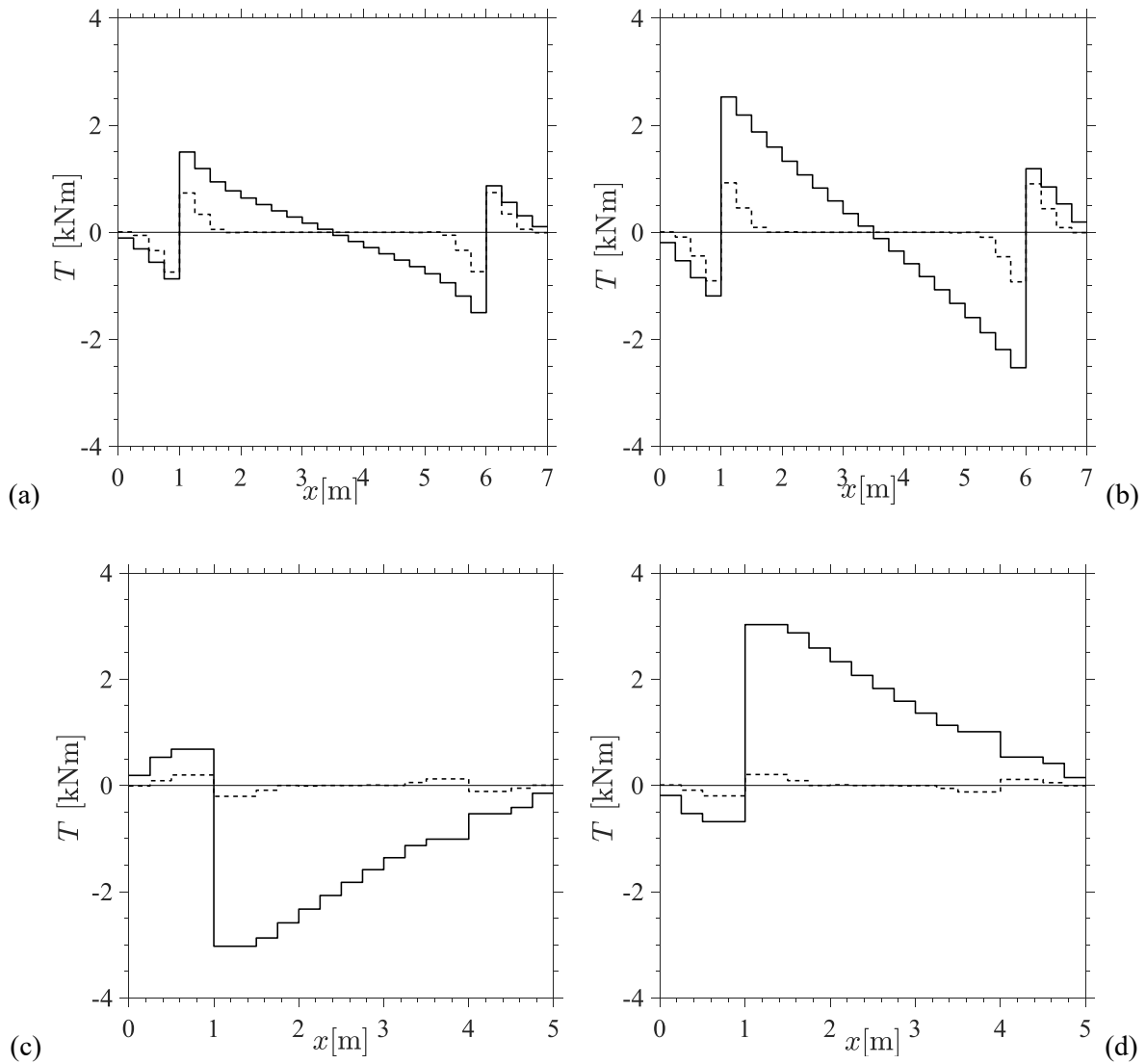


Fig. 4.14. Torsione travi di fondazione, $F1$ (a) $F2$ (b) $F3$ (c) $F4$ (d). Rigidezza torsionale completa (linea continua), rigidezza torsionale ridotta (linea tratteggiata).

Nelle Fig. 4.15 sono riportati i diagrammi del momento flettente e del momento torcente relativi all'intera struttura.

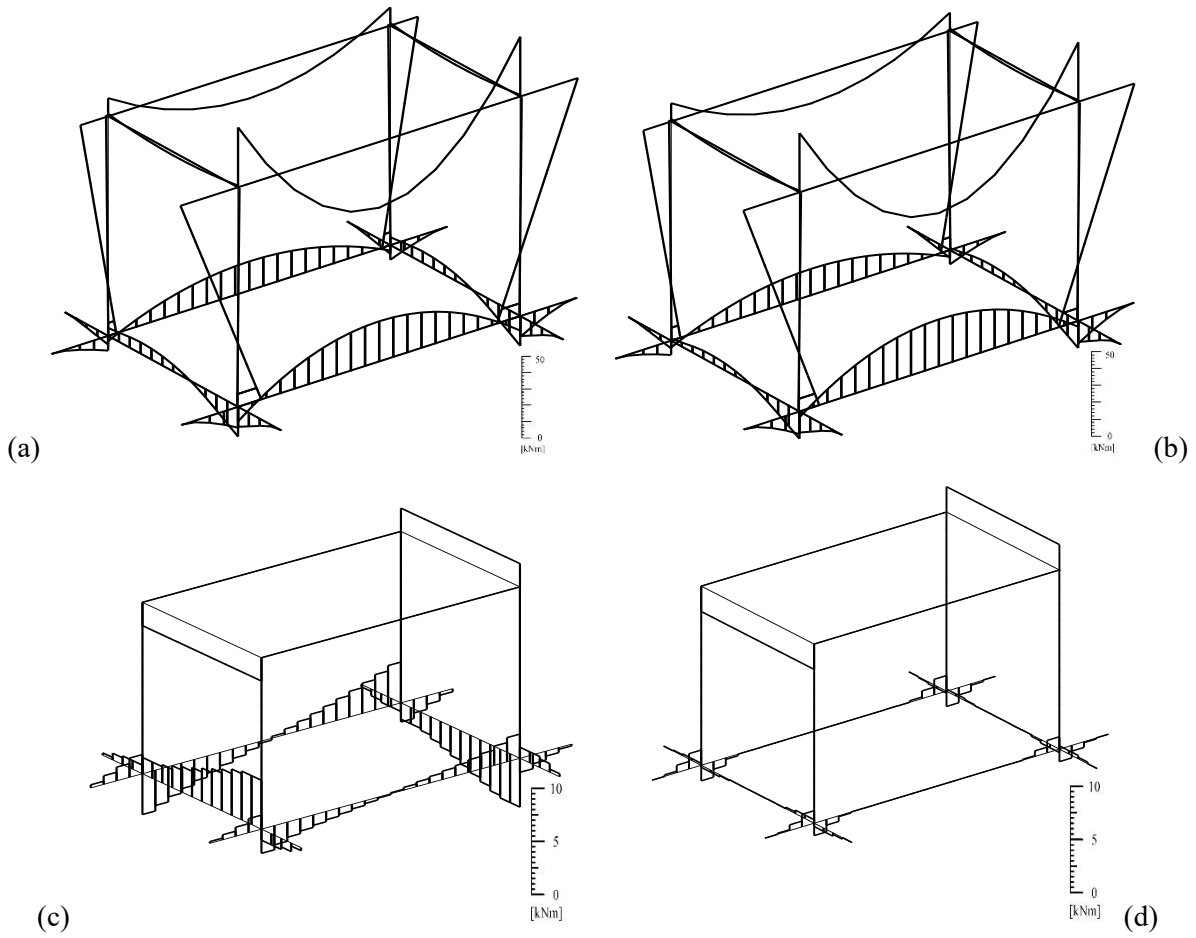


Fig. 4.15. Rigidezza torsionale completa: momento flettente (a) torsione (c); Rigidezza torsionale ridotta: momento flettente (b) torsione (d).

4.5 Telaio multipiano

Si riporta di seguito un'applicazione del metodo FE-BIE a telai tridimensionali su suolo omogeneo elastico isotropo. Per il suolo sono stati assunti i seguenti valori: $E_s=25$ MPa, $E_s=300$ MPa con $\nu_s=0.2$, mentre per la struttura sono stati assunti $E_b=30$ GPa e $G_b=13$ GPa. Il telaio studiato (Fig. 4.16) è composto da travi di fondazione a T rovescia con larghezza di 1.00 m, altezza della soletta di 0.40 m, collo largo 0.60 m e alto 0.70 m. I pilastri quadrati di lato 0.40 m hanno altezza di 4.25 m e 3.75 m rispettivamente per il piano terra e primo piano. Le travi sono emergenti e presentano dimensioni di 0.30 m e 0.50 m rispettivamente per la base e l'altezza.

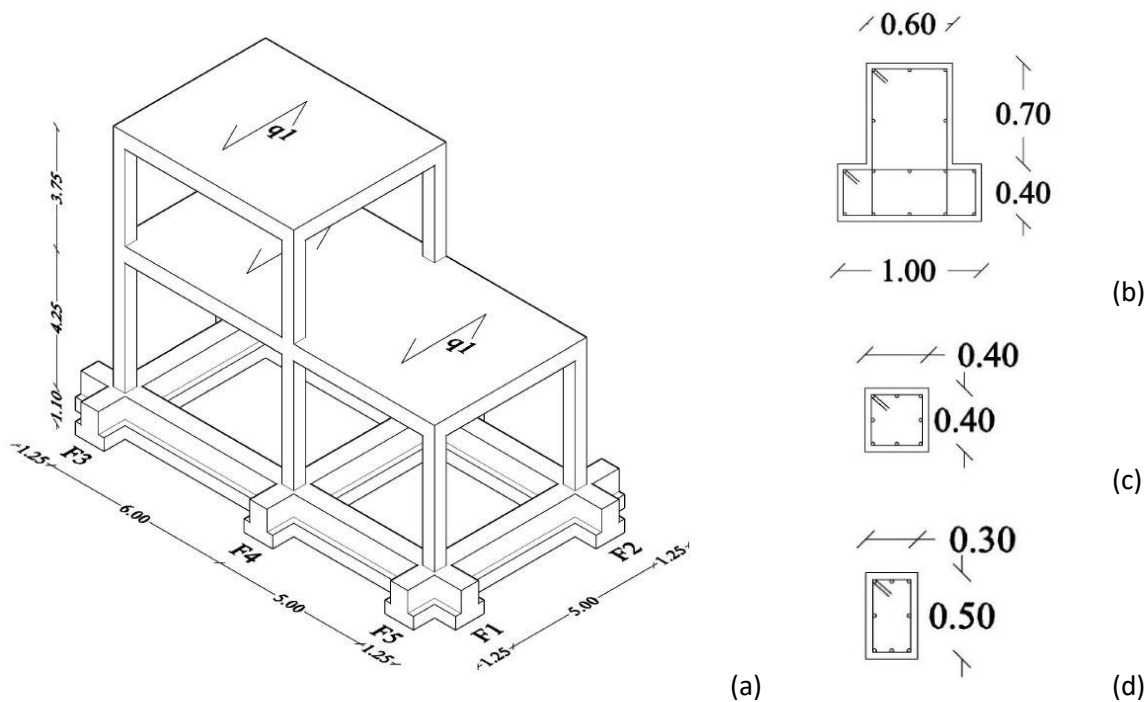


Fig. 4.16. Telaio tridimensionale (in m) e carichi applicati (a); sezione trasversale trave di fondazione (b), colonne (c) e travi in elevazione (d).

I solai, pensati per civile abitazione, hanno la medesima orditura e carichi $G_1=4.5$ kN/m², $G_2=1.0$ kN/m² e $Q_{var}=2.0$ kN/m². La fattorizzazione allo stato limite ultimo porta alla distribuzione di carico sul solaio q_1 ed al peso delle travi q_2 (Tab. 4-8).

Carico	Valore
q_1 (Carico SLU su solaio)	10.15 kN/m ²
q_2 (Peso proprio trave)	4.88 kN/m

Tab. 4-8. Carichi su telaio

Il modello numerico è realizzato con elementi finiti *beam* di Eulero-Bernoulli. La parte deformabile della fondazione è suddivisa nella direzione dell'asse in $n_{el_asse}=170$ e nella direzione

ortogonale in $n_{el_orto}=4$, mentre l'intersezione tra le travi è gestita con 6 elementi punch rigidi. La discretizzazione è realizzata con raffittimenti in prossimità delle estremità, per meglio cogliere le singularità dovute al salto di rigidità tra trave e terreno (Fig. 4.17). In particolare per la discretizzazione trasversale è stato utilizzato un valore di β pari a 3.

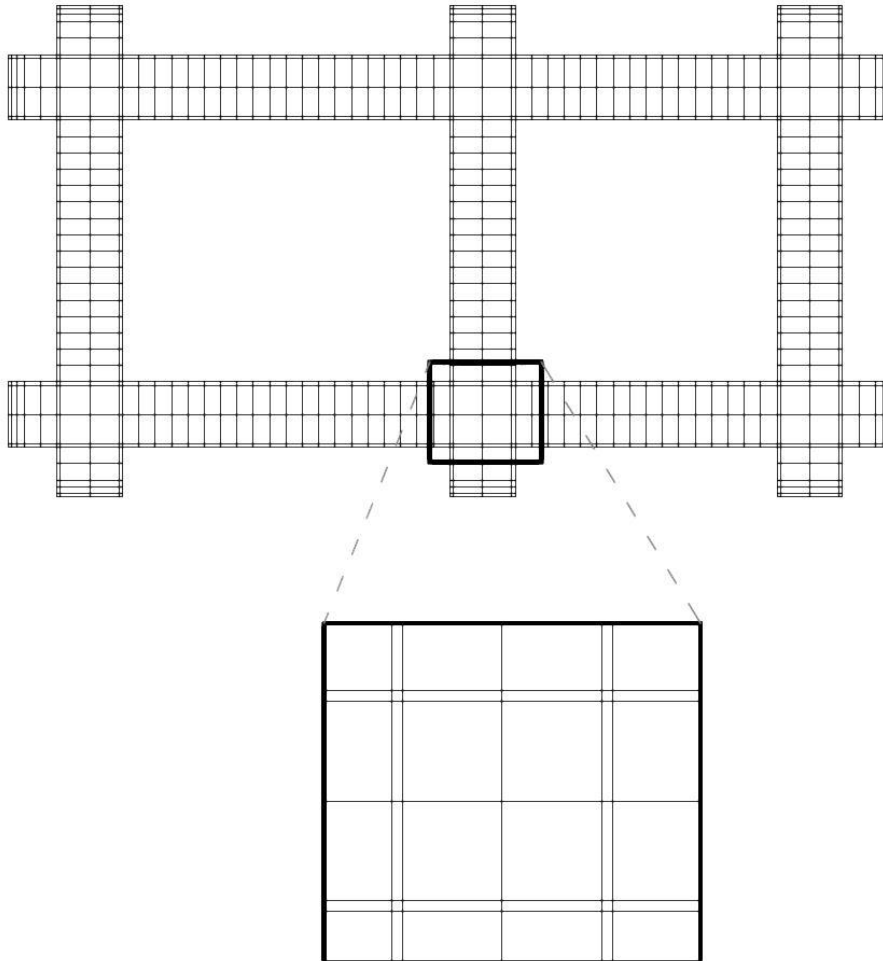


Fig. 4.17. Discretizzazione della superficie di contatto.

Alcuni test preliminari hanno confermato che il modello numerico assicura un'adeguata convergenza della soluzione. La Fig. 4.18 riporta la deformata della struttura sui diversi tipi di suolo e, per confronto, la condizione indeformata (linea tratteggiata). Lo spostamento verticale massimo sotto i carichi gravitazionali viene raggiunto nella sezione di estremità della trave di fondazione per $E_s=25\text{MPa}$ (Fig. 4.18,a) e vale circa 5 mm. Per il suolo più rigido con $E_s=300\text{MPa}$ (Fig. 4.18,b) lo spostamento massimo viene raggiunto nella zona centrale e vale circa 0.4 mm. Lo stato tensionale all'interfaccia fondazione-terreno è illustrato nella Fig. 4.19 (tensioni normali r_z). Nei due modelli di sottosuolo le tensioni massime si registrano all'estremità della fondazione, con picchi di circa 430kPa. La tensione media all'interfaccia invece si attesta intorno a 100kPa. Volendo mettere in evidenza

l'importanza di uno studio tridimensionale dell'interazione suolo-struttura sono stati realizzati diversi confronti tra il modello FE-BIE, il modello FEM 3D ed il classico modello di molle alla Winkler.

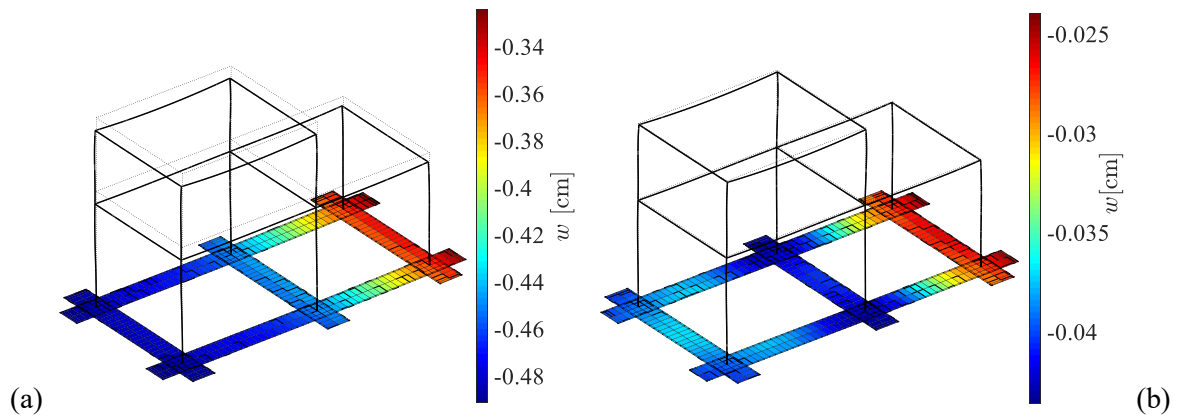


Fig. 4.18. Spostamento verticale. $E_s=25\text{MPa}$ (a), $E_s=300\text{MPa}$ (b).

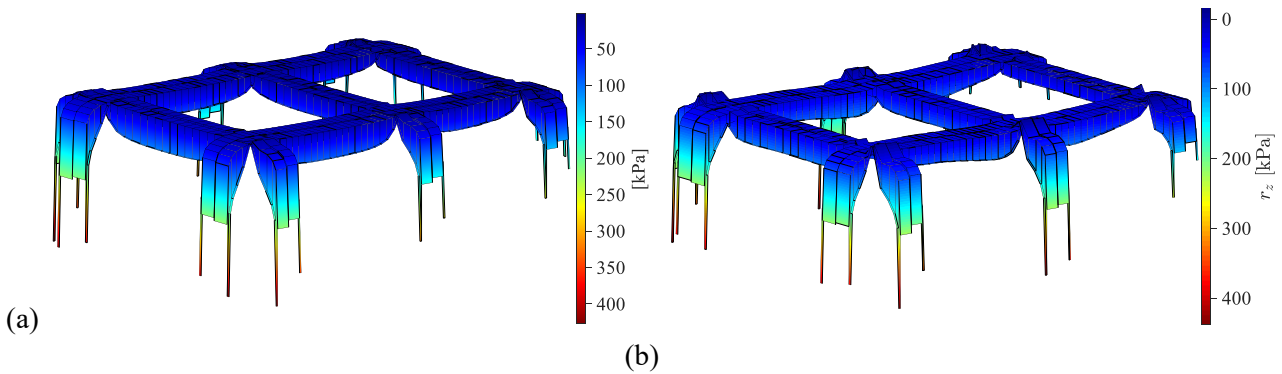


Fig. 4.19. Reazioni verticali. $E_s=25\text{MPa}$ (a), $E_s=300\text{MPa}$ (b).

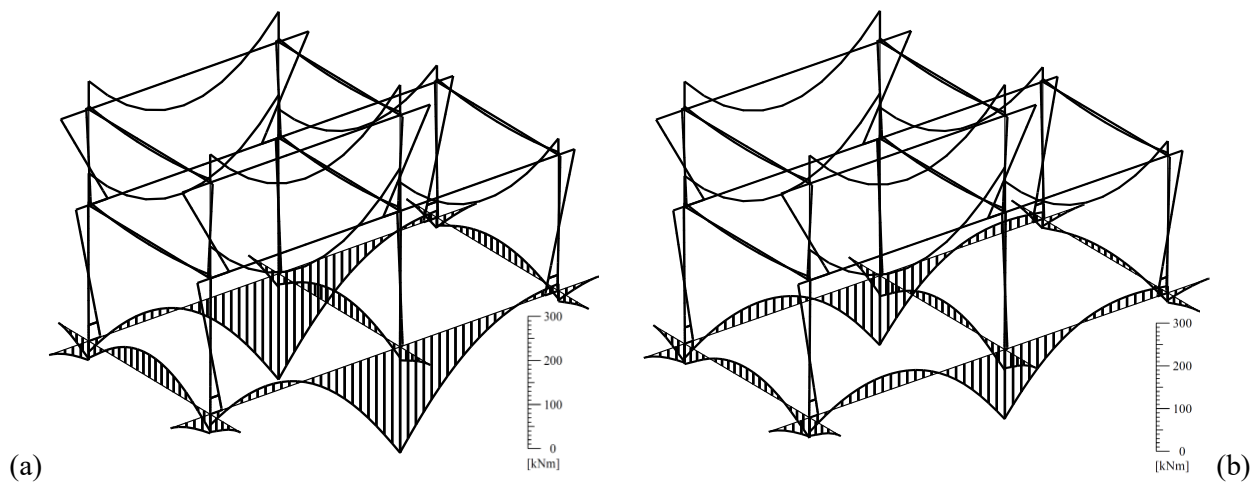


Fig. 4.20. Momento flettente con $E_s=25\text{MPa}$ (a) e $E_s=300\text{MPa}$ (b).

4.5.1 Confronto tra FE-BIE e FEM 3D

Per confermare la convergenza della soluzione è stato realizzato un modello FEM 3D. Il terreno è stato modellato con circa 170000 elementi di tipo *Brick*, raffittiti in prossimità dell'interfaccia terreno-struttura (Fig. 4.21) ed ha dimensioni pari a 4 volte la lunghezza della fondazione nelle tre direzioni x , y e z . Tali dimensioni sono necessarie per estinguere, agli estremi del dominio, gli spostamenti nel sottosuolo. La struttura in elevazione è stata modellata attraverso elementi di tipo *beam* con le medesime caratteristiche geometriche ed elastiche del modello FE-BIE. Il collegamento tra suolo e struttura è stato realizzato mediante l'utilizzo di elementi *rigid link* che mettono in comunicazione i nodi dei *brick* del terreno con quelli delle *beam* di fondazione. Per creare l'intersezione fondazione-sovrastuttura, e per simulare la presenza di *punch* rigidi, sono stati inseriti elementi con elevata rigidità. Sono stati realizzati confronti tra modelli tridimensionali (Fig. 4.21,b e Fig. 4.22,b) e modelli bidimensionali (Fig. 4.21,a e Fig. 4.22,a).

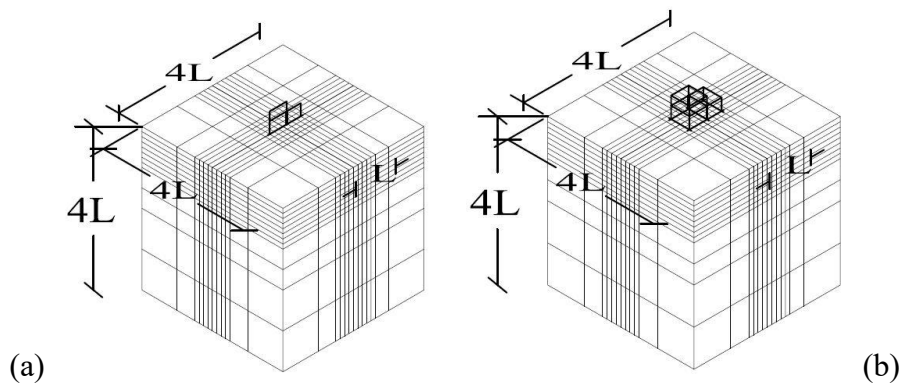


Fig. 4.21. Meshes utilizzate per il modello ad elementi finiti tridimensionali: telaio bidimensionale (a), telaio tridimensionale (b).

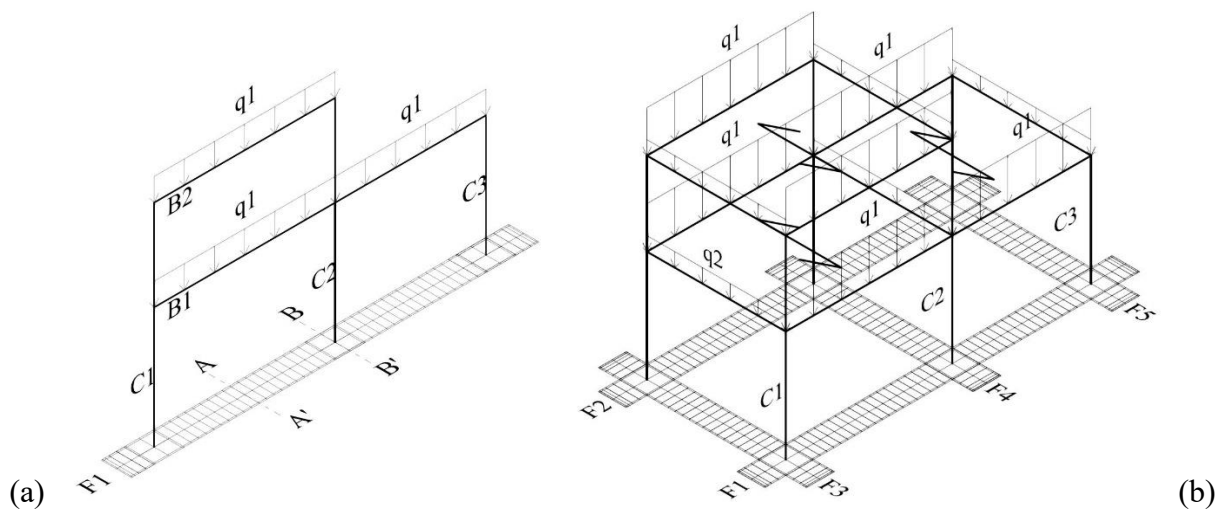


Fig. 4.22. Telaio con discretizzazione della superficie di contatto: bidimensionale (a), tridimensionale (b).

Le Fig. 4.23 riportano gli andamenti degli spostamenti verticali relativi al caso bidimensionale per suolo con $E_s=25\text{MPa}$ Fig. 4.23(a) e $E_s=300\text{MPa}$ Fig. 4.23(b), mentre le Fig. 4.23(c, d) rappresentano gli spostamenti verticali nel caso tridimensionale. Il confronto fra la Fig. 4.23,b e la Fig. 4.23,d evidenzia l'importanza della modellazione di telai 3D. Si nota, nel caso tridimensionale, l'effetto delle travi ortogonali che contribuiscono alla rigidezza in corrispondenza dei pilastri, riducendo la rotazione della trave F1. L'andamento delle reazioni normali, calcolato lungo l'asse della trave, è riportato per $E_s=25\text{MPa}$ nella Fig. 4.24,a e per $E_s=300\text{MPa}$ nella Fig. 4.24,b. La differenza tra i modelli FEM e i modelli FE-BIE è di circa il 15%. Nei modelli tridimensionali si nota l'effetto delle travi ortogonali che producono una riduzione delle tensioni di contatto in prossimità dell'innesto tra trave di fondazione e pilastro.

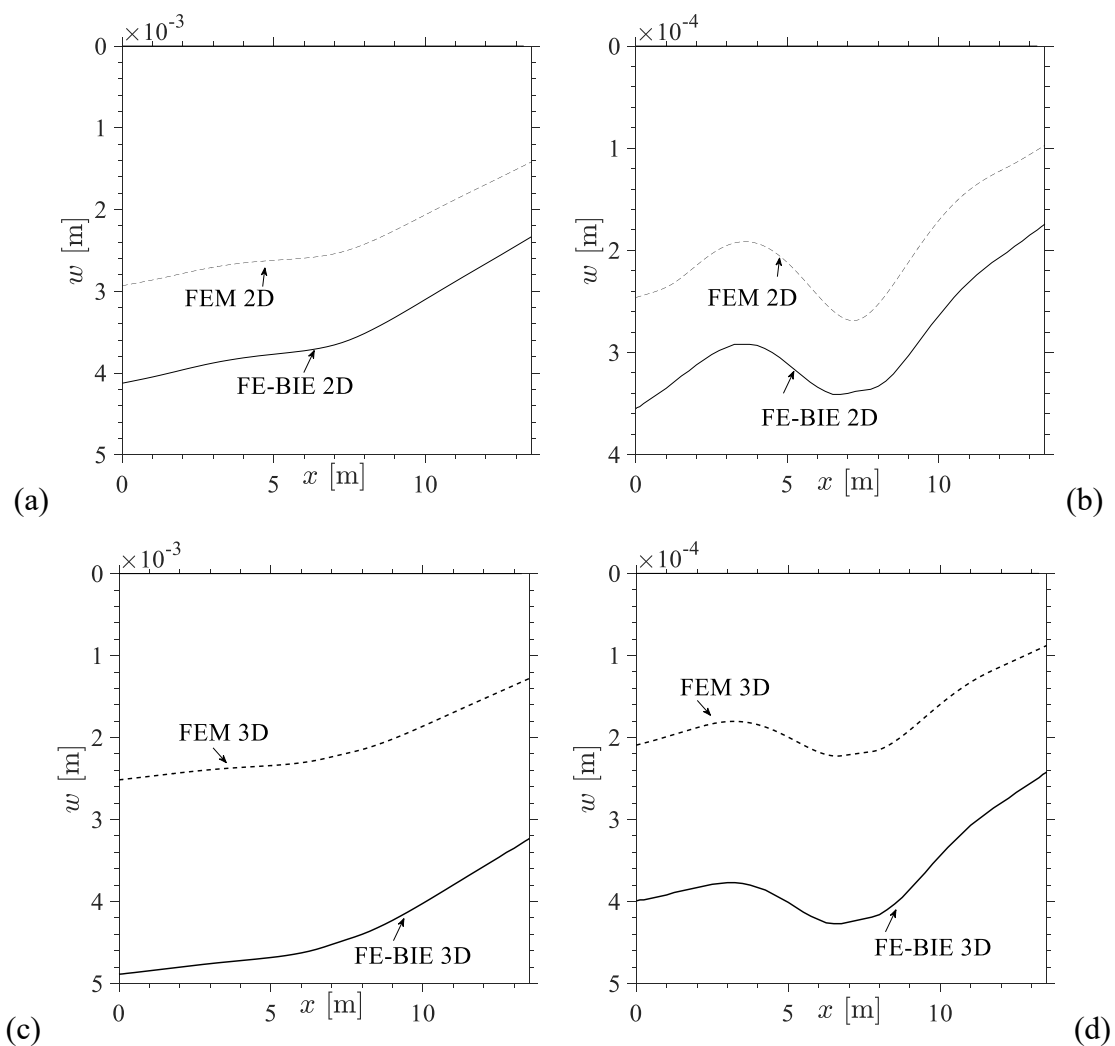


Fig. 4.23. Spostamento verticale della trave di fondazione *F1* con $E_s=25\text{MPa}$ (a, c) e $E_s=300\text{MPa}$ (b, d). FE-BIE (linea continua), FEM (linea tratteggiata).

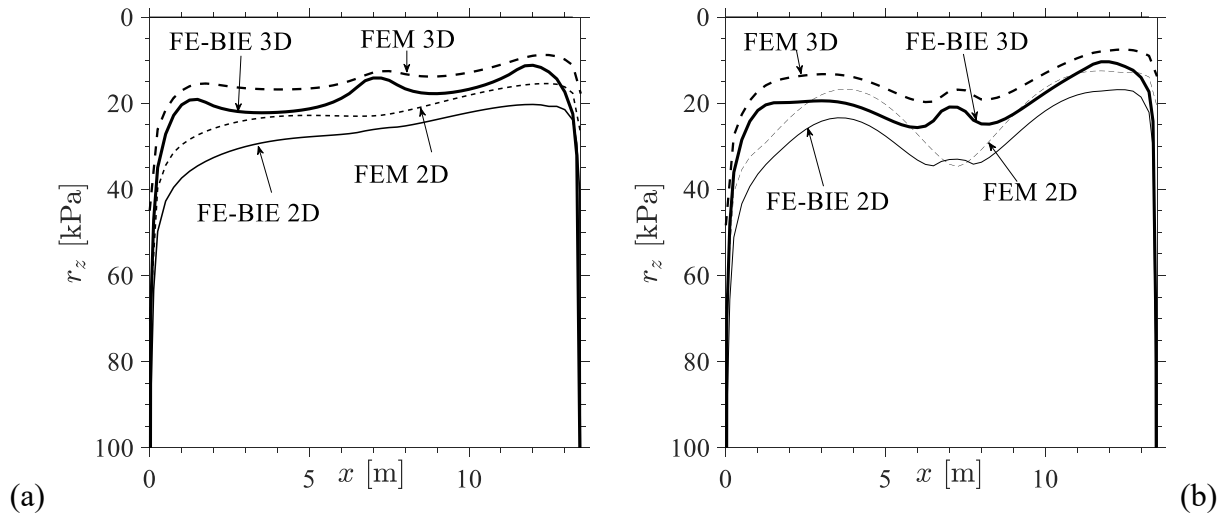


Fig. 4.24. Reazioni verticali sotto la trave di fondazione FI con $E_s=25\text{MPa}$ (a) e $E_s=300\text{MPa}$ (b). FE-BIE 3D (linea continua spessa), FE-BIE 2D (linea continua), FEM 3D (linea tratteggiata spessa), FEM 2D (linea tratteggiata).

Le Fig. 4.25 a, b mostrano l'andamento del momento flettente della trave FI (Fig. 4.22) su suolo $E_s=25\text{MPa}$ (Fig. 4.22,a) e $E_s=300\text{MPa}$ (Fig. 4.22,b). Si nota che i momenti calcolati con i due diversi approcci (FEM e FE-BIE) portano sostanzialmente allo stesso risultato, con errori relativi inferiori al 5%. Si nota che all'aumentare della rigidità del terreno l'intensità dell'azione interna assume valori inferiori, in particolare il momento negativo (nella sezione B-B' di Fig. 4.22) passa da 248.48 kNm a 161.77 kNm.

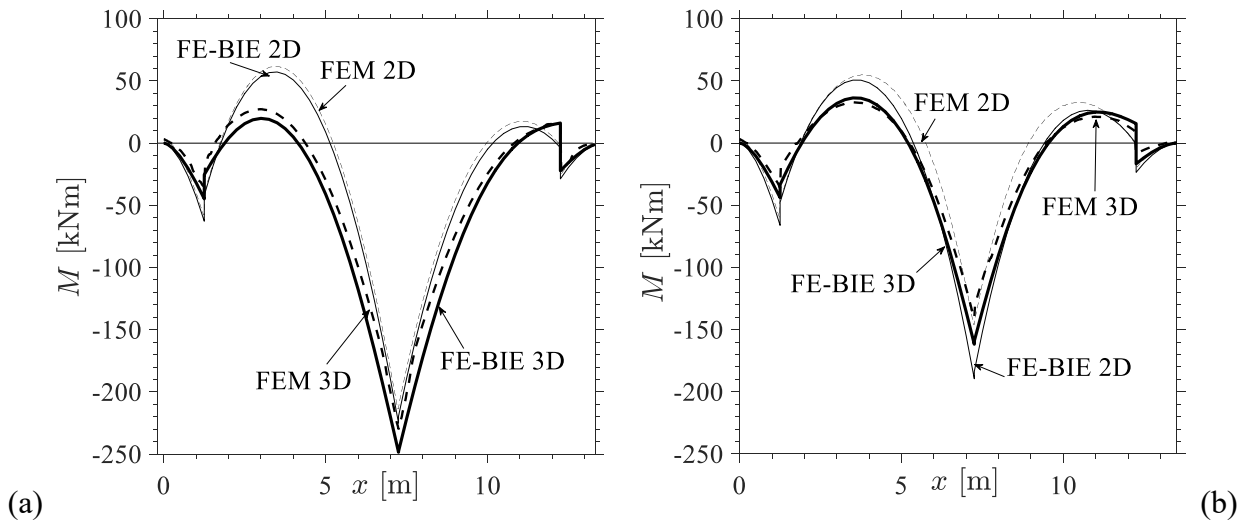


Fig. 4.25. Momento flettente della trave di fondazione FI con $E_s=25\text{MPa}$ (a) e $E_s=300\text{MPa}$ (b). FE-BIE 3D (linea continua spessa), FE-BIE 2D (linea continua), FEM 3D (linea tratteggiata spessa), FEM 2D (linea tratteggiata).

4.5.2 Confronto tra FE-BIE e Winkler

Il suolo alla Winkler è uno dei modelli più utilizzati per il calcolo delle sollecitazioni indotte dal terreno sulla struttura di fondazione. Nel presente paragrafo si stima la costante di Winkler partendo da semplici correlazioni presenti in letteratura, in particolare si fa riferimento alle correlazioni di Vesic (Eq. 4.7) e Biot (Eq. 4.8) che portano ai valori presenti nella Tab. 4-9. Usando le costanti di Winkler ottenute dalle correlazioni si ottengono confronti in termini di spostamento (Fig. 4.26) e di momento flettente (Fig. 4.27).

Modello	k_s [daN/cm ³] ($E_s=25$ MPa)	k_s [daN/cm ³] ($E_s=300$ MPa)
Vesic (W1)	1.15	17.02
Biot (W2)	1.51	23.72

Tab. 4-9. Valori della costante di Winkler per $E_s=25$ MPa e $E_s=300$ MPa.

Nelle Fig. 4.26 a, b è riportato l'andamento della deformata della trave di fondazione FI , si nota che gli abbassamenti relativi ai modelli con costanti k_s , calcolate con W1 e W2, sono sostanzialmente uguali, mentre si nota un maggiore abbassamento nei modelli FE-BIE.

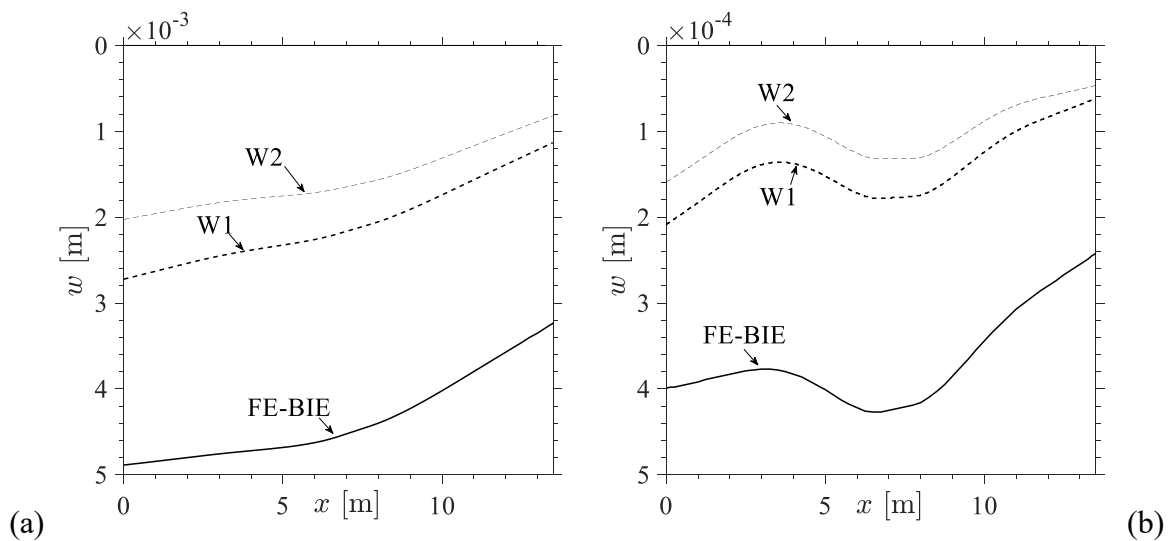


Fig. 4.26. Spostamento verticale della trave di fondazione FI con $E_s=25$ MPa (a) e $E_s=300$ MPa (b). FE-BIE (linea continua), W1 (linea tratteggiata spessa), W2 (linea tratteggiata).

Il confronto in termini di sollecitazioni flettenti viene illustrato nelle Fig. 4.27. I valori di momento flettente, registrati per i modelli che utilizzano la teoria di Winkler, sono sostanzialmente uguali nella trave di fondazione $F1$, indipendentemente dalla rigidità del suolo e differiscono di circa il 6% nella trave $F3$. Confrontando i valori di momento tra modelli Winkler e FE-BIE (vedere Tab. 4-10) si registrano differenze relative del 107% in campata (sezione A-A' Fig. 4.22) e del 24% in prossimità del pilastro centrale (sezione B-B' Fig. 4.22) con terreno di rigidità $E_s=25\text{MPa}$.

Le differenze relative (calcolate come $(M_{wi}-M_{FE-BIE})/(M_{FE-BIE})\times 100$) decrescono al crescere della rigidità del terreno come evidenziato dalla Fig. 4.28.

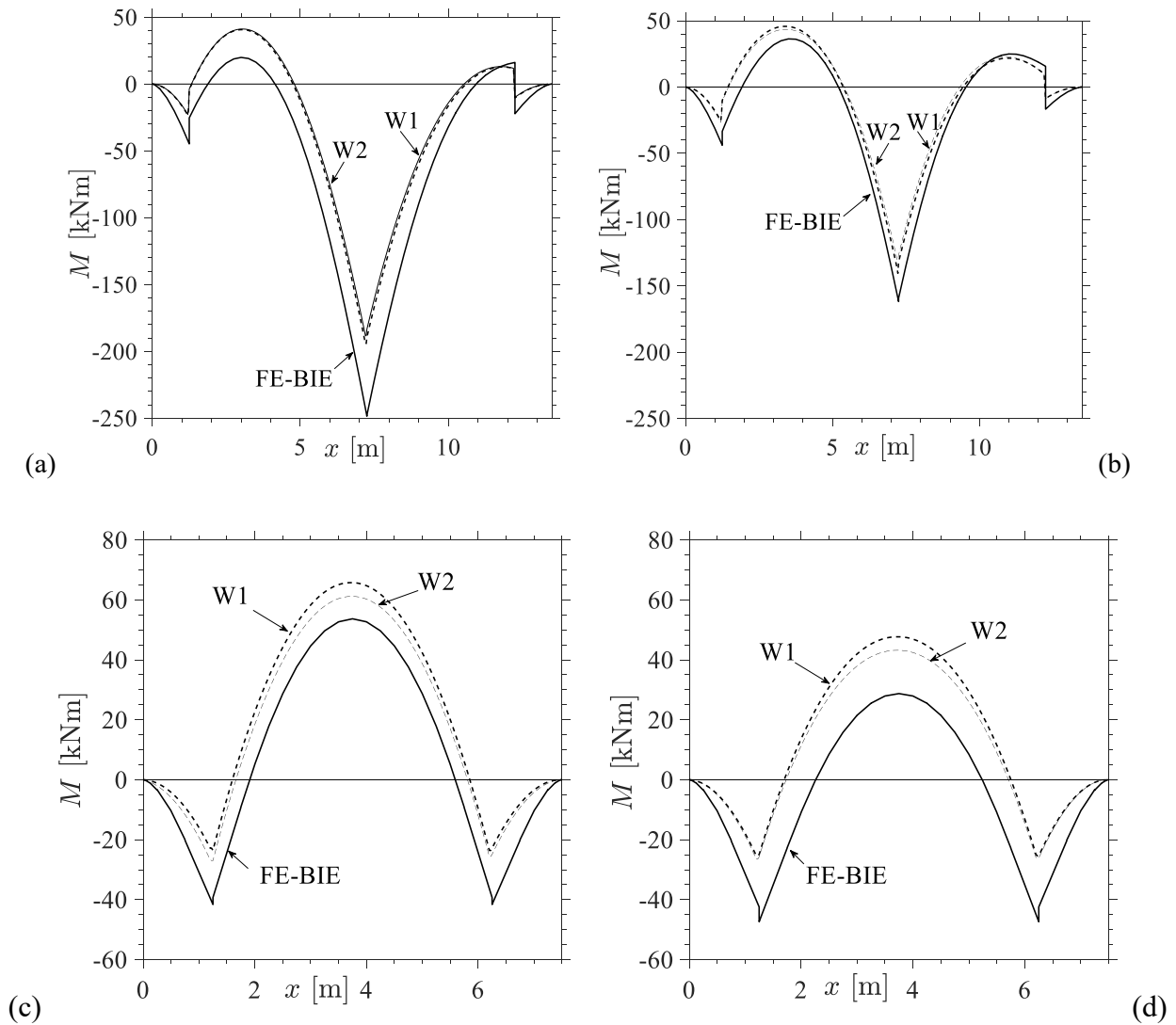


Fig. 4.27. Momento flettente trave di fondazione $F1$ (a, b) e $F3$ (c, d) con $E_s=25\text{MPa}$ (a, c) e $E_s=300\text{MPa}$ (b, d). FE-BIE (linea continua), W1 (linea tratteggiata spessa), W2 (linea tratteggiata).

Modello	$E_s=25\text{MPa}$		$E_s=300\text{MPa}$	
	Momento flettente [kNm]		Momento flettente [kNm]	
	Sezione A-A'	Sezione B-B'	Sezione A-A'	Sezione B-B'
FE-BIE	19.92	248.48	36.30	161.77
Vesic (W1)	40.68 (104%)	194.26 (22%)	45.75 (26%)	140.57 (13%)
Biot (W2)	41.16 (107%)	188.31 (24%)	43.49 (20%)	130.24 (19%)

Tab. 4-10. Valori del modulo del momento flettente e dell'errore relativo $(M_{wi}-M_{FE-BIE})/(M_{FE-BIE}) \times 100$.

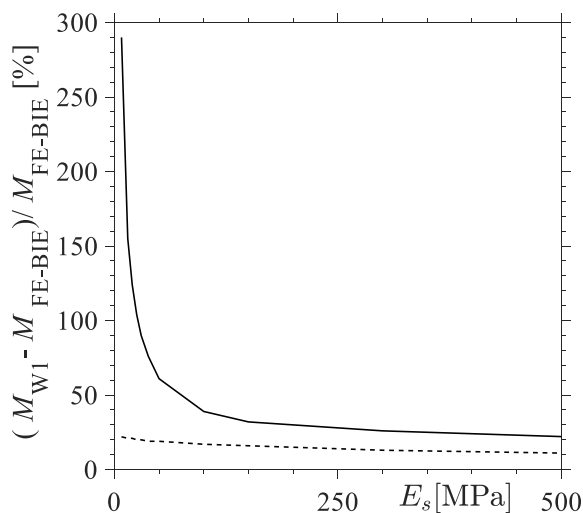


Fig. 4.28. Differenza relativa in termini di momento flettente tra il modello FE-BIE ed il modello W1 per la trave di fondazione F1. Sezione A-A'(linea continua), sezione B-B'(linea tratteggiata).

Nelle Fig. 4.29 sono riportati i momenti flettenti relativi alle travi in elevazione *B1* e *B2* (Fig. 4.22). Si nota che i valori delle sollecitazioni risultano del tutto indipendenti dalla rigidezza del terreno e dal modello di analisi utilizzato.

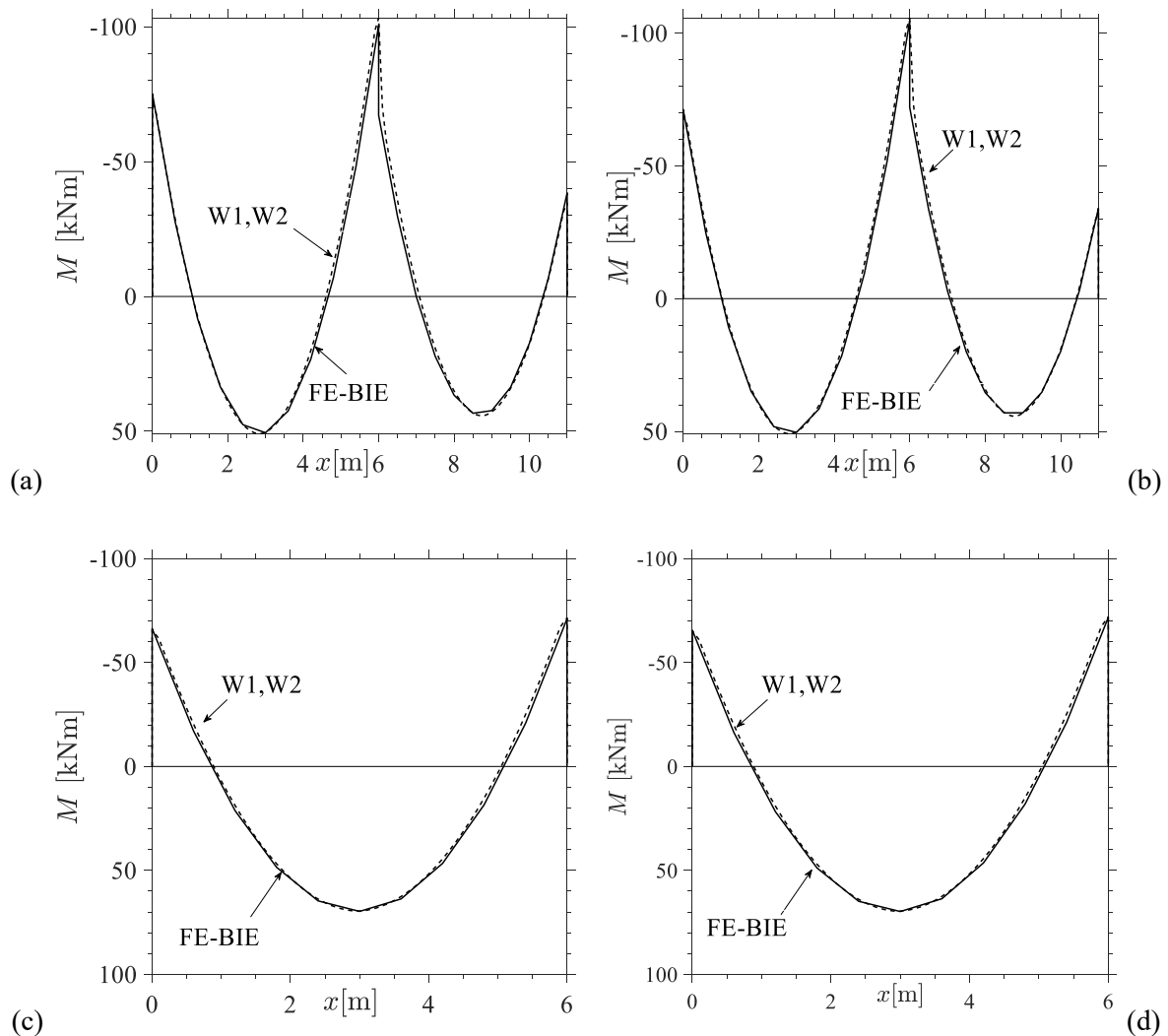


Fig. 4.29. Momento flettente per la trave BI (a, b) e $B2$ (c, d) con $E_s=25\text{MPa}$ (a, c) e $E_s=300\text{MPa}$ (b, d). FE-BIE (linea continua), W1 (linea tratteggiata spessa), W2 (linea tratteggiata).

4.5.3 Confronto con modelli semplificati

Nelle Fig. 4.30 a, b è riportato il diagramma del momento flettente relativo ad alcuni metodi utilizzati nella progettazione di travi di fondazione. Oltre agli approcci già visti FE-BIE e Winkler, è stato considerato il metodo della trave infinitamente più rigida del suolo (paragrafo 4.1), in particolare con RS si indica una sovrastruttura rigida (travi incastrate) e con DS una sovrastruttura deformabile (travi incernierate). I valori del momento di RS e DS sono relativamente vicini tra loro, ma differiscono dai metodi che considerano deformabili sia la trave che il terreno. In particolare si nota una sottostima del momento che tende le fibre inferiori della fondazione ed una sovrastima del momento che tende le fibre superiori. Il valore del momento, dei metodi con trave deformabile, sembra tendere al valore registrato per RS e DS all'aumentare della rigidezza del terreno e non al diminuire come ci si aspetterebbe. In realtà, i metodi semplificati sono modelli di Winkler con valori

k_s molto bassi, nella Fig. 4.28 si mostra che con valori di E_s piccoli l'errore tra Winkler e FEBIE è molto grande. L'accuratezza dei risultati, che ci si aspetterebbe, viene quindi a mancare. Per maggiore chiarezza, nella Fig. 4.30 c sono riportati i confronti tra i modelli Winkler e FE-BIE al variare della rigidità del suolo. In rosso ci sono i confronti con terreno deformabile, mentre in blu quelli con terreno rigido. Il valore del momento, in prossimità del pilastro centrale, relativo al modello FE-BIE con terreno rigido (linea blu continua) dovrebbe essere confrontabile con il modello di Winkler con suolo rigido (linea blu tratteggiata), invece in virtù dell'errore relativo mostrato nella Fig. 4.28, si avvicina ("casualmente") al caso di suolo Winkler con terreno deformabile (linea rossa tratteggiata). Quindi, si può dire che i modelli semplificati sopra descritti si comportano come i modelli elastici con bassa rigidezza, pur avendo un'elevata differenza relativa in termini di sollecitazioni.

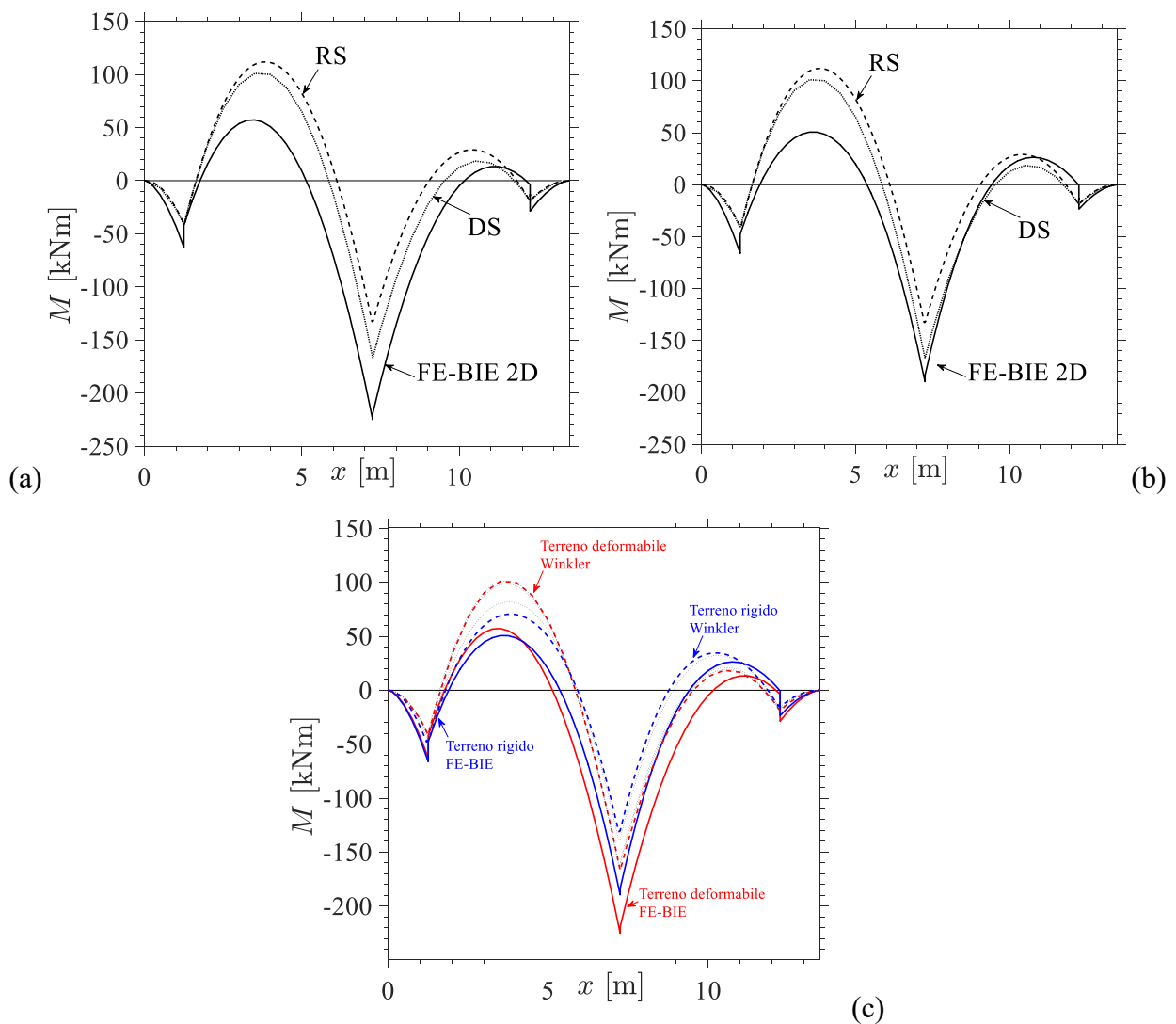


Fig. 4.30. Momento flettente sulla trave di fondazione FI con $E_s=25\text{MPa}$ (a) e $E_s=300\text{MPa}$ (b). Confronto tra FE-BIE2D e Winkler al variare della rigidità (c).

4.6 Canale prefabbricato

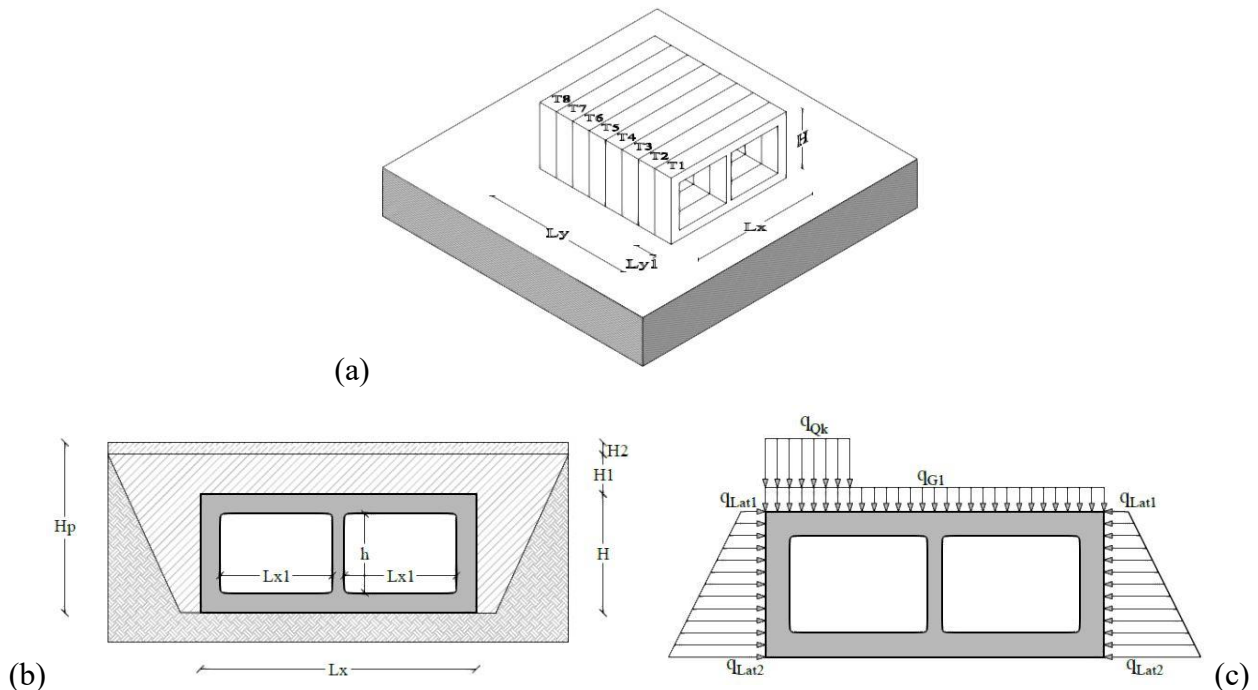


Fig. 4.31. Canale sotterraneo prefabbricato a doppia cella. Vista tridimensionale del caso studiato(a); sezione trasversale (b); configurazione di carico tipo (c)

Nelle Fig. 4.31(a, b) è riportato il modello di canale prefabbricato analizzato. Lo scopo dell'esempio è quello di mettere in evidenza il differente comportamento della struttura al variare della rigidità delle travi di collegamento e dei carichi. Il canale è utilizzato per permettere l'incrocio tra il percorso del corso d'acqua e la sede stradale. Il piano di posa del canale è posto ad una profondità $H_p=4.5\text{m}$, le dimensioni risultano: $H=3.5\text{m}$, $L_x=7\text{m}$ ed $L_y=8\text{m}$. Il canale è realizzato con 8 elementi prefabbricati (Telai $T1-T8$ in Fig. 4.31a) di lunghezza $L_{y1}=1\text{m}$ tenuti insieme da appositi dispositivi trasversali che consentono puntualmente la continuità degli spostamenti e delle rotazioni. Al di sopra del canale sono presenti i carichi gravitazionali q_{G1} (Fig. 4.31c) composti da un ricoprimento di terreno di altezza $H_1=1\text{m}$ ed il pacchetto stradale di altezza $H_2=0.3\text{m}$. Il carico variabile q_{Qk} , dato dal traffico automobilistico, è stato preso in accordo con le norme tecniche. Infine, il terreno laterale costituisce il carico lineare orizzontale con valori q_{Lat1} e q_{Lat2} per la sommità e la base del canale, rispettivamente.

Parametro	Valore [kN/m]
q_{G1}	24.0
q_{Qk}	9.0
q_{Lat1}	20.0
q_{Lat2}	90.0

Tab. 4-11. Valori dei carichi distribuiti per le configurazioni considerate.

Il suolo è pensato con valori $E_s=25MPa$ $\nu_s=0.2$. Per la modellazione sono stati realizzati 8 telai affiancati e collegati tra loro da travi di collegamento (che rappresentano i dispositivi di giunzione) posizionate in prossimità dei nodi trave pilastro. Le travi di fondazione modellate con approccio FE-BIE, utilizzano una mesh $n_y=4$, $\beta=3$ e $n_{x,end}=3$.

A parità di carico orizzontale, sono state analizzate due configurazioni di carico verticale, nel seguito indicate con C_1 e C_2 . Nella C_1 si analizza il caso di soli carichi gravitazionali q_{G1} , nella C_2 si introduce, oltre a q_{G1} , un carico q_{Qk} sulle sole travi dei telai $T1-T2-T3-T4$ (per simulare il carico variabile su una corsia). Le due condizioni di carico sono state studiate al variare della rigidità dei dispositivi di giunzione trasversali, in particolare con R_{Rid} e R_{Inf} si fa riferimento a bassa rigidità e alta rigidità, rispettivamente.

4.6.1 Condizione di carico C_1

La condizione di carico C_1 prevede che la struttura sia caricata da carichi gravitazionali q_{G1} e carichi orizzontali q_{Lat} .

Nelle Fig. 4.32(a, b) sono riportate le deformate tridimensionali per la condizione C_1 , nel caso R_{Rid} e R_{Inf} . Per il caso R_{Rid} l'abbassamento massimo risulta di circa 0.620 cm, mentre per il caso R_{Inf} risulta circa 0.562 cm. Nei due casi si nota, per le travi sul bordo, una rotazione intorno al proprio asse, che induce sulle travi una leggera torsione come mostrato nelle Fig. 4.33. All'aumentare della rigidità dei dispositivi trasversali, si nota una deformata più uniforme.

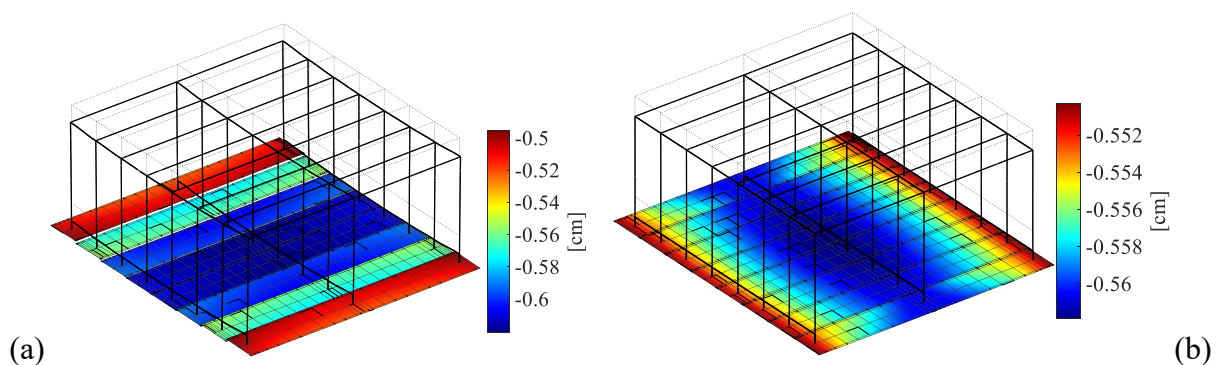


Fig. 4.32. Condizione di carico C_1 , deformata tridimensionale modello con R_{Rid} (a) e R_{Inf} (b).

Nelle Fig. 4.33 sono riportati, per le travi di fondazione, gli andamenti del momento torcente T e del momento flettente M . L'entità del momento torcente risulta più piccola sulle travi centrali, cresce andando verso i telai di bordo e al diminuire della rigidità trasversale. Il valore in modulo risulta essere piccolo in relazione alle resistenze in gioco. Con riferimento ai momenti flettenti sulle diverse

fondazioni, si nota che a parità di rigidezza della connessione trasversale, le travi maggiormente caricate risultano essere quelle esterne, con valori più grandi nel caso di R_{Inf} . Inoltre, si nota che al diminuire della rigidezza delle connessioni tutte le fondazioni tendono ad avere gli stessi momenti flettenti, andando di fatto ad essere sollecitate in proporzione al carico agente sul telaio.

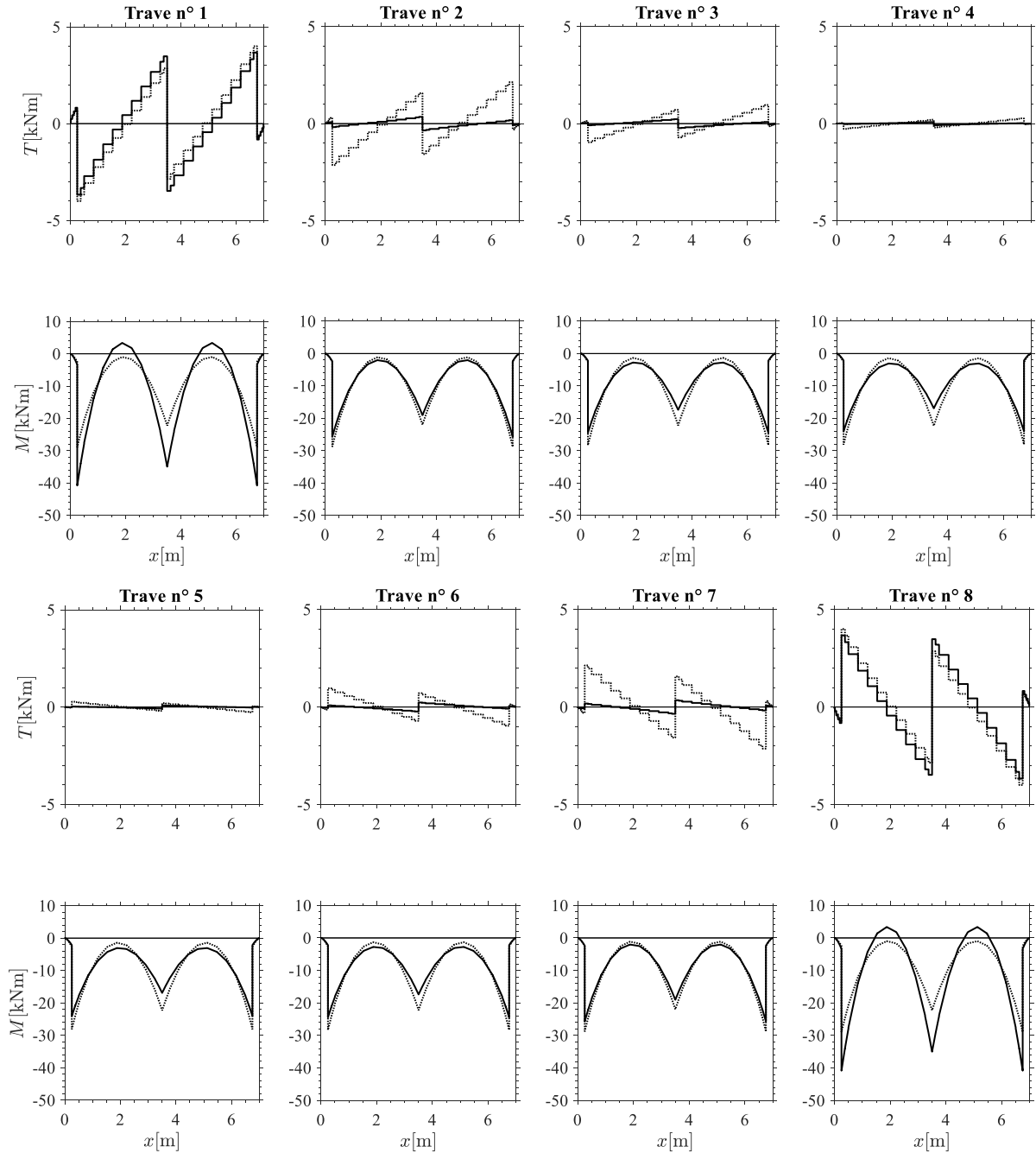


Fig. 4.33. Condizione di carico C_1 . Momento torcente T e momento flettente M per le diverse travi di fondazione. Linea tratteggiata R_{Rid} , linea continua R_{Inf}

4.6.2 Condizione di carico C_2

La condizione di carico C_2 prevede che la struttura sia caricata da carichi gravitazionali q_{G1} su tutte le travi, q_{Qk} sulle sole travi dei telai $T1-T2-T3-T4$ e carichi orizzontali q_{Lat} .

Nelle Fig. 4.34(a, b) sono riportate le deformate tridimensionali per la condizione C_2 , nel caso R_{Rid} e R_{Inf} . Per il caso R_{Rid} l'abbassamento massimo risulta di circa 0.751cm, in corrispondenza della trave del telaio $T3$, mentre per il caso R_{Inf} risulta circa 0.682cm, in corrispondenza del telaio $T1$.

Nei due casi si nota un comportamento sostanzialmente diverso, infatti nel modello R_{Rid} i telai lavorano in modo quasi indipendente, mentre in R_{Inf} si ha un comportamento quasi rigido.

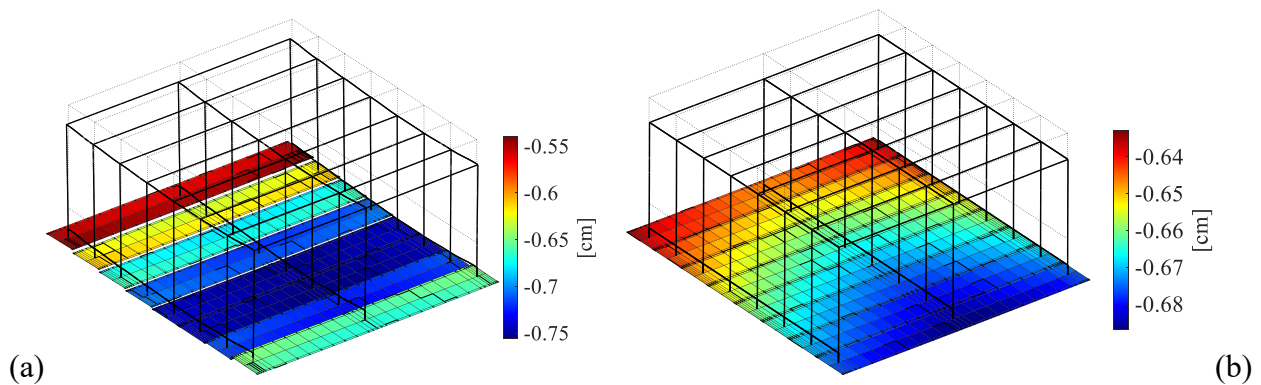


Fig. 4.34. Condizione di carico C_2 , deformata tridimensionale modello con R_{Rid} (a) e R_{Inf} (b).

Nelle Fig. 4.35 sono riportati, per le travi di fondazione, gli andamenti del momento torcente T e del momento flettente M . L'entità del momento torcente risulta più piccola sulle travi centrali, cresce andando verso il bordo ed aumenta al diminuire della rigidità trasversale. Con riferimento ai momenti flettenti sulle diverse fondazioni, si nota che per R_{Inf} le travi maggiormente caricate risultano essere quelle esterne. Per R_{Rid} risultano sollecitate in proporzione al carico presente sul telaio.

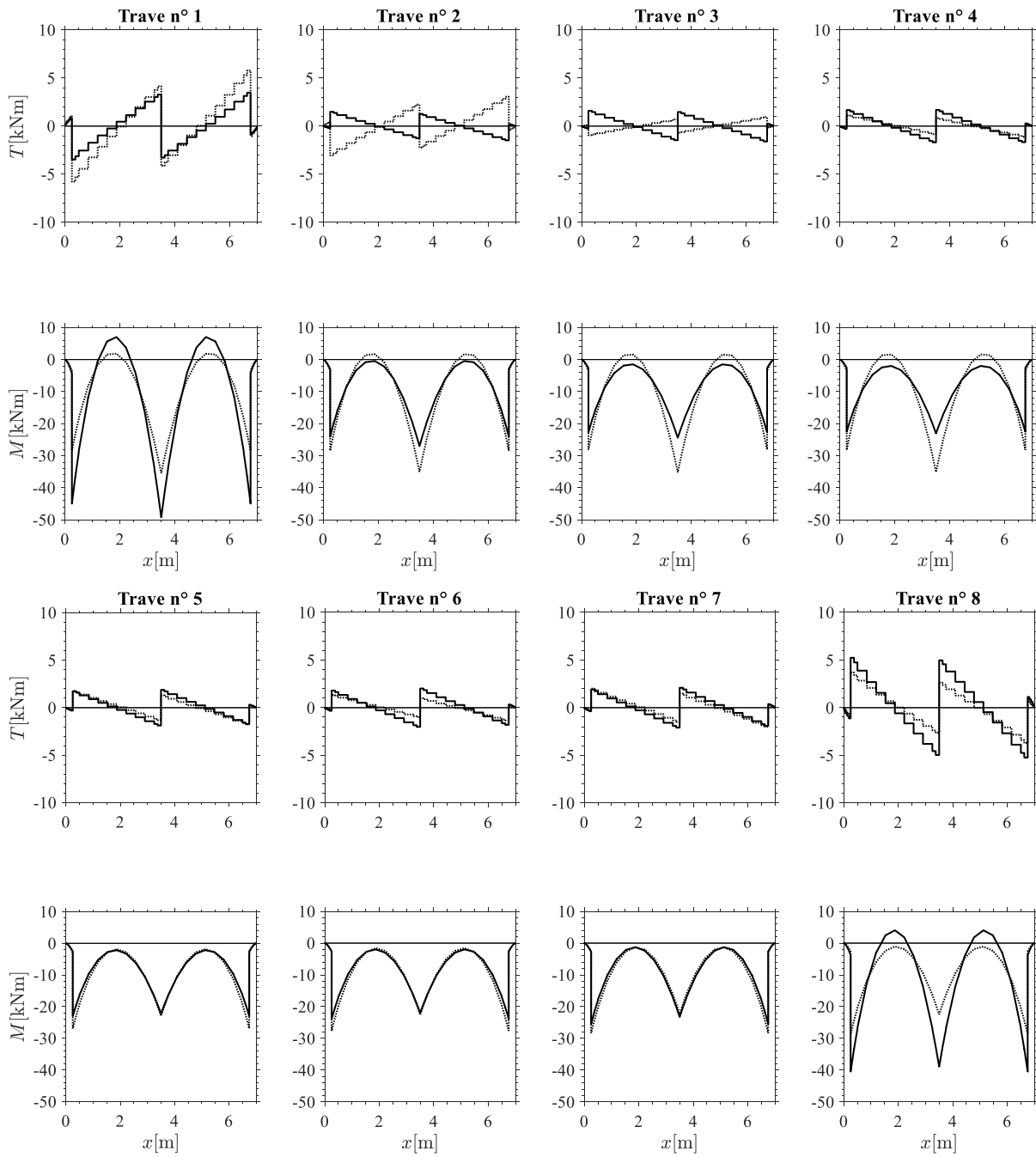


Fig. 4.35. Condizione di carico C_2 . Momento torcente T e momento flettente M per le diverse travi di fondazione. Linea tratteggiata R_{Rid} , linea continua R_{Inf} .

5 ANALISI NON LINEARE DI TELAI SU SUOLO ELASTICO

5.1 Introduzione

Nelle analisi non lineari di strutture, il comportamento anelastico di telai sottoposti a carichi verticali e sismici può essere modellato attraverso la plasticità diffusa o la plasticità concentrata. Nel primo caso si realizza un modello a fibre la cui peculiarità è quella di discretizzare l'elemento strutturale in una serie di sezioni a loro volta suddivise in fibre, ognuna di queste ha comportamento monoassiale e lo snervamento viene concentrato all'interno di una parte dell'elemento di lunghezza finita. Nel secondo caso si realizza un modello che presenta la plasticità inserita in alcuni punti, preventivamente scelti, detti cerniere plastiche. Un primo approccio per modellare il comportamento anelastico degli elementi trave-colonna consiste nell'uso di cerniere plastiche di lunghezza nulla situate all'estremità degli elementi finiti.

Le cerniere plastiche sono state prese in considerazione per la prima volta da Clough e Johnston (1967), i quali hanno definito degli elementi elastici messi in parallelo con elementi di tipo elasto-plastico e la matrice di rigidezza è stata definita come la somma delle rigidezze dei componenti. Giberson (1969) ha definito il primo modello in serie, che consisteva in un elemento elastico lineare che presentava una molla rotazionale non lineare in ciascuna estremità. Con questo metodo tutte le deformazioni anelastiche sono concentrate nelle molle di estremità, che devono rappresentare un'appropriata relazione momento-rotazione. Tuttavia, il modello in serie aumenta il numero di elementi e gradi di libertà necessari per la discretizzazione della struttura del telaio, che porta ad un aumento dell'onere computazionale. Successivamente, diversi autori hanno proposto altri modelli costitutivi di plasticità, si vedano i lavori di Takeda et al. (1970), Otani (1974), Lai et al. (1984).

Hasan et al. (2002) ha proposto un modello semplice ed efficiente per le analisi statiche non lineari di telai, tale modello è stato adattato ad una procedura inizialmente concepita per l'analisi elastica di strutture a telaio aventi connessioni elastiche semirigide Monforton e Wu (1963), inoltre, gli effetti del secondo ordine dovuti ai carichi assiali sono stati presi in considerazione da Xu (1992). Nel modello di Hasan una possibile cerniera plastica, di un elemento del telaio, è stata considerata come una connessione semirigida avente una certa relazione momento-rotazione predefinita, in questo modo si modifica la matrice di rigidezza dell'elemento finito senza aggiungere gradi di libertà al modello discreto della struttura. Shakourzadeh et al. (1999) ha definito una procedura per tener conto del comportamento semirigido di connessioni di telai spaziali a parete sottile, che possono essere

adattati per rappresentare potenziali sezioni di plasticità, tenendo conto dello sforzo normale, del taglio, della flessione e della torsione. L'analisi plastica di travi e piastre su supporto elastico è stata eseguita nel passato per determinare i carichi di collasso di travi e pavimentazioni in calcestruzzo adottando il modello Winkler per rappresentare il comportamento del semispazio (Meyerhoff (1962), Augusti (1970), Bhat (1986), Rao e Singh (1986)).

Nel seguito vengono presentate analisi elasto-plastiche di telai su semispazio utilizzando, per la modellazione delle cerniere plastiche, la procedura proposta da Shakourzadeh, Guo e Batoz (1999) e per l'interazione suolo-struttura l'approccio FE-BIE. I problemi presentati riguardano strutture intelaiate su più livelli con graticcio di fondazione e strutture monopiano con plinti isolati, nelle quali si terrà conto degli effetti del secondo ordine relativi ai carichi assiali e della non linearità del contatto, che considera l'eventuale sollevamento della fondazione o il raggiungimento del carico limite. Inoltre, sono presentate analisi per la stima del momento rotazione dei punch rigidi di fondazione su suolo elastico e sono eseguiti confronti con i risultati ottenuti da diversi autori: Borowicka (1943) per suolo elastico su fondazione circolare; Gazetas (1991) per suolo elastico con fondazione rettangolare; El Naggar e Allotey (2003) per suolo alla Winkler.

5.2 Modello di Shakourzadeh per nodi semi-rigidi

Nel presente paragrafo è riportato il modello di Shakourzadeh, Guo e Batoz (1999) utilizzato nel seguito per l'implementazione dell'effetto delle connessioni semi-rigide nell'analisi lineare e non lineare di telai tridimensionali. Il modello è applicabile ad elementi finiti aventi 7 gradi di libertà per nodo ed è caratterizzato da un parametro di rigidità per ognuno di essi, la rigidità della connessione è implementata per tener conto degli effetti assiali, taglianti, flessionali e torsionali e di ingobbamento. In questo lavoro il modello di Shakourzadeh è applicato ad elementi finiti con 6 gradi di libertà per nodo e si tiene conto della sola rigidità flessionale. L'equilibrio di un generico elemento *beam* è garantito dalla seguente relazione:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{K}_e^b \mathbf{q}_e - \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.1}$$

dove \mathbf{K}_e^b è la matrice di rigidezza elastica del generico elemento finito, \mathbf{F}_e è il vettore dei carichi nodali, \mathbf{q}_e e \mathbf{r}_e sono vettori riportati nell' Eq. 5.2 e nell' Eq. 5.3 rispettivamente.

$$\mathbf{q}_e = \{u_1, v_1, \varphi_{z1}, w_1, \varphi_{y1}, \theta_1, u_2, v_2, \varphi_{z2}, w_2, \varphi_{y2}, \theta_2\} \quad \text{Eq. 5.2}$$

$$\mathbf{r}_e = \{N_1, V_{y1}, M_{y1}, V_{z1}, M_{z1}, T_{x1}, N_2, V_{y2}, M_{y2}, V_{z2}, M_{z2}, T_{x2}\} \quad \text{Eq. 5.3}$$

L'equilibrio di un generico elemento *beam* che include nodi semi-rigidi è garantito dalla seguente relazione:

$$\mathbf{r}_e = \bar{\mathbf{K}}_e^b \bar{\mathbf{q}}_e - \bar{\mathbf{F}}_e \quad \text{Eq. 5.4}$$

dove $\bar{\mathbf{K}}_e^b$ è la matrice di rigidezza elastica equivalente del generico elemento finito che tiene conto della rigidità dei nodi, $\bar{\mathbf{F}}_e$ è il vettore dei carichi nodali equivalenti, $\bar{\mathbf{q}}_e$ e $\bar{\mathbf{r}}_e$ sono vettori riportati nell' Eq. 5.5 e nell' Eq. 5.6 rispettivamente.

$$\bar{\mathbf{q}}_e = \{u_1, v_1, \bar{\varphi}_{z1}, w_1, \bar{\varphi}_{y1}, \theta_1, u_2, v_2, \bar{\varphi}_{z2}, w_2, \bar{\varphi}_{y2}, \theta_2\} \quad \text{Eq. 5.5}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_e = \{N_1, V_{y1}, \bar{M}_{y1}, V_{z1}, \bar{M}_{z1}, T_{x1}, N_2, V_{y2}, \bar{M}_{y2}, V_{z2}, \bar{M}_{z2}, T_{x2}\} \quad \text{Eq. 5.6}$$

Utilizzando l'ipotesi di decomposizione delle deformazioni è possibile scrivere:

$$\mathbf{q}_e = \bar{\mathbf{q}}_e - \Phi_e \quad \text{Eq. 5.7}$$

dove Φ_e rappresenta la deformazione della connessione corrispondente ai 12 gradi di libertà dell'elemento. La relazione tra Φ_e e il vettore delle forze interne dell'elemento può essere ottenuta da prove sperimentali, usando un modello lineare questa relazione può essere scritta nella seguente forma matriciale:

$$\Phi_e = \lambda \mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{r}_e \quad \text{Eq. 5.8}$$

dove $1/\lambda_i$ rappresenta la rigidità della generica connessione. Sostituendo l' Eq. 5.7 nell' Eq. 5.1 si può scrivere l'equilibrio nel seguente modo:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{K}_e^b (\bar{\mathbf{q}}_e - \Phi_e) - \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.9}$$

$$\mathbf{r}_e + \mathbf{K}_e^b \Phi_e = \mathbf{K}_e^b \bar{\mathbf{q}}_e - \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.10}$$

sostituendo l'Eq. 5.8 nell'Eq. 5.10 si ha:

$$\mathbf{r}_e + \mathbf{K}_e^b (\lambda \mathbf{r}_e) = \mathbf{K}_e^b \bar{\mathbf{q}}_e - \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.11}$$

mettendo in evidenza il vettore delle forze interne si ha:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{K}_e^b \lambda) \mathbf{r}_e = \mathbf{K}_e^b \bar{\mathbf{q}}_e - \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.12}$$

definendo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{K}_e^b \lambda = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_e^b \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 5.13}$$

dopo semplici passaggi matematici si ha:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}_e^b \bar{\mathbf{q}}_e - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.14}$$

definendo:

$$\bar{\mathbf{K}}_e^b = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}_e^b \quad \text{Eq. 5.15}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_e \quad \text{Eq. 5.16}$$

si ottiene l'equilibrio descritto nell' Eq. 5.8. Per tener conto delle non linearità geometriche si può adottare la stessa correzione utilizzata nella matrice elastica nella matrice geometrica \mathbf{K}_e^g , ottenendo:

$$\bar{\mathbf{K}}_e^g = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}_e^g \quad \text{Eq. 5.17}$$

Si fa notare che per valori di λ_i pari a 0 si ha un nodo rigido, per valori di λ_i tendente ad infinito si ha nodo cerniera, mentre per i valori intermedi si hanno nodi semi-rigidi. Inoltre, vale la pena notare che per il calcolo lineare si ha un valore di λ_i , mentre per un calcolo non lineare si ha un set di valori λ_i ricavabile dal legame momento-rotazione.

5.3 Plasticità

Il degrado della rigidità flessionale di una sezione trasversale di un elemento del telaio inizia quando le fibre del materiale più lontane dall'asse neutro subiscono una deformazione superiore a quella di snervamento, a cui corrisponde il momento di snervamento. Aumentando il momento flettente, la plasticità si diffonde attraverso la profondità della sezione e lungo la lunghezza dell'asta per formare una cerniera plastica completamente sviluppata, a quel punto la rigidità flessionale della sezione trasversale diviene nulla e la sezione ruota fino a raggiungere la sua rotazione ultima ϕ_u .

La teoria della cerniera plastica è un modo semplice per stabilire la perdita di rigidità degli elementi del telaio, adottando le seguenti ipotesi:

- la deformazione plastica è concentrata su una o entrambe le estremità dell'elemento *beam*;
- la cerniera plastica si forma in una sezione una volta che il momento applicato alla sezione è uguale momento plastico dell'elemento.

La prima ipotesi è spesso definita come "assunto di plasticità concentrata", comunemente accettata nell'analisi elasto-plastica delle strutture a telaio, mentre la seconda ipotesi si basa su un ideale relazione elastoplastica momento rotazione $M - \phi$. Il degrado della rigidità è descritto da una curva momento-rotazione ($M - \phi$) che dipende dal materiale e dalla forma della sezione trasversale.

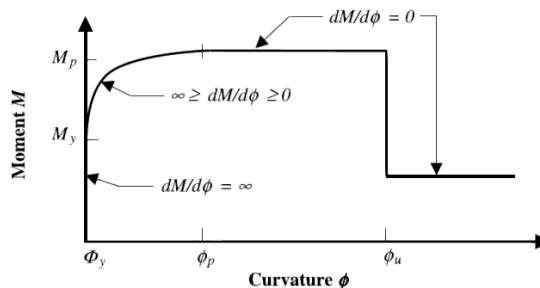


Fig. 5.1. Relazione momento rotazione. [Tratta da Hasan, Xu e Grierson (2002)].

Seguendo il lavoro di Hasan, Xu e Grierson (2002), la Fig. 5.1 mostra una relazione momento-rotazione post-elastica, che rappresenta il comportamento della maggior parte delle sezioni utilizzate nelle strutture edilizie in acciaio. Il modello post-elastico di cerniera plastica è simile al modello di connessione semi-rigida. Alla luce di questa similitudine, la rigidità rotazionale R_i di una connessione semi-rigida può essere sostituita dalla rigidità flessionale della sezione:

$$R_i = \frac{dM}{d\phi} \quad \text{Eq. 5.18}$$

Per momento inferiore a M_y , la variazione di rotazione post-plastica è pari a $d\varphi = 0$ e la corrispondente rigidezza flessionale vale $R_i = \infty$, di fatto si comporta come una connessione rigida. Per momento pari a M_p , la variazione di momento $dM = 0$ e la corrispondente rigidezza flessionale vale $R_i = 0$, di fatto si comporta come una connessione a cerniera. Per $M_y < M < M_p$, la rigidezza flessionale della sezione dell'asta è determinata derivando l'equazione adottata per descrivere la curva $M - \varphi$ rispetto a φ .

L'applicazione del modello Monforton-Wu-Xu (1963) o Shakourzadeh (1999) all'analisi di pushover richiede di definire a priori la posizione delle potenziali cerniere plastiche nel modello discreto della struttura. Ad esempio, le cerniere plastiche possono essere posizionate in corrispondenza delle connessioni trave-pilastro e lungo lo sviluppo della trave. In questo caso, il numero totale di elementi finiti e di gradi di libertà non variano rispetto ad una semplice analisi elastica, in particolare non è necessario modificare il modello discreto durante l'analisi pushover. È chiaro che i risultati dell'analisi sono strettamente dipendenti dalla scelta delle posizioni iniziali delle cerniere plastiche. Tuttavia, a valle dell'analisi è possibile verificare se i momenti flettenti ad ogni estremità dell'elemento finito rispettano la condizione di plasticità $M \leq M_p$, e se necessario aggiungere cerniere plastiche al modello per eseguire un'analisi di pushover più accurata.

5.4 Algoritmo incrementale in spostamento per problemi non lineari

Come è noto, per risolvere problemi di stabilità strutturale non lineari è spesso utilizzato il metodo di Newton-Raphson o un suo derivato. Tuttavia, per tracciare le configurazioni post-instabilità in controllo di spostamento è necessario modificare la forma standard di questi metodi. Il lavoro di Batoz e Dhett (1979) propone una tecnica per interconnettere il ruolo delle variabili (indipendenti e dipendenti) per problemi lineari, per poi generalizzarla a problemi non lineari usando metodi derivati da Newton-Raphson.

Un classico problema lineare può essere scritto nella forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad \text{Eq. 5.19}$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidità, \mathbf{q} è il vettore degli spostamenti nodali, \mathbf{F} è il vettore dei carichi esterni. Supponiamo che il vettore di carico \mathbf{F} sia composto da due vettori:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} + \lambda\mathbf{P} \quad \text{Eq. 5.20}$$

dove \mathbf{R} è fisso o più in generale può essere considerato come un vettore residuo, λ è un parametro che viene variato per ottenere il vettore di carico corrispondente ad una distribuzione scelta definita da \mathbf{P} . In un normale problema lineare, il carico esterno \mathbf{F} è noto (λ è definito) e l'Eq. 5.19 può essere risolta nell'incognita \mathbf{q} . Tuttavia, se scegliamo la componente i -esima del vettore \mathbf{q} tale che $q_i = \bar{q}$, è necessario modificare l'Eq. 5.19 per ottenere le $(n-1)$ incognite di \mathbf{q} e l'incognita λ . Per semplicità di trattazione ma senza perdere di generalità, riorganizziamo l'Eq. 5.19 nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \bar{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 5.21}$$

dove \mathbf{K}_{11} è una matrice quadrata di ordine n ottenuta dall'eliminazione della i -esima riga e colonna di \mathbf{K} . \mathbf{K}_{12} e \mathbf{K}_{21} sono la i -esima colonna e riga di \mathbf{K} , rispettivamente; $\mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{ii}$. Per risolvere l'Eq. 5.21 nelle incognite \mathbf{q}_1 e λ si può ricorrere al metodo diretto o al metodo proposto da Batoz e Dhett (1979).

Con il metodo diretto è necessario separare le variabili dalle incognite, riorganizzando l'Eq. 5.21 nell'Eq. 5.22.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & -\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & -\mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 - \mathbf{K}_{12}\bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{R}_2 - \mathbf{K}_{22}\bar{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 5.22}$$

portando alla soluzione per \mathbf{q}_1 e λ , con due notevoli complicazioni per l'applicazione a casi non lineari: la matrice \mathbf{K} non è più simmetrica e deve essere modificata.

L'algoritmo proposto da Batoz e Dhatt (1979), invece, non modifica la matrice \mathbf{K} dell'Eq. 5.19, ma va a cercare due vettori soluzione \mathbf{q}^a e \mathbf{q}^b corrispondenti ai vettori di carico \mathbf{R} e \mathbf{P} :

$$\mathbf{K}\mathbf{q}^a = \mathbf{R} \quad \text{Eq. 5.23}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{q}^b = \mathbf{P} \quad \text{Eq. 5.24}$$

Se la matrice \mathbf{K} non è singolare le Eq. 5.23 e Eq. 5.24 possono essere risolte nelle variabili \mathbf{q} e λ come mostrato di seguito:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^a + \lambda\mathbf{q}^b \quad \text{Eq. 5.25}$$

dove la i -esima componente vale:

$$\mathbf{q}_i^a + \lambda\mathbf{q}_i^b = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{Eq. 5.26}$$

portando così a:

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_i^a}{\mathbf{q}_i^b} \quad \text{Eq. 5.27}$$

Questa soluzione lineare può essere facilmente adattata al caso incrementale non lineare in controllo di spostamento, considerando \mathbf{R} come vettore residuo, \mathbf{P} come vettore che contiene la forma del carico da imporre e $\bar{\mathbf{q}}$ come parametro spostamento incrementale. L'algoritmo di Batoz e Dhatt (1979) si articola nei seguenti passaggi:

Supponiamo di aver ottenuto una soluzione \mathbf{q} corrispondente ad un livello di carico λ corrispondente all'iterazione $i=0$, cioè:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^0 \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}^0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 5.28}$$

In questa fase, invece di incrementare il carico viene incrementata l' i -esima componente di spostamento, allora il vettore soluzione iniziale viene ridefinito nel seguente modo:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \text{ dove } \mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i^0 + \Delta \mathbf{q}_i \quad \text{Eq. 5.29}$$

Utilizzando il metodo di Newton-Raphson si ottiene \mathbf{q} e λ con \mathbf{q}_i^0 considerato fisso. A questo punto le Eq. 5.23 e Eq. 5.24 diventano:

$$\mathbf{K}^j \Delta \mathbf{q}^a = \mathbf{R}^j \quad \text{Eq. 5.30}$$

$$\mathbf{K}^j (\mathbf{q}^b)^j = \mathbf{P} \quad \text{Eq. 5.31}$$

dove \mathbf{K} è la matrice tangente corrispondente a \mathbf{q}^j ; \mathbf{R} è il corrispondente vettore residuo; \mathbf{P} rappresenta la distribuzione del carico che viene moltiplicata per λ per ottenere il carico effettivo.

Dall'Eq. 5.27 segue che:

$$\Delta \mathbf{q}^j = (\Delta \mathbf{q}^a)^j + \Delta \lambda^j (\Delta \mathbf{q}^b)^j \quad \text{Eq. 5.32}$$

$$(\mathbf{q}_i^a)^j + \Delta \lambda^j (\Delta \mathbf{q}_i^b)^j = \Delta \mathbf{q}_i^j = 0 \quad \text{Eq. 5.33}$$

portando a:

$$\Delta \lambda^j = - \left(\frac{\Delta \mathbf{q}_i^a}{\Delta \mathbf{q}_i^b} \right)^j \quad \text{Eq. 5.34}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{j+1} &= \mathbf{q}^j + \Delta \mathbf{q}^j \\ \lambda^{j+1} &= \lambda^j + \Delta \lambda^j \end{aligned} \quad \text{Eq. 5.35}$$

L'algoritmo può essere riassunto nei seguenti passi:

1. Si sceglie la componente di spostamento incrementale $\Delta \mathbf{q}_i$ alla prima iterazione ($j=0$).
2. Si modifica il vettore di spostamento iniziale in modo da avere: $\mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i^0 + \Delta \mathbf{q}_i$.
3. Si calcola il vettore residuo \mathbf{R}^j e la matrice tangente \mathbf{K}^j .
4. Si risolvono i due sistemi ottenendo $(\Delta \mathbf{q}^a)^j$ e $(\Delta \mathbf{q}^b)^j$.
5. In ultimo dalle Eq. 5.35 si calcola \mathbf{q}^{j+1} e λ^{j+1} .

Arrivati al passo 5, si ripetono i passi 3-5 fino a raggiungere il livello di precisione richiesto, vale a dire fino a rendere il valore della norma del residuo inferiore ad un certo valore assegnato.

5.5 Validazione dell’algoritmo implementato

Con lo scopo di validare l’algoritmo implementato in ambiente matlab, viene presentato di seguito il confronto tra una analisi plastica “manuale” ed un’analisi non lineare di pushover. Il telaio, riportato in Fig. 5.2, presenta due campate, con carico verticale pari a 10kN/m, due piani con altezze pari a $h_1=3.75$ m e $h_2=3.00$ m. Il momento plastico delle travi vale $M_{pt}=170$ kNm, mentre per le colonne vale $M_{pc}=230$ kNm. La posizione delle cerniere plastiche è stata presa in accordo con il risultato dell’analisi pushover.

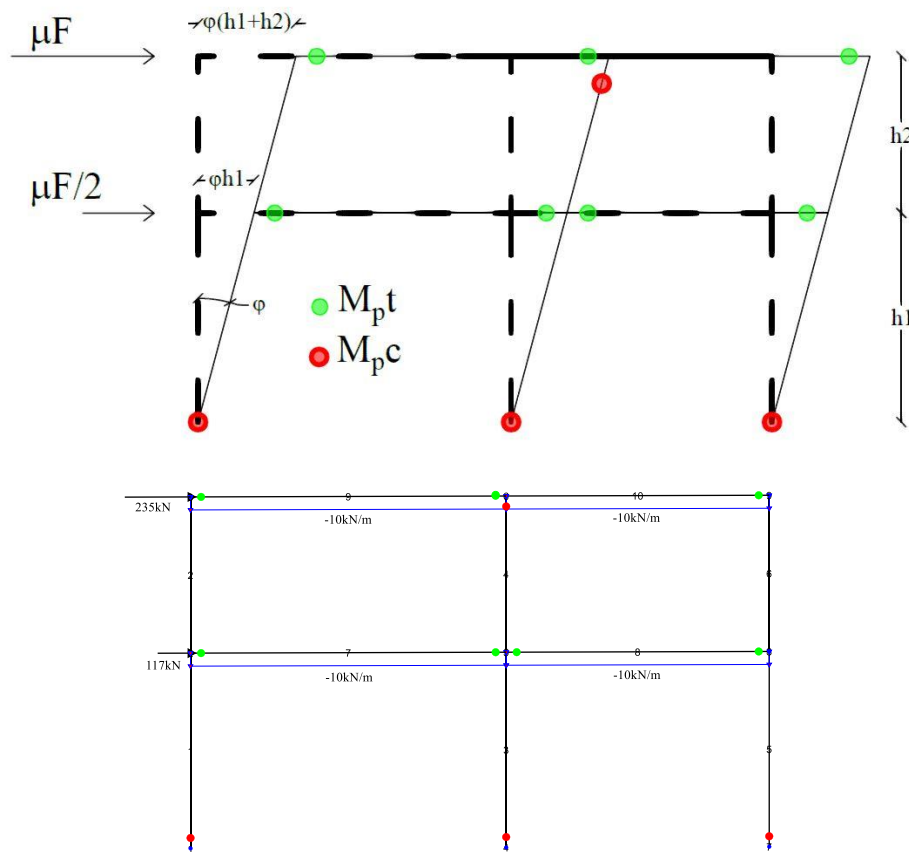


Fig. 5.2. Schema utilizzato per l’analisi plastica di un telaio piano (a); modello FEM per analisi di pushover (b).

L’analisi plastica è stata condotta imponendo l’uguaglianza tra lavoro virtuale esterno (Eq. 5.36) ed interno (Eq. 5.37):

$$L_e = \mu L_e^F + \cancel{V_e} = \varphi \mu F (h_1 + h_2) + \varphi \mu \frac{F}{2} h_1 \tag{Eq. 5.36}$$

$$L_i = (4M_{pc} + 7M_{pt})\varphi \tag{Eq. 5.37}$$

posto $L_e=L_i$ si ha:

$$\mu F = \frac{4M_p c + 7M_p t}{\left(\frac{3}{2}h_1 + h_2\right)} \quad \text{Eq. 5.38}$$

Il valore di μF calcolato dall'analisi plastica vale 244 kN e porta ad un tagliante alla base pari a 366 kN.

Nella Fig. 5.3, in nero è riportata la curva di pushover ottenuta per il telaio sopra descritto, mentre in rosso è riportato il valore del tagliante alla base relativo all'analisi limite. Il tagliante alla base, relativo alla condizione di collasso, vale 353 kN.

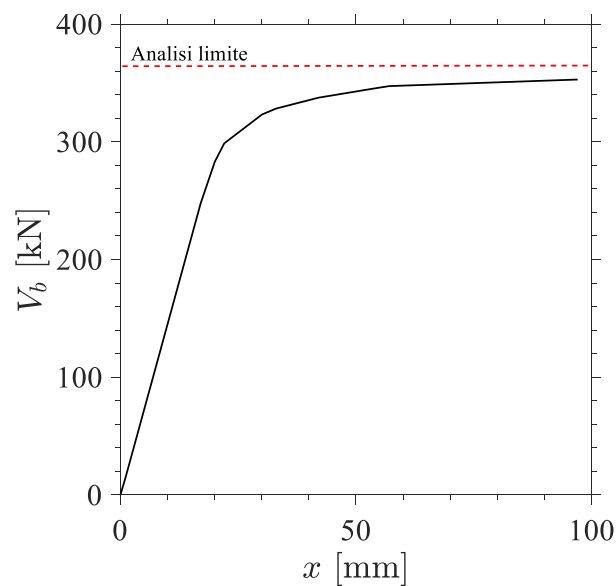


Fig. 5.3. Curva di pushover per un telaio 2D (linea nera); analisi limite (linea rossa).

L'errore relativo tra l'analisi limite e l'analisi di pushover implementata in ambiente matlab, calcolato come $(T_{FEM} - T_{LIM}) / T_{FEM}$, è pari al 4%.

5.6 Analisi non lineare di un telaio su suolo elastico

Nel presente capitolo vengono riportate diverse analisi di pushover su suolo elastico per un telaio tridimensionale con l'intento di mettere in evidenza l'effetto della rigidezza del suolo sul comportamento non lineare della struttura. Il telaio studiato (Fig. 5.4) è composto da travi di fondazione a T rovescia con larghezza di 1.00 m, altezza della soletta di 0.40 m, collo largo 0.60 m e alto 0.70 m. I pilastri quadrati di lato 0.40 m hanno altezza di 4.25 m e 3.75 m rispettivamente per il piano terra e primo piano. Le travi sono emergenti e presentano dimensioni di 0.30 m e 0.50 m rispettivamente per la base e l'altezza.

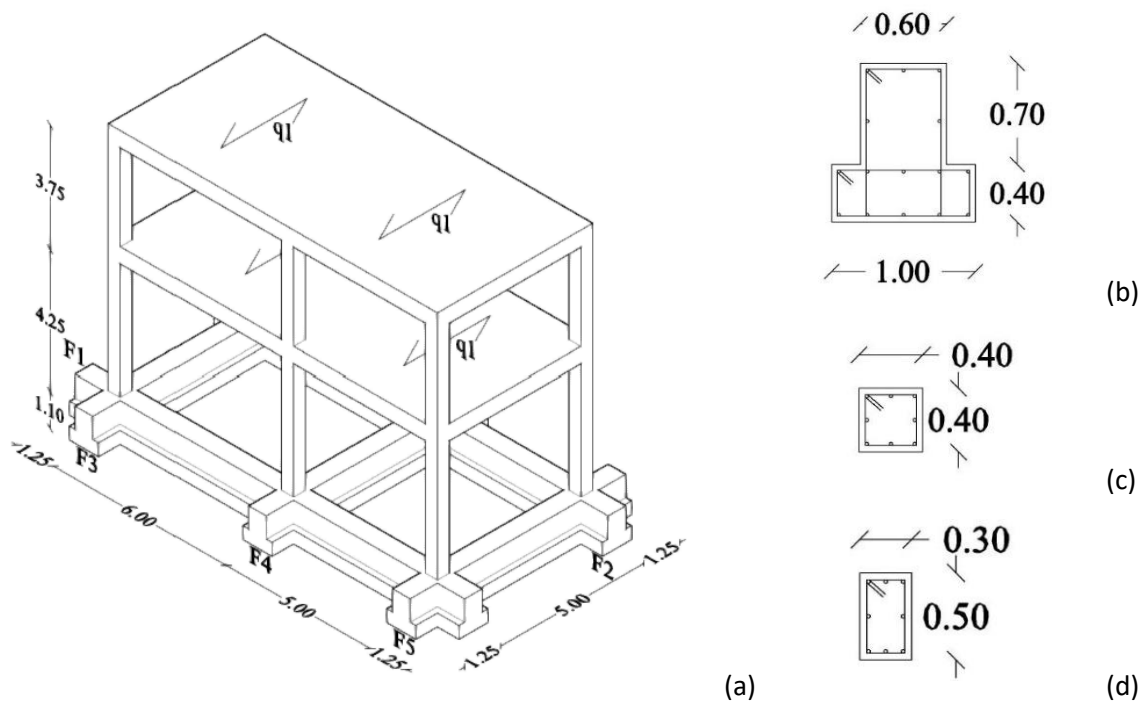


Fig. 5.4. Telaio tridimensionale (in m) e carichi applicati (a); sezione trasversale trave di fondazione (b), colonne (c) e travi in elevazione (d).

I solai, pensati rigidi nel piano, hanno la medesima orditura e carichi $G_1=4.5 \text{ kN/m}^2$, $G_2=1.0 \text{ kN/m}^2$ e $Q_{var}=2.0 \text{ kN/m}^2$. La fattorizzazione allo stato limite di salvaguardia della vita porta alla distribuzione di carico sul solaio q_1 ed al peso delle travi q_2 (Tab. 5-1).

Carico	Valore
q_1 (Carico SLV su solaio)	6.1 kN/m ²
q_2 (Peso proprio trave)	3.8 kN/m

Tab. 5-1. Carichi su telaio

Il carico orizzontale, applicato alla quota degli impalcati, presenta una distribuzione corrispondente a un andamento di accelerazioni proporzionale alla forma del primo modo. Il modello

numerico è realizzato con elementi finiti *beam* di Eulero-Bernoulli, l'interazione suolo struttura è gestita utilizzando l'approccio FE-BIE. La parte deformabile della fondazione è suddivisa in è suddivisa nella direzione dell'asse in $n_{el_asse}=170$ e nella direzione ortogonale in $n_{el_orto}=4$, mentre l'intersezione tra le travi è gestita con 6 elementi punch rigidi. La mesh utilizzata è di tipo graded con valore di $\beta=3$ (Fig. 4.17). Gli effetti del secondo ordine sono stati presi in considerazione attraverso l'implementazione della matrice geometrica \mathbf{K}_g semplificata, che tiene conto del solo sforzo normale.

Nella Fig. 5.5 è riportato il modello di calcolo utilizzato. La fondazione è stata pensata per lavorare in campo elastico, le travi in elevazione e le colonne presentano, per semplicità, un comportamento elasto-plastico con momento plastico di 170 kNm e 230 kNm, rispettivamente. Le potenziali cerniere plastiche sono state inserite alle estremità di tutti gli elementi *beam* in elevazione. Il nodo di controllo è stato posizionato nel baricentro del secondo livello e la forma del carico applicato è riconducibile alla distribuzione relativa al primo modo di vibrare.

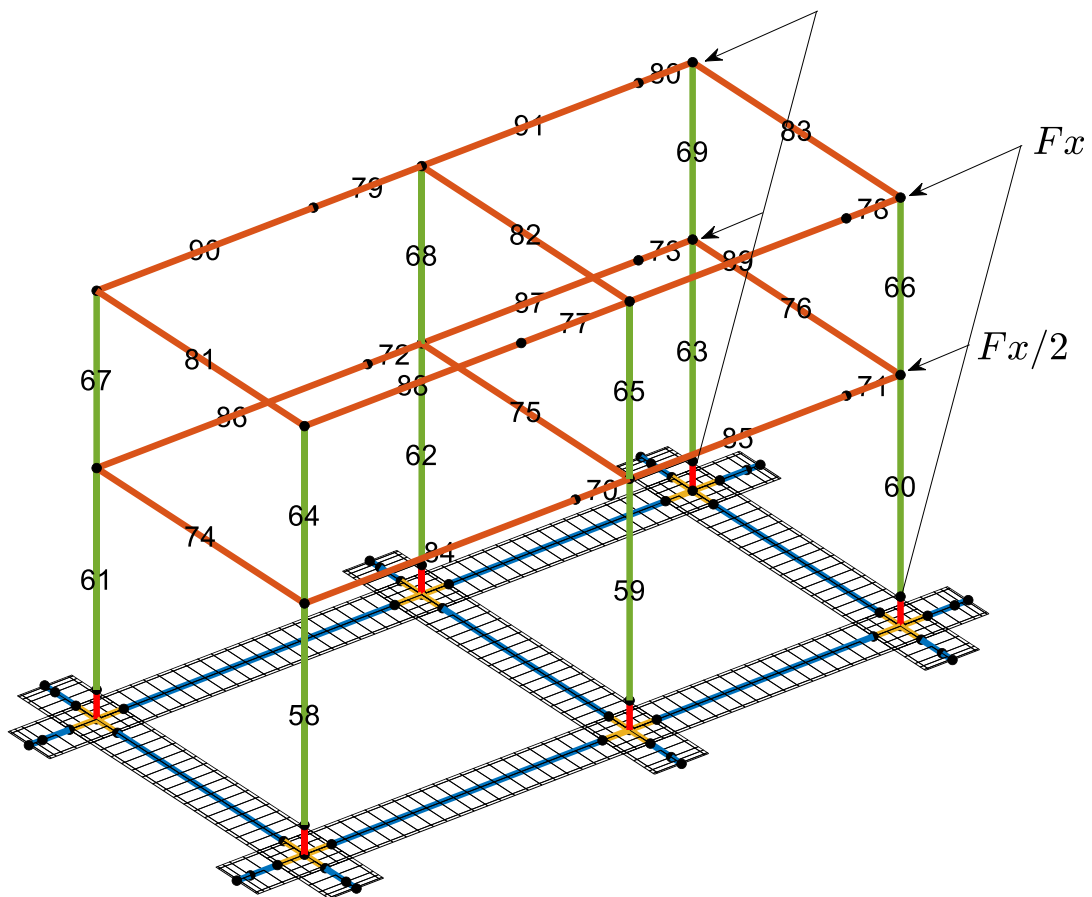


Fig. 5.5. Modello di calcolo utilizzato per le analisi pushover. Fondazione deformabile (azzurro), punch rigido (giallo), tratto rigido (rosso), colonna (verde), trave in elevazione (arancione).

5.6.1 Influenza della rigidezza orizzontale

Nel presente paragrafo si riporta l'analisi del telaio in Fig. 5.4 su suolo con rigidezza verticale $E_s=10$ MPa ed $E_s=25$ MPa e rigidezza orizzontale variabile. Tale rigidezza è stata modellata con l'inserimento di molle elastiche orizzontali, sono stati presi in considerazione quattro valori di rigidezza riportati in Tab. 5-2. Il caso k_{w1} si riferisce ad una rigidezza orizzontale tendente al caso di vincolo orizzontale fisso, mentre k_v è stimata attraverso la relazione di Vesic (1961) riportata nell'Eq. 4.7.

Nella Fig. 5.6 b, d sono riportate le curve pushover per i 4 casi sopra descritti per rigidezza del suolo pari a $E_s=10$ MPa ed $E_s=25$ MPa, rispettivamente, con i cerchi rossi si indica la posizione della prima plasticizzazione. La rigidezza iniziale della curva è funzione della k_w considerata, inoltre, si nota che la forza orizzontale alla quale corrisponde la formazione della prima cerniera plastica risulta avere leggere variazioni, con differenze relative massime del 2.0% nel caso di $E_s=10$ MPa e del 3.5% nel caso di $E_s=25$ MPa. Diverso, invece, il discorso per gli spostamenti che risentono notevolmente della rigidezza delle molle orizzontali, facendo registrare differenze relative massime del 27.2% nel caso di $E_s=10$ MPa e del 12.0% nel caso di $E_s=25$ MPa (Tab. 5-2).

Sigla	Rigidezza orizzontale	Prima plasticizzazione			
		$E_s=10$ MPa		$E_s=25$ MPa	
		Spostamento orizzontale [mm]	Tagliante alla base [kN]	Spostamento orizzontale [mm]	Tagliante alla base [kN]
k_{w1}	∞	12.74	296.04	10.97	309.57
k_{w2}	k_v	13.99 (8.9%)	295.52 (-0.2%)	11.22 (2.2%)	304.48(-1.8%)
k_{w3}	$k_v/2$	14.99 (15.0%)	290.25 (-2.0%)	11.71 (6.4%)	304.08 (-1.7%)
k_{w4}	$k_v/4$	17.49 (27.2%)	290.25 (-2.0%)	12.47 (12.0%)	299.18 (-3.5%)

Tab. 5-2. Rigidezza delle molle orizzontali, spostamento orizzontale e tagliante relativi alla prima plasticizzazione.

La sequenza delle successive aperture delle cerniere plastiche è riportata nella Fig. 5.6 c rispecchiano il comportamento mostrato per la prima plasticizzazione e sono riportate nella Fig. 5.6 c.

Il valore del carico ultimo non risente della variazione della rigidezza del suolo né di quella delle molle orizzontali. Negli 8 casi analizzati si attesta intorno a 695 kN.

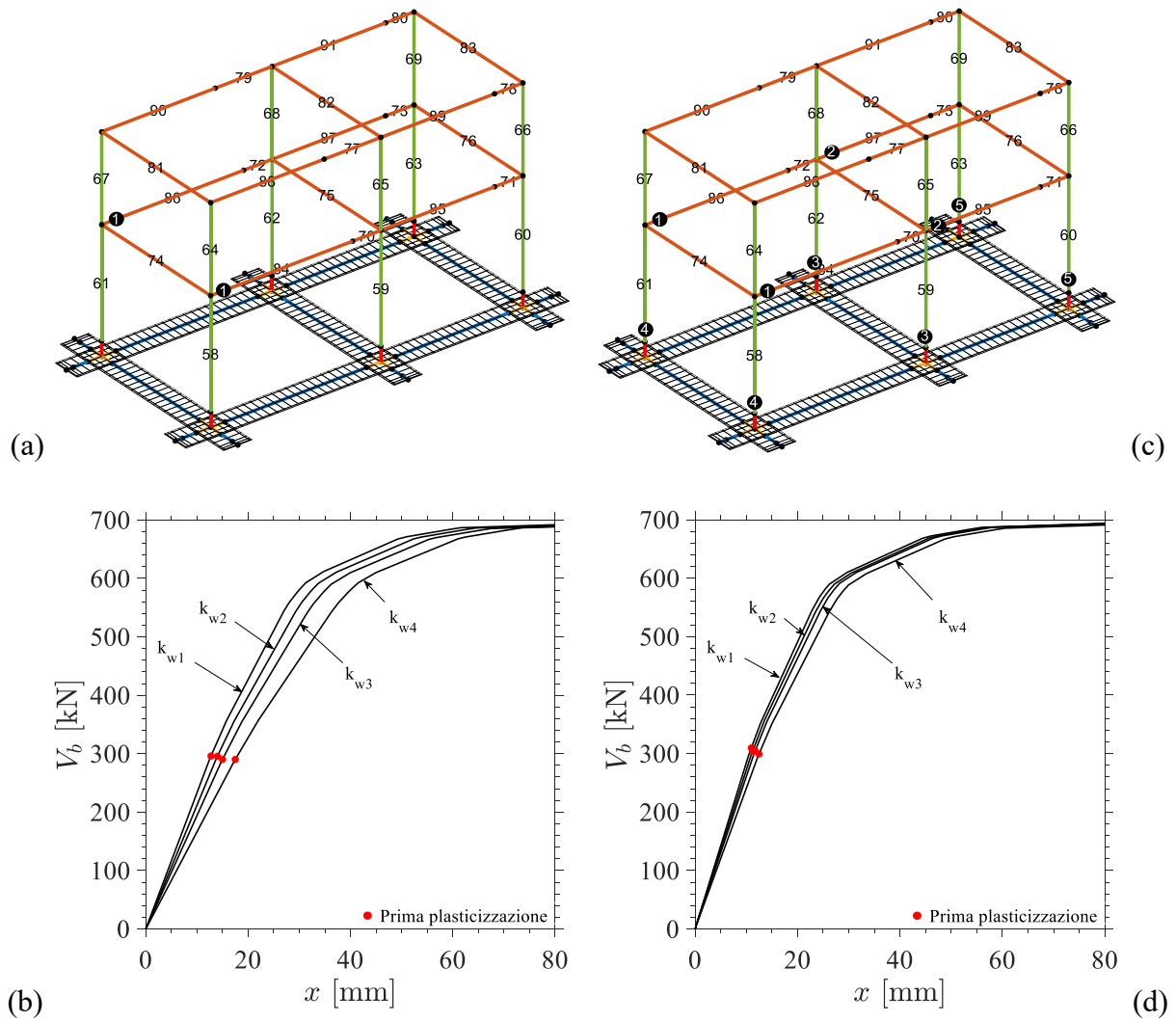


Fig. 5.6. Curve di pushover per un telaio su suolo elastico al variare della rigidezza delle molle orizzontali. Posizione della prima plasticizzazione (a), posizione delle successive cerniere plastiche (c), $E_s=10\text{MPa}$ (b); $E_s=25\text{MPa}$ (d).

5.6.2 Influenza della rigidezza del suolo

Nel presente paragrafo si riporta l'analisi pushover di un telaio (Fig. 5.4) su suolo elastico con diversi valori di rigidezza. Inoltre, per tener conto della rigidezza orizzontale del suolo, sono state considerate molle elastiche con rigidezza k_o stimata attraverso la relazione di Vesic (1961) e riportata nell'Eq. 4.7. Sono state considerate 6 diverse rigidezze del suolo messe a confronto con il caso di incastri al piede (Tab. 5-3). Le rigidezze considerate vanno da E_s tra 10 MPa e 500 MPa. Nella Tab. 5-3 sono riportati i valori di spostamento e tagliante alla base relativi alla formazione della prima crerniera plastica, che avviene all'estremità degli elementi 84 e 86 (si veda Fig. 5.6,a). La differenza relativa tra il modello con incastri alla base (A) e quello con $E_s=10$ MPa (G) è del 31.4% in termini di spostamento del nodo di controllo e del 17.0% in termini di tagliante alla base.

Prima plasticizzazione				
Modello	Rigidezza verticale	Rigidezza orizzontale	Spostamento orizzontale [mm]	Tagliante alla base [kN]
A	Incastri	Incastri	9.08	333.00
B	$E_s=500$ MPa	$k_o=31.5$ daN/cm ³	9.37 (3.1%)	329.31 (- 2.9%)
C	$E_s=300$ MPa	$k_o=17.8$ daN/cm ³	9.39 (3.3%)	326.52 (- 3.8%)
D	$E_s=150$ MPa	$k_o= 8.4$ daN/cm ³	9.40 (3.5%)	320.11 (- 5.9%)
E	$E_s= 75$ MPa	$k_o= 4.0$ daN/cm ³	9.43 (3.7%)	308.24 (-10.0%)
F	$E_s= 25$ MPa	$k_o= 1.2$ daN/cm ³	10.46 (13.2%)	296.86 (-14.2%)
G	$E_s= 10$ MPa	$k_o= 0.5$ daN/cm ³	13.24 (31.4%)	289.65 (-17.0%)

Tab. 5-3. Valori di rigidezza, spostamento e tagliante alla base relativi alla prima plasticizzazione.

Nella Fig. 5.7 sono riportate le curve di pushover relative a diversi valori di rigidezza del suolo, per maggiore chiarezza di rappresentazione, vengono mostrate solo 4 curve relative ai modelli: A , E , F , G . Si fa notare che le curve relative ai modelli B , C , D sono posizionate tra A ed E .

All'aumentare della rigidezza del suolo aumenta la rigidezza iniziale della struttura ed il valore del tagliante alla base relativo alla prima plasticizzazione, che passa da 290 kN nel caso G a 333kN nel caso A . Invece, lo spostamento del nodo di controllo, in corrispondenza della prima plasticizzazione diminuisce all'aumentare della rigidezza del suolo, facendo registrare il minimo nel caso con incastri alla base.

Per meglio mostrare il comportamento della struttura al variare del suolo, si riportano diagrammi relativi alla deformata, alle reazioni ed al momento flettente per suolo molto deformabile ($E_s=10$ MPa) e molto rigido ($E_s=500$ MPa).

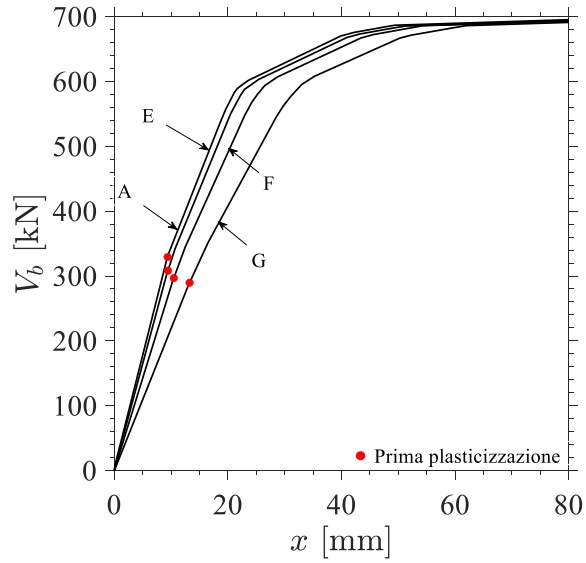


Fig. 5.7. Curve di pushover per un telaio al variare della rigidezza del suolo.

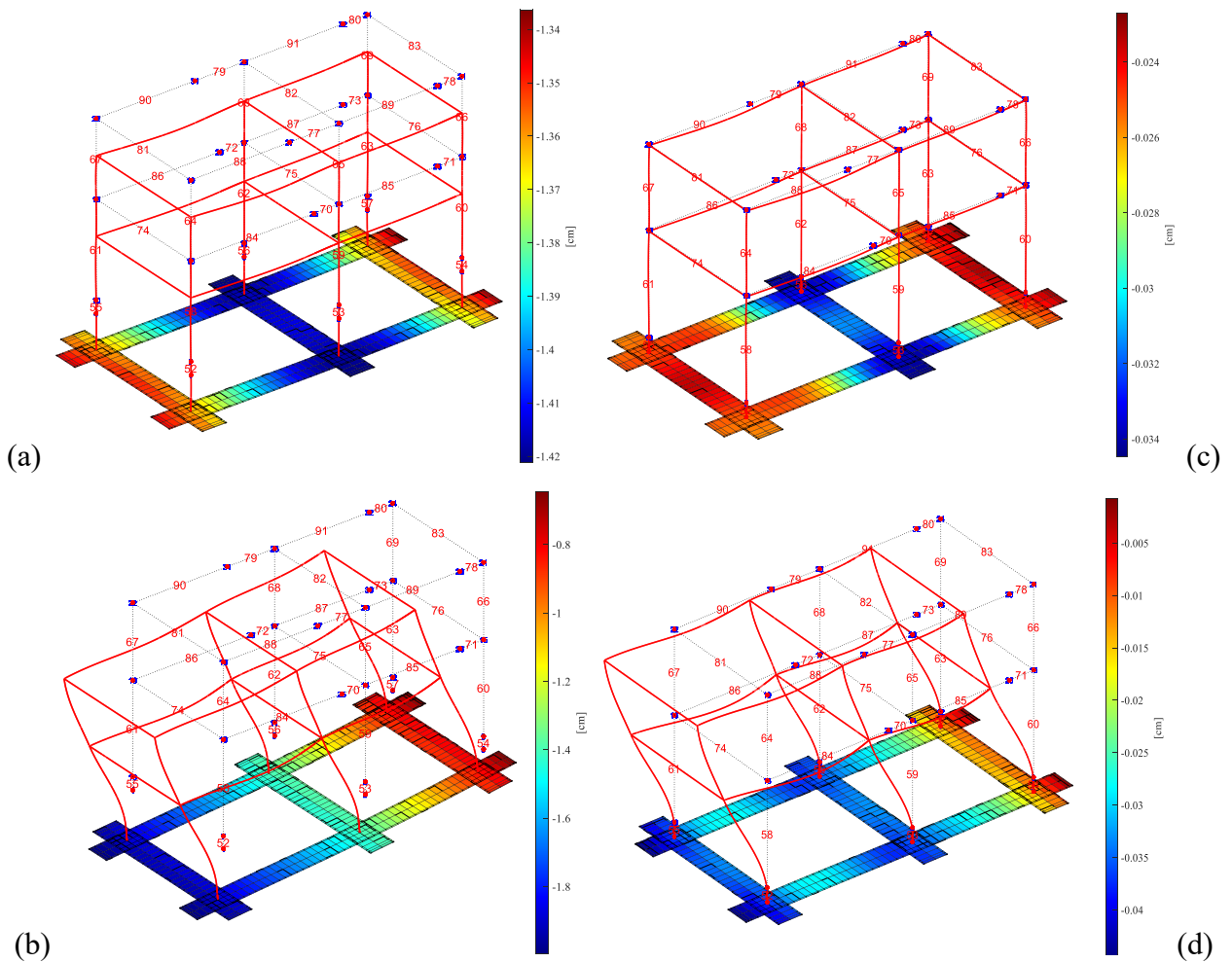


Fig. 5.8. Deformata della struttura. Deformata relativa ai carichi verticali (a), (c), deformata relativa allo spostamento del nodo di controllo pari a 30 mm (b), (d). Rigidezza del suolo: $E_s=10$ MPa (a), (b); $E_s=500$ MPa (c), (d).

Nelle Fig. 5.8 (a), (c) sono riportate le deformate della struttura relative ai carichi verticali, mentre nelle Fig. 5.8 (b), (d) sono riportate le deformate relative allo spostamento del nodo di controllo pari a 30 mm. Per $E_s=10$ MPa (Fig. 5.8 (a), (b)), la deformata relativa ai carichi verticali presenta un abbassamento massimo pari a 1.42 cm in corrispondenza delle colonne 59 e 62, mentre nel caso di spostamento in sommità di 30 mm si registra un abbassamento massimo di 1.98 cm in corrispondenza delle colonne 58 e 61. Per $E_s=500$ MPa (Fig. 5.8 (c), (d)), i carichi verticali portano ad un abbassamento massimo pari a 0.034 cm in corrispondenza delle colonne 59 e 62, mentre lo spostamento in sommità di 30 mm fa registrare un abbassamento massimo di 0.044 cm in corrispondenza delle colonne 58 e 61.

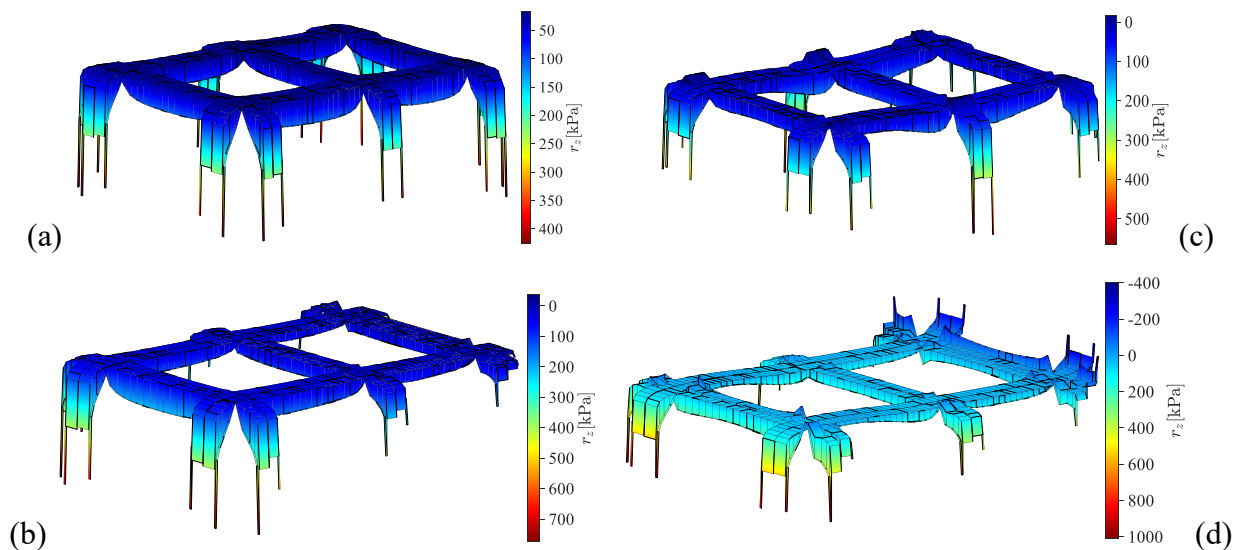


Fig. 5.9. Reazioni verticali del suolo. Reazioni relative ai carichi verticali (a), (c), reazioni relative allo spostamento del nodo di controllo pari a 30 mm (b), (d). Rigidezza del suolo: $E_s=10$ MPa (a), (b); $E_s=500$ MPa (c), (d).

Nelle Fig. 5.9 (a), (c) sono riportate le reazioni della struttura relative ai carichi verticali, mentre nelle Fig. 5.9 (b), (d) sono riportate le reazioni relative allo spostamento del nodo di controllo pari a 30 mm. Con $E_s=10$ MPa, le reazioni corrispondenti ai carichi verticali sono ben distribuite su tutta la fondazione, presentano una tensione media di circa 80 kPa ed hanno picchi del valore di 422 kPa in corrispondenza dei bordi della trave di fondazione, dopo l'applicazione dello spostamento di 30 mm al nodo di controllo, si registra un andamento lineare delle tensioni con valore circa nullo in prossimità delle colonne 60 e 63, valore medio in corrispondenza delle colonne 58 e 61 di 120 kPa con picco pari a 775 kPa in corrispondenza del bordo della trave di fondazione. Nel caso di $E_s=500$ MPa le tensioni da carico verticale si presentano concentrate maggiormente in prossimità della fondazione centrale dove fanno registrare un valore medio di 100 kPa, mentre vicino alle travi laterali assumono valori medi di circa 50 kPa, il valore di picco, relativo alla vicinanza con il bordo, vale 565 kPa e si registra in corrispondenza della trave centrale. Per quanto riguarda il caso di spostamento in sommità

di 30 mm, l'andamento delle tensioni non è lineare come nel caso di terreno deformabile e la fondazione presenta diverse sezioni con tensione negativa, che stanno ad indicare un sollevamento della stessa.

Nelle Fig. 5.10 (a), (c) sono riportati i diagrammi dei momenti flettenti relativi allo spostamento del nodo di controllo di 30 mm, mentre nelle Fig. 5.10 (b), (d) sono riportate, per i due terreni analizzati, le prime 5 cerniere plastiche sviluppate. In termini di momento flettente sulla struttura in elevazione si nota un andamento circa simile, invece, per le fondazioni i diagrammi sono sensibilmente diversi. La fondazione su suolo deformabile ($E_s=10$ MPa - Fig. 5.10 (a)) presenta valori di momento massimo sotto il pilastro 56-62 pari a 594.6 kNm, mentre quella su suolo rigido ($E_s=500$ MPa - Fig. 5.10 (c)) assume un valore massimo pari a 331.5 kNm con differenza relativa del 44%.

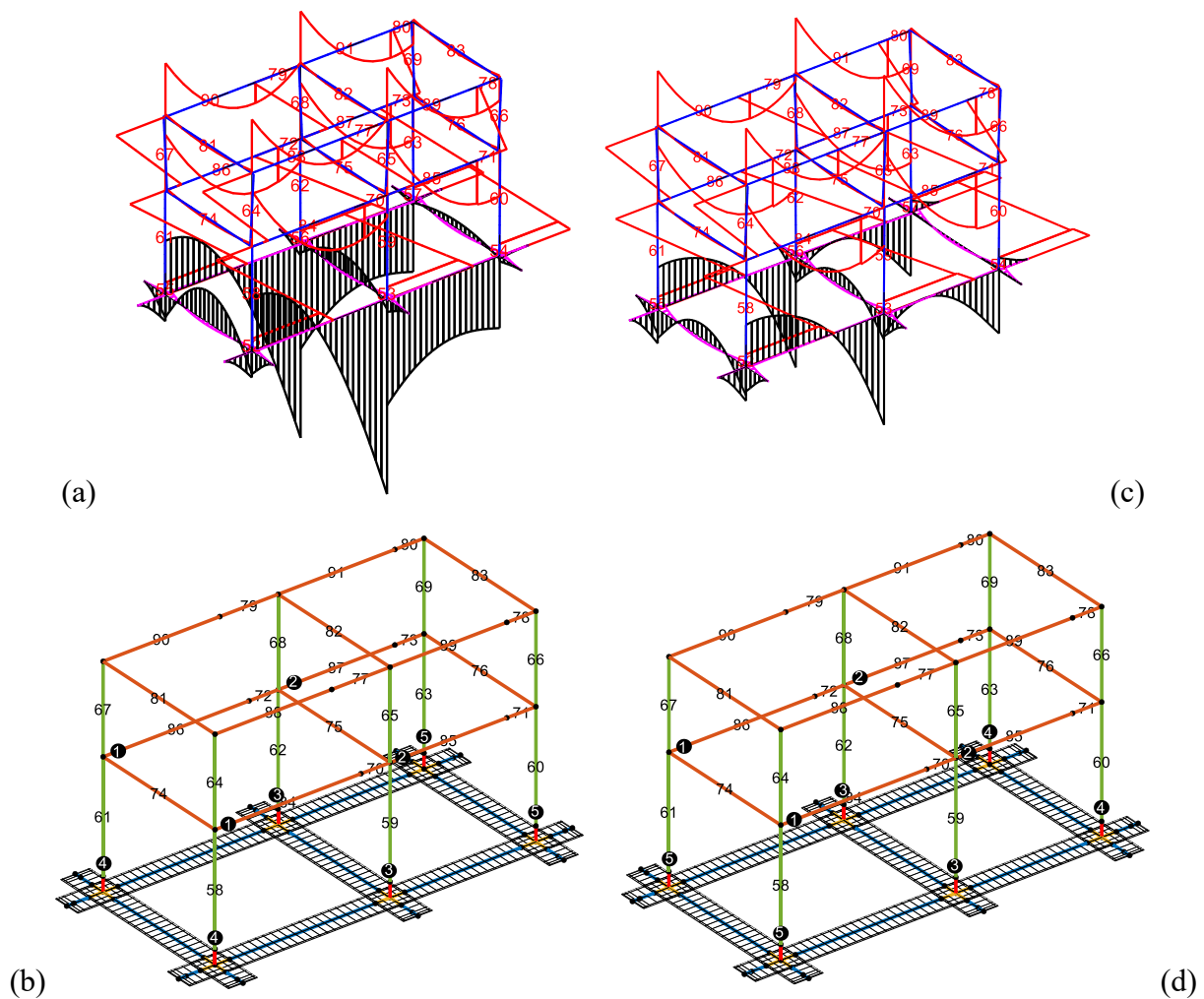


Fig. 5.10. Diagramma del momento flettente relativo allo spostamento del nodo di controllo pari a 30 mm (a), (c). Posizione delle prime 5 cerniere plastiche che si formano sul telaio (b), (d). Rigidezza del suolo: $E_s=10$ MPa (a), (b); $E_s=500$ MPa (c), (d).

5.7 Analisi non lineare di una struttura a pilastri isostatici

La struttura esaminata è un telaio monopiano con pilastri isostatici (Fig. 5.11) con elementi in acciaio S355. La base della colonna HEB240 è stata modellata con un legame costitutivo elasto-plastico con $M_{pl}=356\text{kNm}$, mentre per il contatto tra fondazione e suolo è stata utilizzata una mesh con $n_x=n_y=8$ e $\beta=3$. L'altezza delle colonne è pari a 6 m. Il suolo presenta $E_s=25\text{MPa}$ e $\nu_s=0.2$.

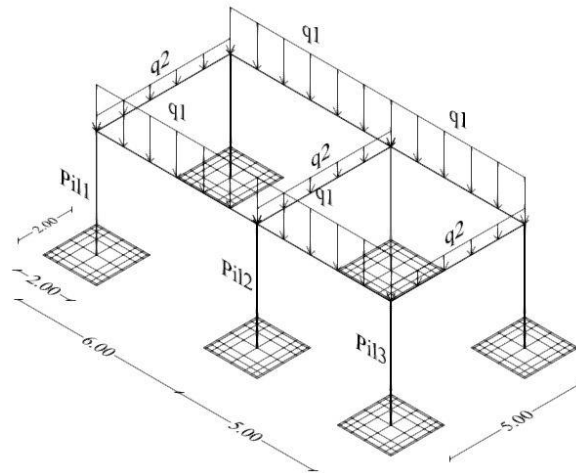


Fig. 5.11. Struttura monopiano su plinti isolati e con pilastri isostatici

5.7.1 Influenza degli effetti del secondo ordine e del contatto in sola compressione

Nel seguito vengono presentate alcune analisi di pushover realizzate con due modelli di contatto: *Lin* (contatto bilatero) e *NLin* (contatto monolatero in sola compressione). In particolare sono state analizzate le configurazioni riportate nella Tab. 5-4. I carichi verticali sono pari a $q_1=50\text{kN/m}$ e $q_2=5.3\text{kN/m}$.

Analisi contatto	Presenza KG	Sigla
Lineare	No	<i>Lin</i>
Lineare	Si	<i>LinKG</i>
Non Lineare	No	<i>NLin</i>
Non Lineare	Si	<i>NLinKG</i>

Tab. 5-4. Descrizione delle analisi realizzate.

Nella Fig. 5.12 sono riportate le curve taglio alla base-spostamento relative alle diverse analisi effettuate. La curva *Lin* raggiunge la completa plasticizzazione della base delle colonne ed ha un andamento bilineare, inoltre, non dipende dal carico verticale. La curva *LinKG* ha una pendenza minore rispetto a *Lin* per l'effetto apportato dalla matrice \mathbf{K}_g , che riduce la rigidezza strutturale

all'aumentare dello sforzo normale. Le curve $NLin$ e $NLinKG$ seguono le omologhe curve con contatto lineare fino a che non si verifica il sollevamento dei plinti. Si nota come il carico ultimo sia fortemente influenzato dalla non linearità del contatto e, quindi, dallo sforzo normale presente sui pilastri. Nella Fig. 5.12 in rosso sono riportati i punti nei quali si verifica il ribaltamento del plinto relativo al "Pil3".

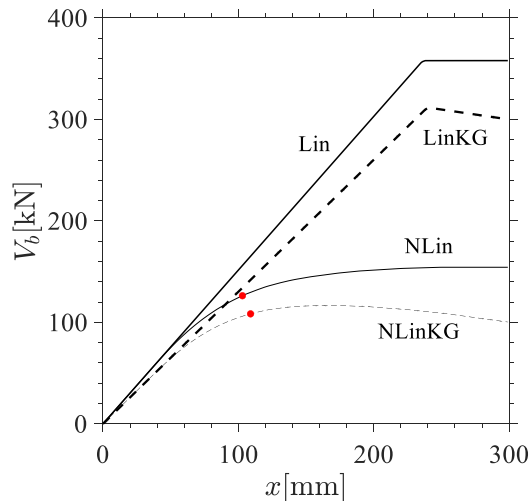


Fig. 5.12. Struttura monopiano con pilastri isostatici. Analisi pushover su suolo elastico: contatto lineare (Lin); contatto non lineare ($NLin$); contatto lineare con K_g ($LinKG$); contatto non lineare con K_g ($NLinKG$).

Nelle Fig. 5.13 a,b sono riportati i diagrammi momento-rotazione relativi alla cerniera plastica presente al piede dei pilastri "Pil2" e "Pil3". Nei casi $NLin$ e $NLinKG$, per via del sollevamento della fondazione, non si riesce a sviluppare la plasticizzazione della sezione. Si nota inoltre che il momento raggiunto sia proporzionale allo sforzo normale presente sul pilastro.

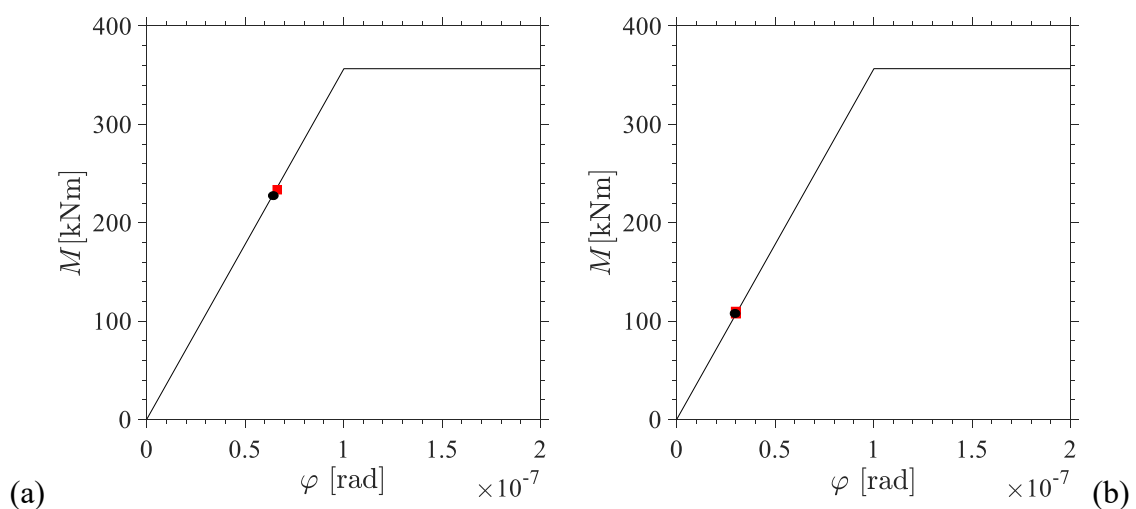


Fig. 5.13. Diagramma momento rotazione della base del pilastro. Colonna "Pil2"(a); colonna "Pil3"(b). Lin e LinKG (linea continua); valore massimo NLin (quadrato rosso); valore massimo NLinKG (cerchio nero).

Nella Fig. 5.14 sono riportati i diagrammi momento rotazione relativi ai diversi casi analizzati. Con la linea tratteggiata si riporta il diagramma relativo al caso di contatto lineare, mentre con la linea continua si riportano i diagrammi relativi al caso non lineare per i diversi plinti di fondazione. Si nota, nel caso di contatto non lineare, la medesima rigidezza rotazionale del caso *Lin* fino al raggiungimento della tensione nulla su un estremo della fondazione. Il punto di sollevamento della fondazione è funzione del solo sforzo normale presente. Le curve relative al contatto non lineare raggiungono pendenza nulla in prossimità del completo ribaltamento.

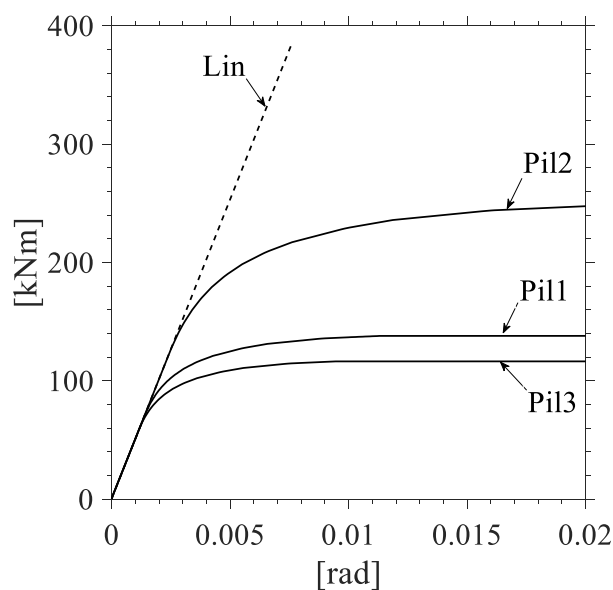


Fig. 5.14. Momento rotazione dei plinti di fondazione. Analisi di contatto lineare (linea tratteggiata); analisi di contatto non lineare relativa ai diversi plinti (linea continua).

5.7.2 Analisi pushover con contatto non lineare al variare dello sforzo normale

Con riferimento alla struttura presentata nella Fig. 5.11 sono state effettuate analisi di pushover considerando un contatto monolatero in sola compressione, facendo variare il carico sulle colonne tra l'1% ed il 23% dello sforzo normale ultimo N_u della colonna, come riportato nella Tab. 5-5, gli effetti del secondo ordine sono stati considerati per mezzo della matrice \mathbf{K}_g . Le criticità che portano all'interruzione dell'analisi sono il ribaltamento imminente del plinto sotto il "Pil3" ed il raggiungimento del carico limite sotto il plinto del "Pil2".

Caso carico	Travi Principali	Travi Secondarie	N_{max} (Pil2)	N/N_u (PIL2)	X_c	V_b	Criticità
n°	[kN/m]	[kN/m]	[kN]	[%]	[mm]	[kN]	
<i>C1</i>	5.28	5.28	42.2	1%	22	20.7	Rib. Pil3
<i>C2</i>	20	5.28	123.2	3%	47	51.8	Rib. Pil3
<i>C3</i>	40	5.28	233.2	7%	88	91.0	Rib. Pil3
<i>C4</i>	60	5.28	343.2	10%	118	119.7	Rib. Pil3
<i>C5</i>	80	5.28	453.2	13%	169	150.7	Rib. Pil3
<i>C6</i>	100	5.28	563.2	16%	189	165.8	Rib/qLIM
<i>C7</i>	120	5.28	673.2	19%	157	149.9	qLIM Pil2
<i>C8</i>	150	5.28	838.2	23%	103	92.8	qLIM Pil2

Tab. 5-5. Descrizione dei casi di carico considerati.

Nella Fig. 5.15,a sono riportate le curve Forza-Spostamento della struttura sopra descritta, sulle ascisse è riportato lo spostamento del nodo di controllo, preso in corrispondenza della testa delle colonne, mentre sulle ordinate è riportato il tagliante alla base. L'analisi è condotta in controllo di spostamento, i cerchi rossi rappresentano la condizione di ribaltamento del plinto "Pil3", mentre quelli blu la condizione di raggiungimento del carico limite sotto il plinto del "Pil2". Si nota che, all'aumentare del carico verticale, la pendenza della curva (quindi la rigidità della struttura) diminuisce, questo è dovuto dalla presenza degli effetti del secondo ordine (matrice \mathbf{K}_g). Per carichi bassi la criticità è rappresentata dal completo sollevamento del plinto meno caricato (plinto sotto "Pil3"), mentre per carichi elevati si raggiunge il carico limite sotto il plinto del pilastro "Pil2". La Fig. 5.15 b riporta l'andamento dei "punti di criticità" al variare dello sforzo normale adimensionalizzato, si nota che il valore del taglio alla base aumenta all'aumentare del carico verticale fino a raggiungere, per il caso *C6*, il suo massimo in corrispondenza del quale si presenta la condizione di contemporaneo raggiungimento delle due criticità. Superato tale valore si ha il cambio di criticità che passa dal sollevamento della fondazione del plinto sotto "Pil3" al raggiungimento del carico limite sotto il plinto del pilastro "Pil2". Si nota che i valori di taglio alla base per le condizioni *C3-C5* sono prossimi a quelli delle condizioni *C7-C8*, rispettivamente.

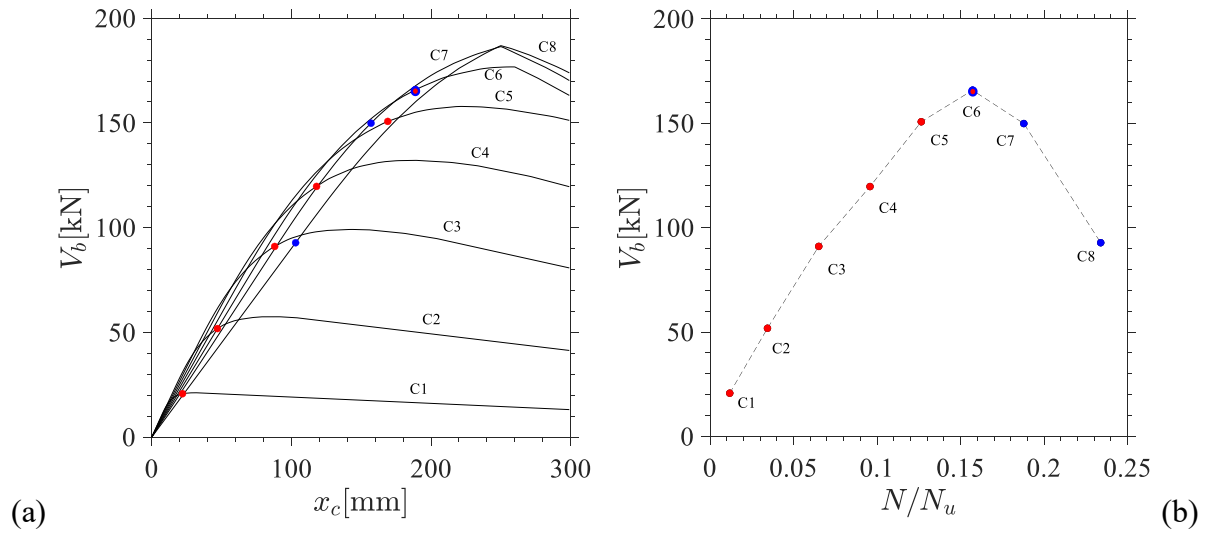


Fig. 5.15. Analisi al variare dello sforzo normale con contatto non lineare. Curve pushover al variare dello sforzo normale (a); punti di criticità al variare dello sforzo normale adimensionale(b); ribaltamento fondazione sotto pilastro “Pil3” (cerchio rosso); raggiungimento carico limite fondazione sotto pilastro “Pil2” (cerchio blu).

5.7.3 Momento rotazione della fondazione al variare dello sforzo normale

Nel presente paragrafo è presentata un'analisi parametrica di una fondazione rigida su suolo elastico, al variare dello sforzo normale applicato. Il modello di contatto utilizzato è non lineare in sola compressione. Lo scopo di questa applicazione è quello di ottenere diagrammi momento-rotazione per diversi valori di carico verticale compresi tra 50kN e 400kN (Tab. 5-6).

Sigla	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8
Sforzo normale N [kN]	50	100	150	200	250	300	400	Contatto lineare

Tab. 5-6. Valori di sforzo normale considerato

La fondazione con $b=L=2m$ è stata modellata con $n_x=n_y=8$ e $\beta=3$ ed è pensata su suolo con $E_s=25MPa$ con $\nu_s=0.2$. Nella Fig. 5.16 sono riportati i diagrammi momento-rotazione relativi ai diversi casi analizzati. La pendenza iniziale, prima del sollevamento del plinto, risulta essere indipendente dallo sforzo normale. L'analisi è condotta in controllo di spostamento, le rette orizzontali indicano un ribaltamento della fondazione. Si nota, all'aumentare del carico verticale, la crescita del momento di primo sollevamento (punto in cui la curva si distacca dalla retta iniziale) e conseguentemente la crescita del momento di ribaltamento.

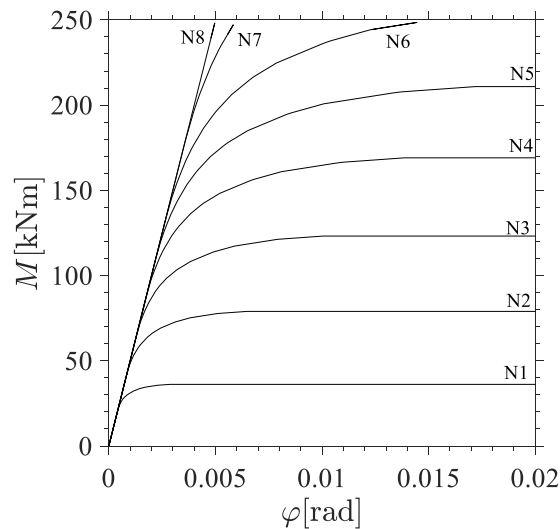


Fig. 5.16. Diagramma momento-rotazione della fondazione per diversi valori di sforzo normale.

È interessante notare che il momento di sollevamento della fondazione su semispazio elastico vale:

$$M_s \approx \frac{Nb}{4} \quad \text{Eq. 5.39}$$

Nel caso di sezione su base rigida vale:

$$M_s = \frac{Nb}{2} \quad \text{Eq. 5.40}$$

Mentre nel caso di fondazione su suolo alla Winkler, cioè ipotizzando una distribuzione lineare delle reazioni il momento di sollevamento vale:

$$M_s = \frac{Nb}{6} \quad \text{Eq. 5.41}$$

Si nota che il momento di sollevamento sul semispazio è 1.5 volte più grande di quello calcolato con suolo alla Winkler. Nella Tab. 5-7 sono messi a confronto i valori del momento di sollevamento del modello Winkler con quelli di punch rigido su semispazio elastico.

Sigla	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
Sforzo normale N [kN]	50.0	100.0	150.0	200.0	250.0	300.0	400.0
Msol GBEM (Modello)	23.5	48.3	71.9	96.7	119.2	141.8	186.9
Msol Winkler (Eq. 5.41)	16.7	33.3	50.0	66.7	83.3	100.0	133.3

Tab. 5-7. Valori del momento di primo sollevamento relativo ai vari carichi verticali. Modello punch rigido su semispazio e Winkler a confronto.

Nella Fig. 5.17 sono riportati gli andamenti dei momenti di sollevamento al variare dello sforzo normale.

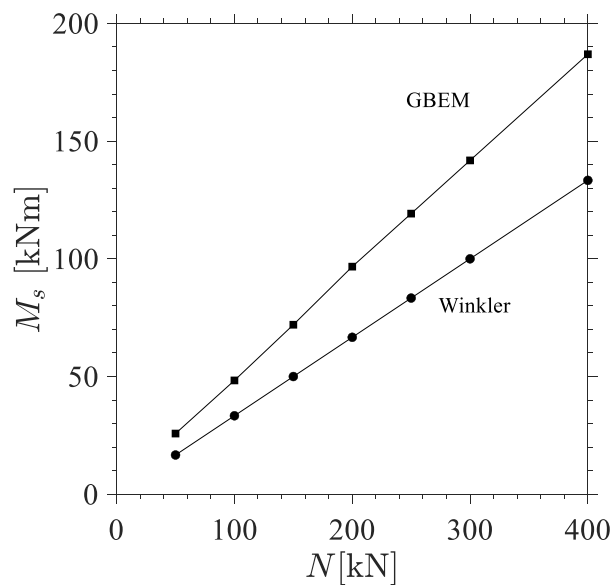


Fig. 5.17. Momento di primo sollevamento al variare dello sforzo normale, confronto tra modello Winkler e GBEM.

La Fig. 5.18 riporta i diagrammi momento-rotazione al variare della rigidezza del suolo nella condizione di carico N1, con la linea continua è riportato il diagramma con modello di contatto non lineare, con la linea sottile tratteggiata è riportato il diagramma con contatto lineare e con la linea

rossa è indicato il valore del momento di primo sollevamento della fondazione. Si nota che il sollevamento ed il ribaltamento risultano indipendenti dalla rigidezza del suolo.

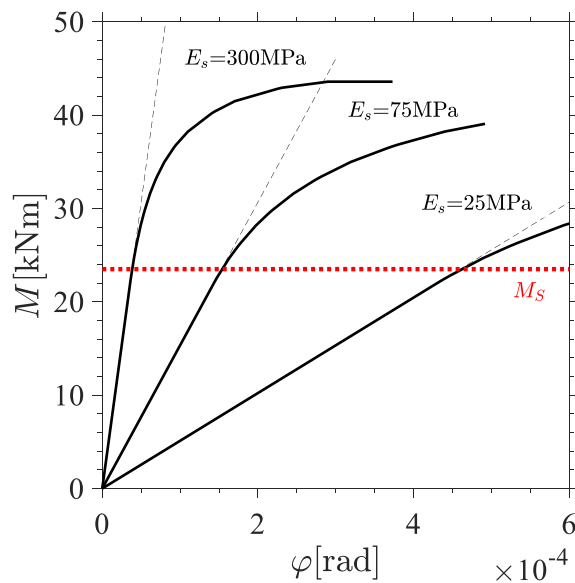


Fig. 5.18. Momento rotazione plinto per diversi valori di E_s nella condizione di carico NI . Analisi di contatto in sola compressione (linea continua); analisi di contatto lineare (linea sottile tratteggiata); valore del momento di sollevamento M_s (linea tratteggiata rossa).

Vista l'assunzione di tensioni costanti sull'elemento di suolo non si riesce a cogliere perfettamente il momento di ribaltamento che per l'equilibrio a rotazione deve assumere il valore di $M_{Rib} = Nb / 2$. Per chiarire il concetto nella Fig. 5.19 è riportata la sezione trasversale di un plinto sottoposto a N ed M avente una suddivisione in n_x elementi di lunghezza L_x . Nella situazione limite, a ribaltamento imminente, il momento massimo a cui si può attingere nel modello risulta: $M_{Max} = N(b - L_x) / 2$. La differenza tra M_{Rib} e M_{Max} , per mesh uniforme, è proporzionale alla lunghezza dell'elemento L_x ed è pari a $\Delta M = NL_x / 2$.

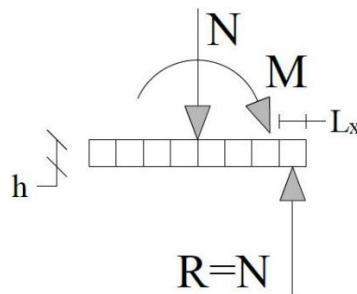


Fig. 5.19. Sezione trasversale del modello del plinto. Situazione limite prima del ribaltamento della sezione.

5.8 Analisi di strutture monopiano considerando il rocking isolation

Nel seguito viene analizzato un portale bidimensionale estratto da un capannone industriale prefabbricato. La struttura presenta pilastri di altezza pari a 6.00m con sezione 45x50 cm collegati in testa da una trave a doppia pendenza della lunghezza di 16m (Fig. 5.20), la fondazione è composta da plinti a bicchiere poggianti su sottoplinto di dimensioni 2.8m x 2.8m x 0.5m. Il suolo presenta $E_s=25\text{MPa}$ e $\nu_s=0.2$, mentre il punch rigido è stato discretizzato con $n_x=n_y=8$ e $\beta=3$. Il carico q_l in combinazione sismica risulta pari a 29kN/m, lo sforzo normale sulle colonne, comprensivo del peso delle stesse, risulta 266kN, mentre il carico verticale gravante sul piano di posa della fondazione è pari a 361kN. Il momento di sollevamento della fondazione derivante dall'analisi con modello BEM (Galerkin) risulta pari a $M_s=235\text{kNm}$ (su semispazio elastico il momento di sollevamento vale circa $M_s \approx Nb/4$).

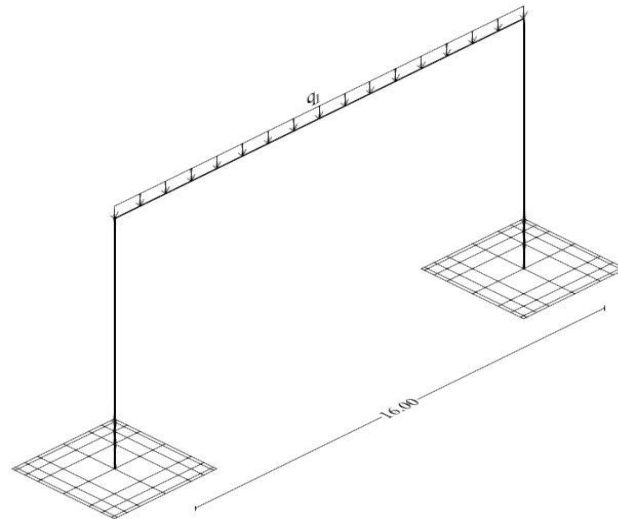


Fig. 5.20. Modello del portale monopiano in calcestruzzo armato su punch rigidi.

Per mostrare le potenzialità dell'approccio con rocking isolation presentato da Gelagoti et al. (2011), viene proposto il rinforzo della sezione di base delle colonne. Nella Fig. 5.21 sono riportati i diagrammi momento-curvatura relativi alla sezione allo stato di fatto (rosso) e allo stato di progetto (blu). Il momento ultimo della colonna passa da 200kNm allo stato di fatto a 337kNm allo stato di progetto, questo valore consente di avere una sollecitazione flettente agente sul piano di posa della fondazione tale da permettere il sollevamento del plinto e, quindi, garantire una maggiore capacità di spostamento alla struttura.

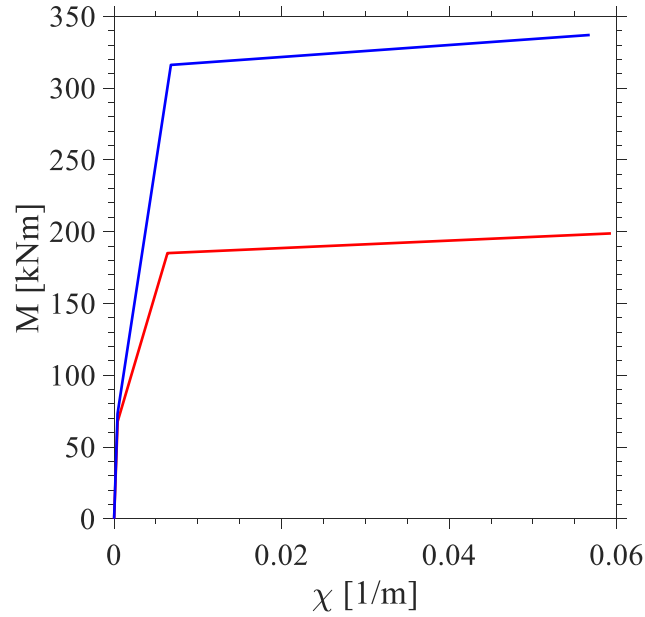


Fig. 5.21. Diagramma momento curvatura. Sezione stato di fatto (linea rossa); sezione stato di progetto (linea blu).

Per utilizzare il metodo di Shakourzadeh, Guo e Batoz (1999), che permette di concentrare le non linearità agli estremi delle aste, è stato necessario integrare le curvature sull'intera colonna per stimare le rotazioni alla base della stessa ed ottenere il legame trilineare momento-rotazione. Nella Fig. 5.22 è riportato lo schema utilizzato per l'integrazione delle curvature. La rotazione ultima φ_u (Eq. 5.42) si raggiunge in corrispondenza del momento alla base $M=M_u$.

$$\varphi_u = \int_0^H \chi(z) dz = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad \text{Eq. 5.42}$$

Dove:

$$\varphi_1 = \chi_1 \frac{H}{2} = \frac{M_u}{EI} \frac{H}{2} \quad \text{Eq. 5.43}$$

$$\varphi_2 = (\chi_2 - \chi_1) \frac{H_1}{2} \quad \text{Eq. 5.44}$$

$$\varphi_3 = (\chi_u - \chi_2) \frac{H_2}{2} \rightarrow \text{Teorema valor medio} \rightarrow \varphi_3 = (\chi_u - \chi_y) L_p \quad \text{Eq. 5.45}$$

con L_p lunghezza della cerniera plastica, calcolata in accordo con UNI-EN 1998-3 (Eq. 5.48).

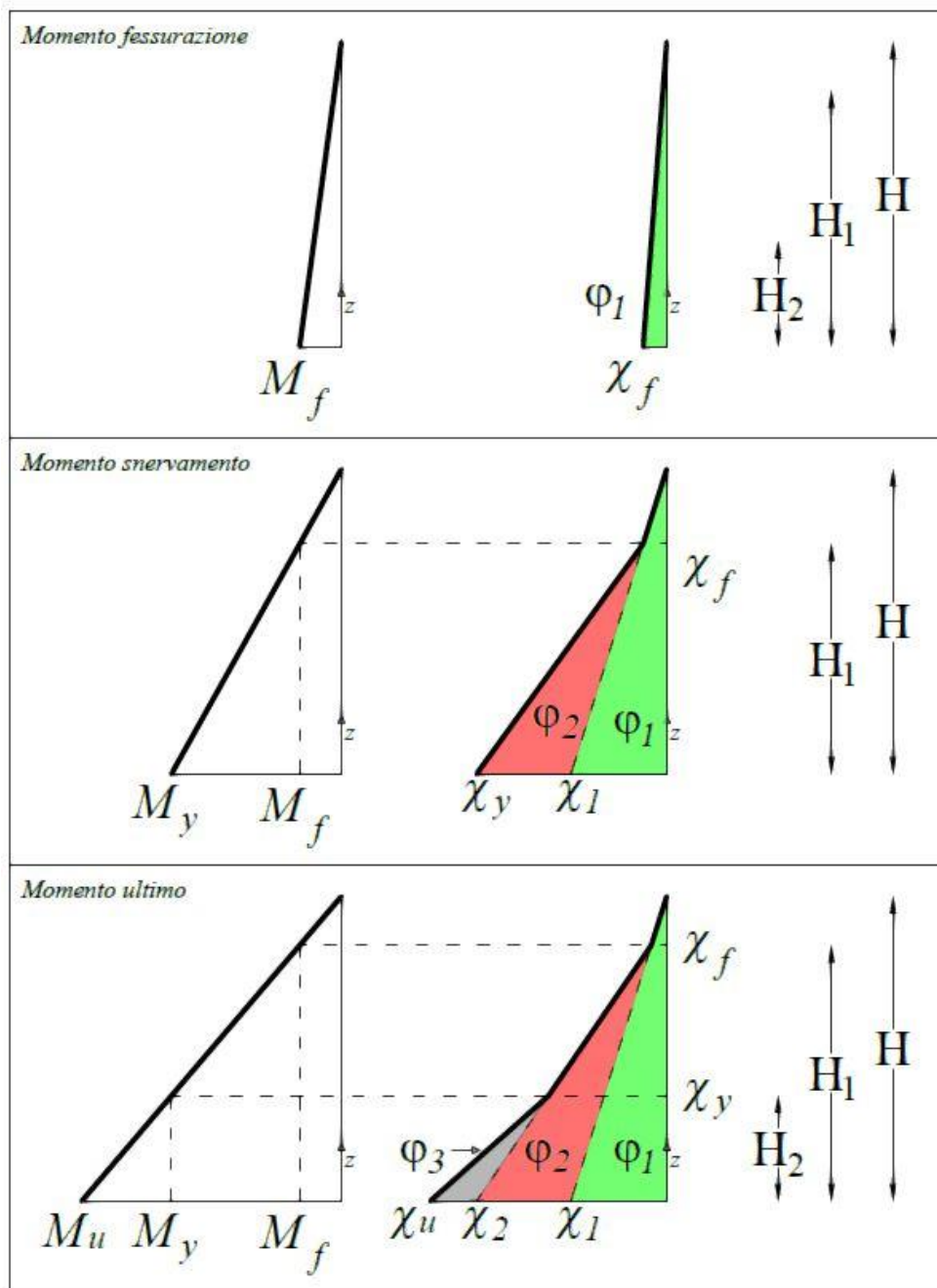


Fig. 5.22. Schema di integrazione del momento curvatura sulla colonna.

Integrando le curvature sull'intera colonna e utilizzando la definizione di lunghezza della cerniera plastica si giunge alla determinazione del diagramma momento rotazione (Fig. 5.23).

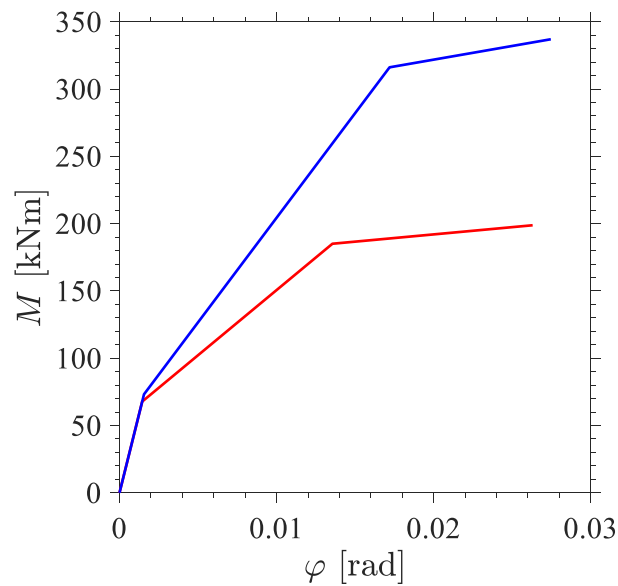


Fig. 5.23. Diagramma momento rotazione base colonna. Stato di fatto (linea rossa); stato di progetto (linea blu).

Ottenuti i diagrammi momento rotazione si procede con l'implementazione di un'analisi statica non lineare che include gli effetti del secondo ordine e considera il contatto tra suolo e fondazione in sola compressione.

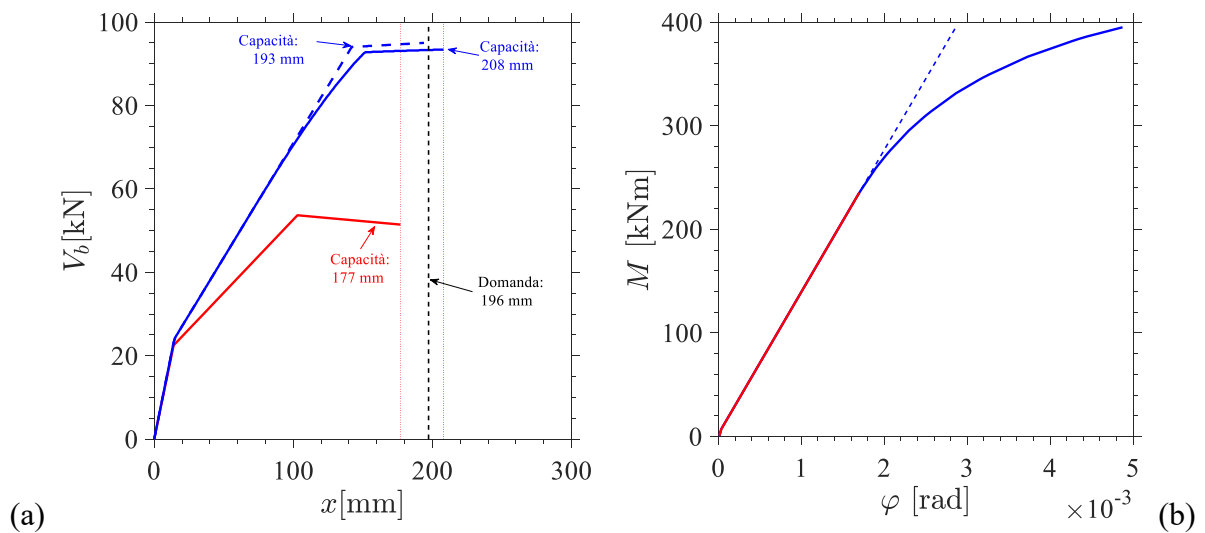


Fig. 5.24. Curve di pushover su suolo elastico (a), diagramma momento rotazione del plinto di fondazione (b). Struttura stato di fatto (linea rossa); struttura rinforzata (linea blu); struttura rinforzata con contatto bilatero (linea blu tratteggiata).

Nella Fig. 5.24(a), (b) sono riportate le curve di pushover e il diagramma momento rotazione dei plinti, rispettivamente. La struttura non rinforzata (linea rossa) presenta un tagliante ultimo di 52 kN corrispondente ad uno spostamento del nodo di controllo di 177 mm; la struttura rinforzata con contatto monolatero fa registrare un tagliante di 93kN ed uno spostamento massimo di 206mm, mentre la struttura rinforzata con contatto bilatero (linea blu tratteggiata) presenta un tagliante di 95 kN ed uno spostamento di 193mm. In termini di momento rotazione si nota che la struttura, allo stato di fatto, non è in grado di raggiungere il momento di sollevamento del plinto M_{uplift} , facendo registrare un momento massimo in fondazione di 230kNm. A seguito del rinforzo, il momento massimo in fondazione risulta pari a 390kNm, tale valore permette di averne il sollevamento. Per la struttura rinforzata, si nota che il contatto in sola compressione permette di attingere ad uno spostamento ultimo maggiore di 13mm rispetto al caso di contatto bilatero, tale differenza è dovuta alla diminuzione della rigidità del legame momento rotazione del plinto attribuibile al sollevamento dello stesso. Per la verifica allo stato limite di collasso è stato utilizzato il metodo N2, che prevede la bilinearizzazione dello spettro di capacità e la costruzione dello spettro di domanda nel piano ADRS. Nella Tab. 5-8 sono riportati i parametri indipendenti dello spettro utilizzato per le verifiche.

Parametro	SLC
a_g [g]	0.184
F_o	2.546
T_c^* [s]	0.279
S_s	1.696
C_c	2.150

Tab. 5-8. Parametri indipendenti dello spettro utilizzato.

Lo stato limite di collasso è relativo al raggiungimento della rotazione alla corda ultima calcolata in accordo con le NTC 2018 e riportata di seguito:

$$\varphi_u = \frac{1}{\gamma_{el}} \left[\varphi_y + (\chi_u - \chi_y) L_p \left(1 - \frac{0.5L_p}{L_v} \right) \right] \quad \text{Eq. 5.46}$$

$$\varphi_y = \chi_y \frac{L_v}{3} + 0.0013 \left(1 + 1.5 \frac{h}{L_v} \right) + 0.13 \chi_y \frac{d_b f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{Eq. 5.47}$$

$$L_p = 0.1L_v + 0.17h + 0.24 \frac{d_b L f_y}{\sqrt{f_c}} \quad \text{Eq. 5.48}$$

dove L_v rappresenta il rapporto tra momento e taglio; h è l'altezza della sezione; d_{bL} è il diametro medio delle barre longitudinali; f_y è la tensione di snervamento e f_c è la tensione di progetto del calcestruzzo.

Nella Fig. 5.25 sono riportate le verifiche SLC relative allo stato di fatto (linea rossa) e di progetto (linea blu). La domanda sismica nei due casi risulta essere circa la stessa e vale 196mm. A seguito dell'intervento di rinforzo, che permette di usufruire del contributo dovuto al sollevamento del plinto, la struttura è in grado di far fronte alla domanda di spostamento richiesta dall'azione sismica.

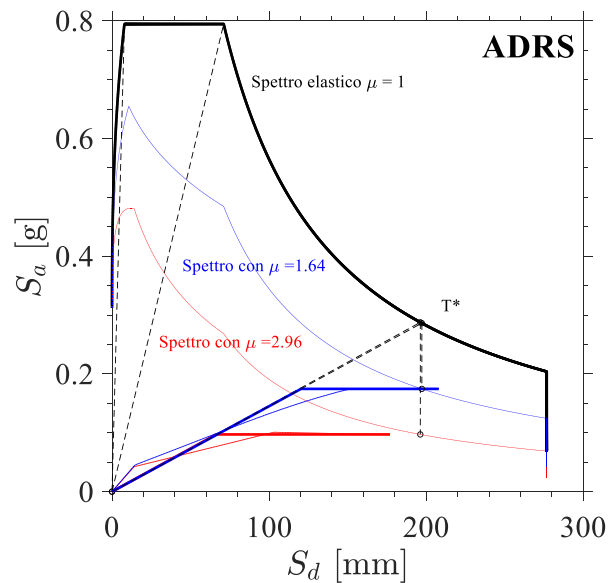


Fig. 5.25. Verifica SLC della struttura. Stato di fatto (rosso); struttura rinforzata (blu).

5.9 Rigidezza del giunto di base del telaio

Considerando il tipico giunto semirigido di base di un telaio in acciaio, sottoposto a sforzo normale N e momento flettente M , si può osservare che la rigidezza totale è composta da due contributi, come mostrato in Fig. 5.26 (Krystosik 2018).

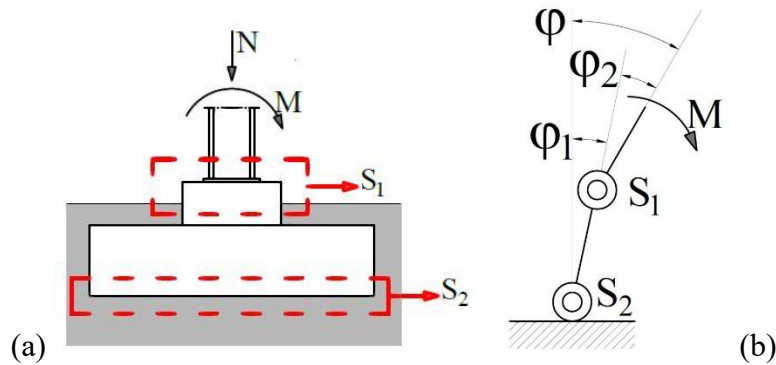


Fig. 5.26. Nodo semirigido di base di un telaio in acciaio. Rappresentazione reale (a), modello di nodo semirigido (b).

Il primo contributo è quello dato dalla rigidezza della base della colonna S_1 , il secondo è quello dato dalla rigidezza della fondazione su suolo elastico S_2 . La rigidezza rotazionale offerta da ogni componente può essere espressa attraverso l'Eq. 5.49.

$$S_i = \frac{M}{\varphi_i} \quad \text{con } i = 1, 2. \tag{Eq. 5.49}$$

ricordando che $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ la rigidezza equivalente può essere scritta come segue:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \tag{Eq. 5.50}$$

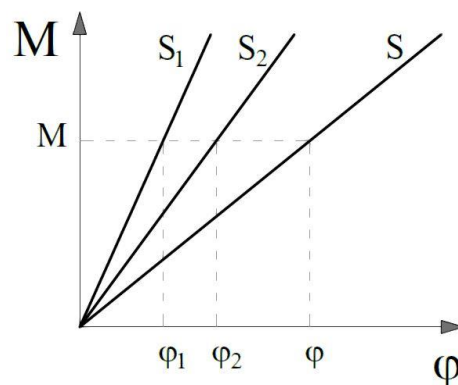


Fig. 5.27. Momento rotazione relativo al giunto di base.

L'interpretazione grafica della curva momento-rotazione relativa al giunto di base è riportata nella Fig. 5.27. Si nota che la rigidezza equivalente è necessariamente inferiore a ciascuna delle due rigidezze che compongono il giunto. Il problema della determinazione della rigidezza S_1 del nodo semirigido alla base delle colonne è ben noto, discusso in Ermopoulos e Stamatopoulos (1996, 2011). Anche l'Eurocodice 3 (EN 1993-1-8: 2005) contiene alcune procedure per quanto riguarda la valutazione della rigidezza e della resistenza di giunti di base di colonne semirigide. La valutazione della rigidezza del giunto S_2 causa molti più problemi nella pratica. Se allo stato limite ultimo della struttura, le sollecitazioni limite nel terreno non vengono superate, la rigidezza S_2 può essere determinata con uno dei metodi presentati nel seguente paragrafo.

5.9.1 Rigidezza rotazionale di fondazione rigida su suolo elastico

La relazione momento-rotazione di un plinto su suolo elastico è stata affrontata con diversi approcci. La rigidezza rotazionale S_2 è stata ricavata da:

- Borowicka (1943) per suolo elastico con fondazione circolare, poi adattata al caso rettangolare (Eq. 5.51-Eq. 5.52);

$$S_2 = \frac{4}{3} \frac{E_s}{1-\nu^2} r^3 \quad \text{Sezione circolare di raggio } r \quad \text{Eq. 5.51}$$

dall' Eq. 5.51 si ricava la rigidezza per sezione rettangolare $b \times L$ operando la seguente sostituzione:

$$r = \sqrt[4]{\frac{bL^3}{3\pi}} \quad \text{Eq. 5.52}$$

- Gazetas (1991) per suolo elastico con fondazione rettangolare (Eq. 5.53);

$$S_2 = \frac{E_s}{2(1-\nu^2)} I_y^{0.75} \left[3 \left(\frac{L}{b} \right)^{0.15} \right] \quad \text{Eq. 5.53}$$

- El Naggar e Allotey (2003) per suolo alla Winkler (Eq. 5.58).

$$S_2 = k_w \frac{L^3 b}{12} \quad \text{Eq. 5.54}$$

utilizzando k_w ottenuta da Gorbunow e Posadow (1956) (Eq. 5.55)

$$k_w = \frac{3E_s \sqrt{L/b}}{2(1-\nu^2) \omega \sqrt{A}} \quad \text{Eq. 5.55}$$

dove A rappresenta l'area della fondazione ed il coefficiente ω è riportato nella seguente espressione:

$$\omega = 0.8(L/b)^{0.56} - 0.2 \quad \text{Eq. 5.56}$$

Si ottiene l'angolo di rotazione per una fondazione rettangolare rigida eccentricamente caricata su suolo alla Winkler, ricavata da Bowles (1997) (Eq. 5.57).

$$\varphi = \frac{(1-\nu^2)}{E_s} \frac{M}{L^2 b} m; \quad \text{con } m = \frac{16}{\pi(1+0.22L/b)} \quad \text{Eq. 5.57}$$

La rigidezza rotazionale S_2 può essere ricavata a partire dall'Eq. 5.57 e trasforma l' Eq. 5.54 nella seguente espressione:

$$S_2 = \frac{M}{\varphi} = \frac{E_s}{(1-\nu^2)} \frac{L^2 b}{m} \quad \text{Eq. 5.58}$$

5.9.1.1 Confronti in termini di rigidità rotazionale S_2

Nel presente lavoro è stata eseguita un'analisi parametrica della rigidità rotazionale S_2 delle fondazioni utilizzando un modello GBEM con mesh graded. Successivamente sono stati realizzati confronti in termini di rigidità S_2 tra diversi modelli di suolo. In accordo con il lavoro di Krystosik (2018), la rigidità è stata calcolata per diverse proporzioni dei lati della fondazione $\alpha=L/b$, mantenendo l'area di contatto costante e pari ad $A=2\text{m}^2$. Il suolo è stato ipotizzato con $E_s=65\text{ MPa}$ e $\nu_s=0.25$. Le lunghezze dei lati utilizzate e le loro proporzioni sono riportate nella Tab. 5-9.

$\alpha=L/b$	1/3	1/2	2/3	1	3/2	2	3
$L[\text{m}]$	0.816	1	1.155	1.414	1.732	2	2.449
$b[\text{m}]$	2.449	2	1.732	1.414	1.155	1	0.816

Tab. 5-9. Dimensioni delle fondazioni utilizzate.

Il metodo GBEM con mesh graded è stato applicato ad un punch rigido su suolo elastico soggetto a carico verticale fisso e momento monotono crescente. La mesh utilizzata presenta $n_x=n_y=8$ con $\beta=3$, il contatto è bilatero. Nella Fig. 5.28, per la presente analisi, sono riportati i diversi diagrammi momento-rotazione al variare di α . La rigidità rotazionale S_2 cresce al crescere di α , passando da $S_2=2.46\text{E}+04\text{ kNm/rad}$ a $S_2=1.22\text{E}+05\text{ kNm/rad}$, per $\alpha=1/3$ e $\alpha=3$ rispettivamente.

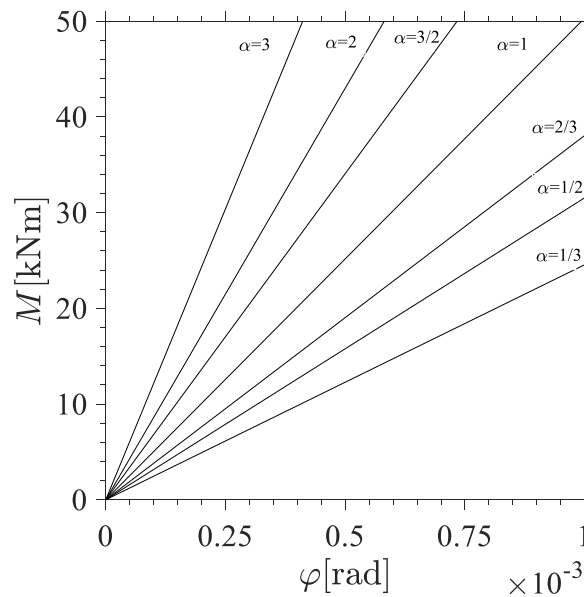


Fig. 5.28. Momento rotazione relativo al metodo GBEM graded al variare del rapporto $\alpha=L/b$.

Nella Tab. 5-10 sono riportati i valori della rigidità S_2 relativi ai diversi modelli analizzati. Per una migliore lettura dei risultati si riporta l'istogramma di Fig. 5.29, contenente il valore di S_2 al variare di L/b . Dall'analisi dei risultati ottenuti si nota una dipendenza tra la rigidità S_2 del sistema e le dimensioni della fondazione rigida, infatti, all'aumentare del rapporto L/b aumenta la rigidità

S₂. La rigidezza maggiore risulta quella ottenuta con il BEM per $\alpha=3$ e con il FEM per $\alpha<3$, mentre, la rigidezza minore risulta quella ottenuta con Winkler per $\alpha\geq 1.5$ e con semispazio per $\alpha<1.5$.

$\alpha=L/b$	1/3	1/2	2/3	1	1.5	2	3
Winkler (El Naggar e Allotey 2003)	2.39E+04	3.02E+04	3.61E+04	4.70E+04	6.27E+04	7.84E+04	1.11E+05
Semispazio (Borowicka 1943)	2.13E+04	2.89E+04	3.59E+04	4.86E+04	6.59E+04	8.18E+04	1.11E+05
Semispazio (Gazetas 1991)	1.70E+04	2.45E+04	3.17E+04	4.56E+04	6.57E+04	8.51E+04	1.23E+05
FEM	2.64E+04	3.75E+04	4.42E+04	5.68E+04	7.63E+04	9.70E+04	1.36E+05
BEM	2.21E+04	3.03E+04	3.74E+04	5.03E+04	6.91E+04	8.76E+04	1.54E+05
Presente analisi (GBEM)	2.46E+04	3.15E+04	3.81E+04	5.03E+04	6.82E+04	8.60E+04	1.22E+05

Tab. 5-10. Valori delle rigidezze rotazionali S₂ [kNm/rad]

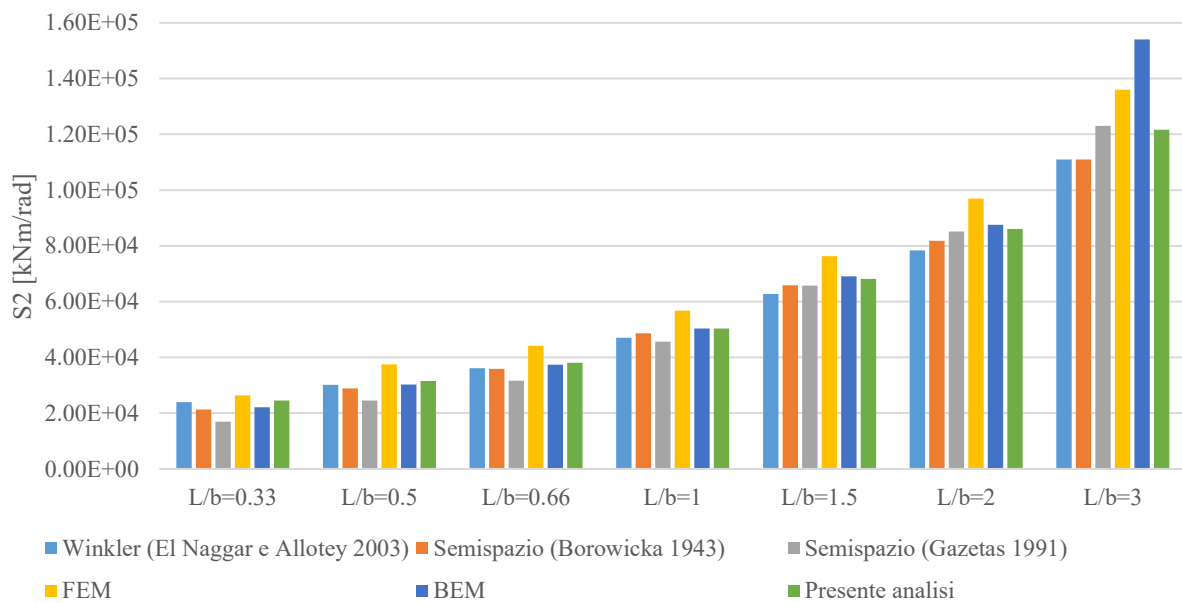


Fig. 5.29. Istogramma con il confronto tra le diverse rigidezze rotazionali al variare del rapporto $\alpha=L/b$.

5.9.2 Influenza della rigidità del giunto di base sull'instabilità

Nel seguito viene presentata l'analisi di stabilità di un telaio con nodi semirigidi alla base che simulano la presenza del suolo (Fig. 5.30). Le colonne, alte 6m, sono in acciaio S355 con profili HEB 240 disposti con l'inerzia maggiore in direzione trasversale, le travi sono dei profili IPE 400. I nodi trave-colonna e trave-trave sono pensati rigidi. Lo sforzo normale sulle colonne è costante e vale $P=150$ kN, inoltre la rigidità alla base del telaio S_1 è considerata infinita (nodo incastro perfetto). Per quanto riguarda la rigidità S_2 è stata calcolata in accordo con l'Eq. 5.53 (Gazetas (1991)) per un plinto di altezza pari a 1 m, impronta di base di 2m x 2m e suolo con $E_s=65$ MPa e $\nu_s=0.2$.

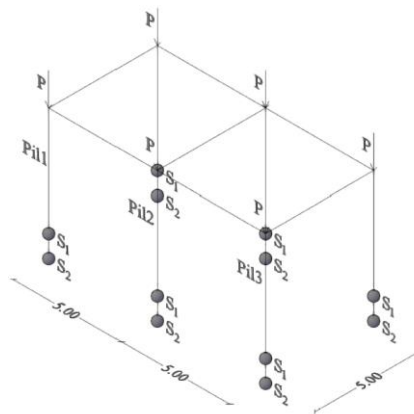


Fig. 5.30. Telaio su nodi semirigidi che simulano il terreno.

Nella Fig. 5.31 (a) sono riportate le deformate di instabilità relative alla rigidità $S_2=\infty$, nella Fig. 5.31 (b) le deformate relative a S_2 calcolate con l'Eq. 5.53 (Gazetas). Il primo modo risulta essere flessionale nel piano debole della sezione delle colonne, il secondo modo è torsionale e coinvolge l'intero telaio, mentre il terzo modo è flessionale nel piano forte della sezione.

Il confronto è stato realizzato in termini di carico critico N_{cr} , calcolato come autovalore della matrice di rigidità del sistema, e di altezza effettiva della colonna ($H_{cr}=\beta_L H$), governata dal parametro β_L calcolato secondo l'Eq. 5.59.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta_L H)^2} \rightarrow \beta_L = \frac{\pi}{H} \sqrt{\frac{EI}{N_{cr}}} \quad \text{Eq. 5.59}$$

dove EI è la rigidità della colonna; H è l'altezza della colonna del telaio.

Nella Tab. 5-11 sono riportati i valori dei carichi critici. Nel primo modo, considerando l'effettiva rigidità del sistema fondazione-suolo, si ha una diminuzione del carico del 6% per il piano debole e del 16% per il piano forte.

N_{cr} [kN]	$S_2=\infty$	$S_2=1.26E+05$ kNm/rad
Modo 1 (Piano debole)	2140.86	2021.67 (-6%)
Modo 2	3171.08	3099.03 (-2%)
Modo 3 (Piano forte)	5796.03	4986.91 (-16%)

Tab. 5-11. Carichi critici e differenze relative.

Nella Tab. 5-12 sono riportati i valori dei coefficienti di vincolo, che danno l'effettiva lunghezza libera di inflessione. Nel primo modo, considerando l'effettiva rigidità del sistema fondazione-suolo, si ha un aumento della lunghezza libera di inflessione del 3% per il piano debole e del 7% per il piano forte.

β_L	$S_2=\infty$	$S_2=1.26E+05$ kNm/rad
Modo 1 (Piano debole)	1.027	1.057 (3%)
Modo 3 (Piano forte)	1.059	1.142 (7%)

Tab. 5-12. Coefficienti di vincolo.

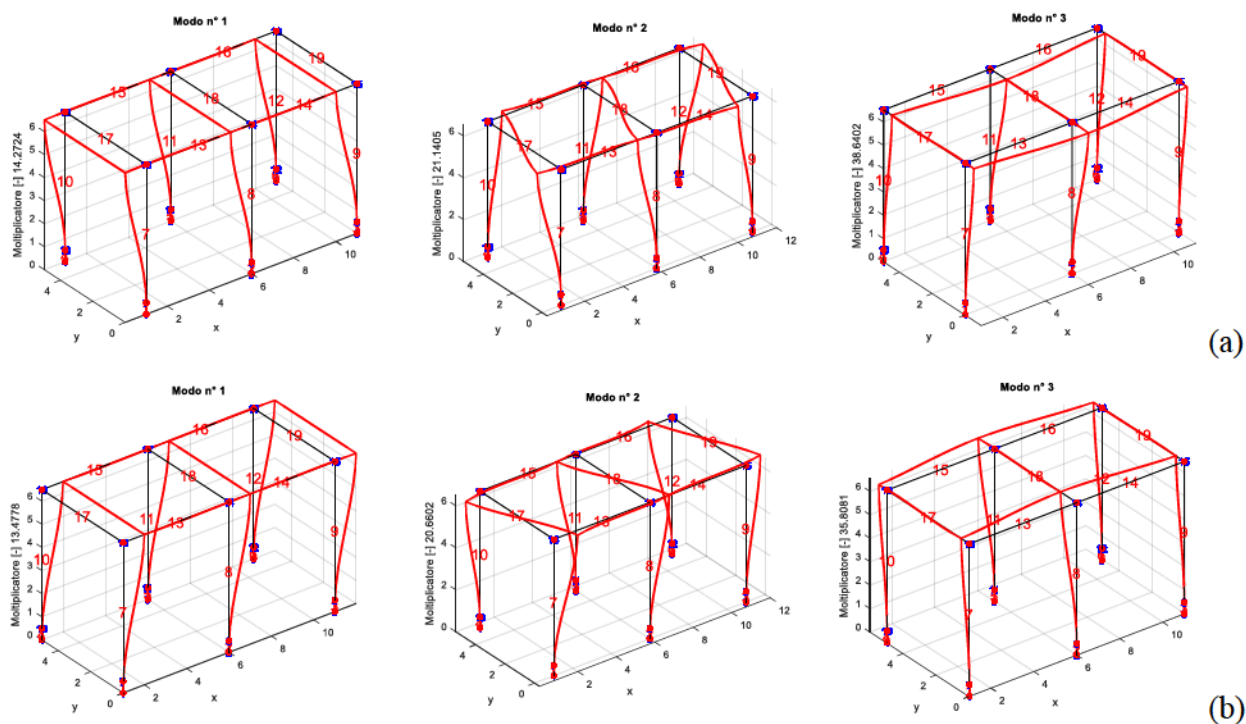


Fig. 5.31. Deformate di buckling di un telaio relative ai primi 3 modi. Rigidità della molla $S_2=\infty$ (a), rigidità della molla $S_2=1.26E+05$ kNm/rad Gazetas (b).

CONCLUSIONI

All'interno del primo capitolo è riportata la teoria utilizzata all'interno della tesi per risolvere problemi di interazione terreno-struttura. Nel secondo capitolo di questo lavoro è stato studiato il comportamento delle travi e dei grigliati su semispazio elastico, partendo dalla soluzione di Boussinesq è stata costruita la matrice di rigidezza del suolo. Inizialmente, per la soluzione di problemi relativi a punch rigidi, viene applicato il metodo degli elementi al contorno (BEM) di Galerkin già affrontato in Baraldi e Tullini (2020). Successivamente è stata spostata l'attenzione al comportamento delle travi deformabili soggette a diverse condizioni di carico utilizzando un approccio FE-BIE. Sono state analizzate diverse configurazioni di carico al variare del parametro αL che descrive l'interazione tra trave di fondazione e semispazio. Piccoli valori di αL rappresentano travi corte su semispazio poco rigido, mentre valori grandi di αL rappresentano travi lunghe su semispazio rigido. Per ogni tipologia di carico sono stati realizzati confronti con modelli FEM 3D che discretizzano la trave con elementi *beam* e il suolo con elementi di tipo *brick*. L'estensione del lavoro di Baraldi e Tullini (2018) riguarda l'analisi di travi compatte ed in parete sottile soggette a carichi torsionali poggiate su suolo elastico. Il problema di travi con sezione compatta è stato affrontato usando la classica teoria di De Saint Venant, mentre per quello relativo a travi con sezione aperta in parete sottile, è stata utilizzata la teoria della torsione di Vlasov. Dalle analisi risulta un buon accordo tra i modelli FEM e i modelli FE-BIE, sia in termini di andamento del momento torcente che di reazioni del suolo. Per i profili aperti in parete sottile il momento torcente totale è dato dalla somma del momento da torsione uniforme e del momento da torsione non uniforme. Per esempio, nel caso di trave a doppio T su suolo senza vincoli torsionali si ha che per $\alpha L=1$ il momento da torsione uniforme T_{11} è quasi costante nei tratti laterali della trave, con massimo in $L/4$ dove vale il 46% di T_{tot} , mentre, agli estremi della trave, T_{tot} è nullo cioè $T_{11}=-T_{12}$. Per $\alpha L=5$ il momento da torsione uniforme T_{11} ha un andamento sinusoidale, valore nullo nelle porzioni $L/4$ estreme della trave e valore massimo pari al 6% T_{tot} in corrispondenza di $0.4 L$, mentre il momento T_{12} ha la componente prevalente su tutta la trave. Successivamente, è stata focalizzata l'attenzione sulla ripartizione delle sollecitazioni nelle intersezioni di travi di fondazione, per meglio cogliere questo comportamento è stato realizzato un modello con travi incrociate nella loro mezzeria e soggette a coppia concentrata M_0 nell'intersezione. Il contributo flettente, per αL pari a 1, risulta il 96% di M_0 , mentre per αL pari a 10, risulta il 74% di M_0 . All'aumentare della rigidezza del suolo diminuisce il contributo flettente ed

aumenta quello torcente. Infine, sono stati analizzati grigliati di fondazione composti da travi deformabili e punch rigidi che gestiscono le intersezioni. Sono stati realizzati confronti con modelli FEM 3D con risultati che ben si allineano a quelli ottenuti con l'approccio FE-BIE. Il terzo capitolo è stato riservato allo studio della stabilità delle travi di fondazione soggette a carico di punta, coppie flettenti concentrate agli estremi e carico distribuito. Le travi di fondazione sono state discretizzate adottando un modello di trave basato sulla teoria della flessione di Eulero-Bernoulli e sulla teoria della torsione di Vlasov, utilizzando il modello di Barsoum e Gallagher (1970). Tale modello adotta 7 gradi di libertà per nodo e considera nella matrice \mathbf{K}_g il contributo all'instabilità di tutte le sollecitazioni e delle reazioni del suolo. I carichi critici sono valutati ricorrendo al metodo che prevede l'accoppiamento tra elementi finiti in spostamento e equazioni integrali al contorno (FE-BIE) proposto da Tullini e Tralli (2010). Nel caso di buckling flessio-torsionale, le analisi mostrano che i carichi critici aumentano all'aumentare del parametro αL , inoltre, al fine di verificare se l'instabilità torsionale anticipa quella flessionale (Baraldi e Tullini 2021), è stato realizzato un confronto al variare di αL , per 3 valori di L/B . Dai risultati si evince che all'aumentare della lunghezza della trave aumenta il valore di αL nel quale avviene il cambio del primo modo da flessionale a torsionale. Successivamente, è stato condotto un confronto con modelli FEM 3D, *plate* su *brick*, per diversi valori di αL . Per il primo modo flessionale si ottiene una differenza relativa del 20% per $\alpha L=1$, del 6% per $\alpha L=5$ e del 8% per $\alpha L=10$. Per il primo modo torsionale, invece, si registra una differenza relativa del 3% per $\alpha L=1$, del 2% per $\alpha L=5$ e del 15% per $\alpha L=10$. Il primo esempio di lateral buckling che è stato analizzato riguarda una trave su suolo caricata da coppie flettenti all'estremità e vincoli laterali che impongono lo stesso spostamento orizzontale ai bordi della trave. Nel modello si è tenuto conto dell'effetto instabilizzante del momento flettente, del taglio e delle reazioni del suolo applicate sotto l'ala inferiore. Tali reazioni vengono mediate e considerate carico di linea. Inoltre, sono stati presi in considerazione i termini del secondo ordine che nascono dall'aver le reazioni sotto la flangia inferiore e la cinematica della trave descritta con riferimento al baricentro (Barsoum Gallagher 1970). Dai diagrammi ($M_{cr}/M_{cr,E}$ vs αL) ottenuti si nota l'influenza della posizione e del verso della reazione del suolo, che può avere un contributo più o meno instabilizzante. Le reazioni con direzione verso il basso producono un effetto stabilizzante, quelle con direzione verso l'alto producono un effetto instabilizzante, mentre il caso ideale di reazioni nel baricentro non ha alcun ulteriore effetto. Un altro esempio di lateral buckling analizzato è quello relativo al carico distribuito pensato applicato in 3 diverse posizioni: sull'ala superiore, nel baricentro e sull'ala inferiore. Considerando l'effetto instabilizzante relativo alla posizione del carico e delle reazioni, risultano 6 possibili configurazioni. Il moltiplicatore critico più piccolo è relativo al carico distribuito sull'ala superiore diretto verso il

basso e reazioni distribuite sotto l'ala inferiore dirette verso l'alto, mentre, il più grande è relativo al carico distribuito sull'ala superiore diretto verso l'alto e reazioni dirette verso il basso. I confronti con modelli FEM, *plate* su *face support*, soggetti a coppie agli estremi e carico distribuito porta ad errori relativi di circa il 10% per suolo con $\alpha L=1$. Nel quarto capitolo della tesi è presentata l'analisi statica di telai tridimensionali su semispazio elastico, utilizzando l'approccio FE-BIE per modellare le travi di fondazione. Sono presentati diversi confronti con il modello di Winkler, comunemente utilizzato, ed il modello FEM 3D, costituito da elementi *beam* per le travi ed elementi *brick* per il suolo. Il confronto con il modello FEM 3D è stato utilizzato per confermare la convergenza della soluzione, infatti si nota una differenza relativa di circa il 15% in termini di reazioni del suolo e del 5% in termini di sollecitazione flettente. Il confronto con il modello di Winkler, in termini di momento flettente, porta a differenze relative del 107% in campata e del 24% in prossimità dell'innesto con il pilastro centrale per un suolo con caratteristiche elastiche pari a $E_s=25\text{MPa}$ e $\nu_s=0.2$. Inoltre, si nota che le differenze relative $(M_{wi}-M_{FE-BIE})/(M_{FE-BIE})\times 100$ decrescono al crescere della rigidezza del terreno, facendo registrare valori del 20% in campata e del 19% in appoggio per un suolo con $E_s=300\text{MPa}$. In ultimo, viene mostrato il comportamento di un canale composto da diverse sezioni prefabbricate unite da dispositivi di collegamento con rigidezza variabile, con l'intento di mettere in luce l'importanza della modellazione tridimensionale della struttura. L'entità del momento torcente, in fondazione, risulta più piccola sulle travi centrali, cresce andando verso gli elementi di bordo e al diminuire della rigidezza trasversale. Il valore in modulo risulta essere piccolo in relazione alle resistenze in gioco. Con riferimento ai momenti flettenti sulle diverse fondazioni, si nota che a parità di rigidezza della connessione trasversale le travi maggiormente caricate risultano essere quelle esterne, con valori più grandi nel caso di R_{Inf} . Inoltre, è evidente che al diminuire della rigidezza delle connessioni tutte le fondazioni tendono ad avere gli stessi momenti flettenti, andando di fatto ad essere sollecitate in proporzione al carico agente sul telaio. Nell'ultimo capitolo della presente tesi, è stata trattata l'analisi non lineare di telai su semispazio utilizzando, per la modellazione delle cerniere plastiche, la procedura proposta da Shakourzadeh, Guo e Batoz (1999) e per l'interazione suolo-struttura l'approccio FE-BIE. I problemi presentati riguardano strutture intelaiate su più livelli con graticcio di fondazione e strutture monopiano con plinti isolati nelle quali si è tenuto conto degli effetti del secondo ordine relativi ai carichi assiali e della non linearità del contatto, che considera l'eventuale sollevamento della fondazione o del raggiungimento del carico limite. Un esempio parametrico ha riguardato l'influenza della rigidezza del suolo sulla formazione delle cerniere plastiche. All'aumentare della rigidezza del suolo aumenta il tagliante alla base e diminuisce lo spostamento del nodo di controllo relativo alla formazione della prima cerniera plastica, infatti, rispetto alla

condizione di incastri alla base si ha, per $E_s=10\text{MPa}$, una differenza del -17.0% in termini di tagliante e del +31.4% in termini di spostamento del nodo di controllo. Un secondo esempio parametrico ha riguardato l'analisi di pushover con contatto non lineare al variare dello sforzo normale. La struttura in esame è a pilastri isostatici su punch rigidi modellati con approccio GBEM. Dalle analisi emerge che per sforzi normali bassi la criticità è rappresentata dal completo sollevamento del plinto meno caricato, mentre per azioni assiali elevate è rappresentata dal carico limite sotto il plinto del pilastro centrale. Infine, sono state presentate analisi per la stima del momento rotazione dei plinti di fondazione su suolo elastico e sono stati eseguiti confronti con i risultati ottenuti da diversi autori: Borowicka (1943) per suolo elastico su fondazione circolare; Gazetas (1991) per suolo elastico con fondazione rettangolare; El Naggar e Allotey (2003) per suolo alla Winkler.

APPENDICI

Appendice A1: matrice di rigidezza \mathbf{K}_e

Si riporta di seguito la matrice di rigidezza relativa alla trave di Barsoum Gallagher, che presenta 7 gradi di libertà per nodo: spostamento assiale u ; spostamenti trasversali v e w rispettivamente lungo l'asse y e z ; rotazioni flessionali φ_y e φ_z rispettivamente intorno a y e z ; rotazione torsionale θ ; ingobbamento della sezione Ψ .

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_{z1} & w_1 & \varphi_{y1} & \theta_1 & \Psi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_{z2} & w_2 & \varphi_{y2} & \theta_2 & \Psi_2 \\ a & & & & & & & & & & & & & \\ & b & & & & & & & & & & & & \\ & c & d & & & & & & S & y & m & & & \\ & & & f & & & & & & & & & & \\ & & & g & h & & & & & & & & & \\ & & & & & j & & & & & & & & \\ & & & & & k & l & & & & & & & \\ -a & & & & & & & a & & & & & & \\ & -b & -c & & & & & & b & & & & & \\ & c & e & & & & & & -c & d & & & & \\ & & & -f & -g & & & & & & f & & & \\ & & & g & i & & & & & & -g & h & & \\ & & & & & -j & -k & & & & & & j & \\ & & & & & k & m & & & & & & -k & l \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 1}$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= AE / L; \\ b &= 12E_b J_z / L^3; c = -6E_b J_z / L^2; d = 4E_b J_z / L; e = 2E_b J_z / L \\ f &= 12E_b J_y / L^3; g = -6E_b J_y / L^2; h = 4E_b J_y / L; i = 2E_b J_y / L \\ j &= 12G_b J_t / (10L) + 12E_b J_\omega / L^3; \\ k &= -G_b J_t / 10 - 6E_b J_\omega / L^2; \\ l &= 4G_b J_t L / 30 + 4E_b J_\omega / L; \\ m &= -G_b J_t L / 30 + 2E_b J_\omega / L; \end{aligned} \quad \text{Eq. A. 2}$$

La matrice di rigidezza che segue è relativa a flessione alla Eulero-Bernoulli e torsione alla De Saint Venant, che presenta 6 gradi di libertà per nodo: spostamento assiale u ; spostamenti trasversali v e w rispettivamente lungo l'asse y e z ; rotazioni flessionali φ_y e φ_z rispettivamente intorno a y e z ; rotazione torsionale θ .

$$\mathbf{K}_e = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & \varphi_{z1} & w_1 & \varphi_{y1} & \theta_1 & u_2 & v_2 & \varphi_{z2} & w_2 & \varphi_{y2} & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a & & & & & & & & & & & \\ & b & & & & & & & & & & \\ & c & d & & & & & & S & y & m & \\ & & & f & & & & & & & & \\ & & & g & h & & & & & & & \\ & & & & & j & & & & & & \\ -a & & & & & & a & & & & & \\ & -b & -c & & & & & b & & & & \\ & c & e & & & & & -c & d & & & \\ & & & -f & -g & & & & f & & & \\ & & & g & i & & & & -g & h & & \\ & & & & & -j & & & & & & j \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad \text{Eq. A. 3}$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= AE / L; \\ b &= 12E_b J_z / L^3; c = -6E_b J_z / L^2; d = 4E_b J_z / L; e = 2E_b J_z / L \\ f &= 12E_b J_y / L^3; g = -6E_b J_y / L^2; h = 4E_b J_y / L; i = 2E_b J_y / L \\ j &= G_b J_t / L; \end{aligned} \quad \text{Eq. A. 4}$$

Appendice A2: matrice di rigidezza K_g

La matrice geometrica utilizzata relativa alla trave di Barsoum Gallagher è di seguito riportata:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix}
 u_1 & v_1 & \varphi_{z1} & w_1 & \varphi_{y1} & \theta_1 & \Psi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_{z1} & w_2 & \varphi_{y2} & \theta_2 & \Psi_2 \\
 a & & & & & & & & & & & & & \\
 b & c & & & & & & S & y & m & & & & \\
 & Q & a & & & & & & & & & & & \\
 -Q & & b & c & & & & & & & & & & \\
 A & B & A' & B' & e & & & & & & & & & \\
 C & D & C' & D' & f & g & & & & & & & & \\
 -a & -b & & Q & E & F & a & & & & & & & \\
 b & d & -Q & R & G & H & -b & c & & & & & & \\
 & -Q & -a & -b & E' & F' & & Q & a & & & & & \\
 Q & -R' & b & d & G' & H' & -Q & & -b & c & & & & \\
 I & J & I' & J' & h & -i & K & L & K' & L' & e & & & \\
 M & N & M' & N' & i & j & O & P & O' & P' & -f & g & &
 \end{bmatrix}$$

Eq. A. 5

con:

$$\begin{aligned}
 a &= 12F_x / (10L); b = -F_x / 10; c = 4F_x L / 30; d = -F_x L / 30 \\
 e &= 12F_x S_o / (10L) - 13q d_q L / 35 - 13\bar{r} d_r L / 35; \\
 f &= -F_x S_o / 10 + 11q d_q L^2 / 210 + 11\bar{r} d_r L^2 / 210; \\
 g &= 4F_x S_o L / 30 - q d_q L^3 / 105 - \bar{r} d_r L^3 / 105; \\
 h &= -12F_x S_o L / (10L) - 9q d_q L / 70 - \bar{r} d_r L / 70; \\
 i &= -F_x S_o / 10 - 13q d_q L^2 / 420 - 13\bar{r} d_r L^2 / 420; \\
 j &= -F_x S_o L / 30 + q d_q L^3 / 140 + \bar{r} d_r L^3 / 140;
 \end{aligned}$$

Eq. A. 6

$$\begin{aligned}
 A &= 0.6(M_{y_1} - M_{y_2}) / L + 0.05V_{z_1} + 0.55V_{z_2} + 33qL / 140 + 33\bar{r}L / 140; \\
 B &= 0.55(M_{y_1} - M_{y_2}) - 0.10V_{z_1}L - 0.45V_{z_2}L - 169qL^2 / 840 - 169\bar{r}L^2 / 840; \\
 C &= -0.05(M_{y_1} - M_{y_2}) - 0.05V_{z_2}L - 5qL^2 / 280 - 5\bar{r}L^2 / 280; \\
 D &= (M_{y_1} - M_{y_2})L / 15 + V_{z_1}L^2 / 60 + 0.05V_{z_2}L^2 + 9qL^3 / 420 + 9\bar{r}L^3 / 420; \\
 E &= -0.6(M_{y_1} - M_{y_2}) / L - 0.05V_{z_1}L^2 - 0.55V_{z_2}L - 33qL / 140 - 33\bar{r}L / 140; \\
 F &= 0.05(M_{y_1} - M_{y_2}) + 0.05V_{z_2}L + 5qL^2 / 280 + 5\bar{r}L^2 / 280; \\
 G &= -0.05(M_{y_1} - M_{y_2}) + 0.05V_{z_1}L - 0.1V_{z_2}L - 29qL^2 / 840 - 29\bar{r}L^2 / 840; \\
 H &= -(M_{y_1} - M_{y_2})L / 60 - V_{z_1}L^2 / 60 - 3qL^3 / 840 - 3\bar{r}L^3 / 840; \\
 I &= -0.6(M_{y_1} - M_{y_2})L - 0.55V_{z_1} - 0.05V_{z_2} - 33qL / 140 - 33\bar{r}L / 140; \\
 J &= 0.05(M_{y_1} - M_{y_2}) + 0.10V_{z_1}L - 0.05V_{z_2}L + 29qL^2 / 840 + 29\bar{r}L^2 / 840; \\
 K &= 0.6(M_{y_1} - M_{y_2})L + 0.55V_{z_1} + 0.05V_{z_2} + 33qL / 140 + 33\bar{r}L / 140; \\
 L &= 0.55(M_{y_1} - M_{y_2}) + 0.45V_{z_1}L + 0.10V_{z_2}L + 169qL^2 / 840 + 169\bar{r}L^2 / 840; \\
 M &= -0.05(M_{y_1} - M_{y_2}) - 0.05V_{z_2}L - 5qL^2 / 280 - 5\bar{r}L^2 / 280; \\
 N &= -(M_{y_1} - M_{y_2})L / 60 - V_{z_1}L^2 / 60 - 3qL^3 / 840 - 3\bar{r}L^3 / 840; \\
 O &= 0.05(M_{y_1} - M_{y_2}) + 0.05V_{z_1}L + 5qL^2 / 280 + 5\bar{r}L^2 / 280; \\
 P &= (M_{y_1} - M_{y_2})L / 15 + 0.05V_{z_1}L^2 + V_{z_2}L^2 / 60 + 9qL^3 / 420 + 9\bar{r}L^3 / 420;
 \end{aligned}$$

Eq. A. 7

Per ottenere A', B', \dots, P' è sufficiente sostituire il pedice y con z e il pedice z con y .

$$\begin{aligned}
 Q &= T_x / L; \\
 R &= T_x / 2;
 \end{aligned}$$

Eq. A. 8

dove $\bar{r} = \int_{-b/2}^{+b/2} r(x, y) dy$ è considerata costante all'interno del singolo elemento finito; d_q e d_r sono rispettivamente la distanza di q ed r dal centro di taglio.

Appendice A3: matrice \mathbf{H}_r punch rigido

Di seguito è riportata la matrice \mathbf{H}_r relativa ad un punch rigido, in presenza di sole reazioni verticali.

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ru,0}^T \\ \mathbf{h}_{rv,0}^T \\ \mathbf{h}_{r\varphi_z,0}^T \\ \mathbf{h}_{rw,0}^T \\ \mathbf{h}_{r\varphi_y,0}^T \\ \mathbf{h}_{r\vartheta,0}^T \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 9}$$

Dove $\mathbf{h}_{ru,0}=\mathbf{h}_{rv,0}=\mathbf{h}_{r\varphi_z,0}=\mathbf{0}$ sono le componenti della matrice \mathbf{H}_r che operano per reazioni del suolo orizzontali, che non sono considerate. Le componenti relative alle reazioni verticali sono di seguito descritte:

$$h_{rw,0,i} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i dx dy = h_{xi} h_{yi} \quad \text{Eq. A. 10}$$

$$h_{r\varphi_y,0,i} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i x dx dy = \frac{h_{xi} h_{yi} (x_i + x_{i+1})}{2} \quad \text{Eq. A. 11}$$

$$h_{r\vartheta,0,i} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i y dx dy = \frac{h_{xi} h_{yi} (y_i + y_{i+1})}{2} \quad \text{Eq. A. 12}$$

dove h_{xi} e h_{yi} sono le dimensioni degli elementi di suolo considerati, rispettivamente nella direzione x ed y ; $h_{rw,0}$ mette in comunicazione i gradi di libertà spostamento verticale con il suolo; $h_{r\varphi_y,0}$ e $h_{r\vartheta,0}$ mettono in comunicazione i gradi di libertà rotazione con il suolo, in particolare φ_y è la rotazione intorno all'asse y e ϑ è la rotazione intorno all'asse x .

Appendice A4: matrice **H** trave

Di seguito è riportata la matrice **H** relativa ad una trave deformabile con sezione trasversale rigida, in presenza di sole reazioni verticali.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ru}^T \\ \mathbf{h}_{rv}^T \\ \mathbf{h}_{r\varphi_z}^T \\ \mathbf{h}_{rw}^T \\ \mathbf{h}_{r\varphi_y}^T \\ \mathbf{h}_{r\vartheta}^T \\ \mathbf{h}_{r\psi}^T \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 13}$$

Dove $\mathbf{h}_{ru}=\mathbf{h}_{rv}=\mathbf{h}_{r\varphi_z}=\mathbf{h}_{r\psi}=\mathbf{0}$ sono le componenti della matrice **H** che operano per reazioni del suolo orizzontali, che non sono considerate. Le componenti relative alle reazioni verticali sono di seguito descritte:

$$h_{rw,i} = h_{yj} \int_0^{h_{xi}} f_i(x) dx \int_0^1 \rho_j(\xi, \eta) d\eta = \frac{h_{xi} h_{yj}}{2} \quad \text{con } f_1 \text{ e } f_2 \quad \text{Eq. A. 14}$$

$$h_{r\varphi_y,i} = h_{yj} \int_0^{h_{xi}} f_i(x) dx \int_0^1 \rho_j(\xi, \eta) d\eta = \mp \frac{h_{xi}^2 h_{yj}}{12} \quad \text{con } f_3 \text{ e } f_4 \quad \text{Eq. A. 15}$$

dove h_{xi} e h_{yi} sono le dimensioni degli elementi di suolo considerati, nella direzione x ed y rispettivamente; h_{rw} mette in comunicazione i gradi di libertà spostamento verticale con il suolo; $h_{r\varphi_y}$ mette in comunicazione i gradi di libertà rotazione flessionale con il suolo, in particolare φ_y è la rotazione intorno all'asse y (risultati ottenuti da Baraldi e Tullini 2018).

Partendo dall'energia di deformazione torsionale elastica per la trave di lunghezza L è possibile ricavare la componente di **H** relativa alla torsione $h_{r\theta}$.

$$U_{bt} = \frac{1}{2} \int_L G_b J_t (\theta')^2 dx \quad \text{Eq. A. 16}$$

dove l'apice indica la derivata prima rispetto a x ; U_{bt} è l'energia di deformazione torsionale; G_b è il modulo di taglio; $G_b J_t$ è la rigidezza torsionale della sezione. L'energia potenziale della trave vale:

$$\Pi_{b,t} = U_{b,t} - \int_L \left[m_t(x)\theta(x) - \int_{-b/2}^{b/2} r(x,y)w(x,y,0)dy \right] dx \quad \text{Eq. A. 17}$$

Essendo la sezione trasversalmente rigida risulta che θ non dipende da y cioè:

$$w(x,y,0) = \theta(x)y \quad \text{Eq. A. 18}$$

Sostituendo la posizione dell'Eq. A. 18 nell'Eq. A. 17 si ottiene:

$$\Pi_{b,t} = U_{b,t} - \int_L \left[m_t(x)\theta(x) - \theta(x) \int_{-b/2}^{b/2} r(x,y)ydy \right] dx \quad \text{Eq. A. 19}$$

Considerando le seguenti funzioni di forma:

$$\rho_j(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{sull' } i_{th} \text{ elemento} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{Eq. A. 20}$$

Si giunge all'espressione $\mathbf{h}_{r\theta}$ (Eq. A. 21) che mette in relazione i gradi di libertà torsionali con il suolo.

$$h_{r\theta,i} = \int_0^{h_{xi}} f_i(x) dx \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_i \eta d\eta = \frac{h_{xi} h_{yi} (y_i + y_{i+1})}{4} \quad \text{con } f_1 e f_2 \quad \text{Eq. A. 21}$$

Considerando n_y suddivisioni la generica matrice \mathbf{H} presenta le seguenti componenti:

$$\mathbf{H}_i^{ny} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_{xi} \\ -h_{xi}^2/6 \\ h_{xi}(y_i + y_{i+1})/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_{xi} \\ +h_{xi}^2/6 \\ h_{xi}(y_i + y_{i+1})/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{y1} & h_{y2} & h_{y1} & \dots & h_{y_{ny-1}} & h_{y_{ny}} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. A. 22}$$

Appendice A5: matrice **G**

Considerando una suddivisione in elementi rettangolari dell'interfaccia del semispazio, le componenti della matrice **G** sono:

$$g_{ij} = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \left[\left[\left[\left[F(x, y; \xi, \eta) \right]_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \right]_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} \quad \text{Eq. A. 23}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \left[\left[F(x_i, y; \xi_j, \eta) - F(x_i, y; \xi_{j+1}, \eta) - F(x_{i+1}, y; \xi_j, \eta) + F(x_{i+1}, y; \xi_{j+1}, \eta) \right]_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} = \\ &= \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \left\{ F(x_i, y_i; \xi_j, \eta_j) - F(x_i, y_i; \xi_{j+1}, \eta_j) - F(x_{i+1}, y_i; \xi_j, \eta_j) + F(x_{i+1}, y_i; \xi_{j+1}, \eta_j) + \right. \\ &\quad - F(x_i, y_{i+1}; \xi_j, \eta_j) - F(x_i, y_{i+1}; \xi_{j+1}, \eta_j) - F(x_{i+1}, y_{i+1}; \xi_j, \eta_j) + F(x_{i+1}, y_{i+1}; \xi_{j+1}, \eta_j) + \\ &\quad - F(x_i, y_i; \xi_j, \eta_{j+1}) - F(x_i, y_i; \xi_{j+1}, \eta_{j+1}) - F(x_{i+1}, y_i; \xi_j, \eta_{j+1}) + F(x_{i+1}, y_i; \xi_{j+1}, \eta_{j+1}) + \\ &\quad \left. + F(x_i, y_{i+1}; \xi_j, \eta_{j+1}) - F(x_i, y_{i+1}; \xi_{j+1}, \eta_{j+1}) - F(x_{i+1}, y_{i+1}; \xi_j, \eta_{j+1}) + F(x_{i+1}, y_{i+1}; \xi_{j+1}, \eta_{j+1}) \right\} \quad \text{Eq. A. 24} \end{aligned}$$

$$F(x, \xi) = F_0(x, \xi) + F_1(x, \xi) \quad \text{Eq. A. 25}$$

$$F_0(x, y; \xi, \eta) = \frac{[d(x, y; \xi, \eta)]^3}{6} \quad \text{Eq. A. 26}$$

$$F_1(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4} |x - \xi| |y - \eta| \left[|y - \eta| \ln \frac{d + |x - \xi|}{d - |x - \xi|} + |x - \xi| \ln \frac{d + |y - \eta|}{d - |y - \eta|} \right] \quad \text{per } x \neq \xi, y \neq \eta \quad \text{Eq. A. 27}$$

$$F_1(x = \xi, y; \xi, \eta) = F_1(x, y = \eta; \xi, \eta) = 0 \quad \text{Eq. A. 28}$$

$$g_{ii} = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E_s} \left\{ -\frac{2}{3} \left[(l_{xi}^2 + l_{yi}^2)^{3/2} - (l_{xi}^3 + l_{yi}^3) \right] + l_{xi} l_{yi} \left[l_{yi} \ln \frac{(l_{xi}^2 + l_{yi}^2)^{1/2} + l_{xi}}{(l_{xi}^2 + l_{yi}^2)^{1/2} - l_{xi}} + l_{xi} \ln \frac{(l_{xi}^2 + l_{yi}^2)^{1/2} + l_{yi}}{(l_{xi}^2 + l_{yi}^2)^{1/2} - l_{yi}} \right] \right\} \quad \text{Eq. A. 29}$$

BIBLIOGRAFIA

- Ainsworth M., McLean W., Tran T. Diagonal scaling of stiffness matrices in the Galerkin boundary element method. *The ANZIAM Journal*. 2000; 42(1): 141-150.
- Allen HG. *Analysis and design of structural sandwich panels*. Oxford: Pergamon Press; 1969.
- Allotey N., El Naggar M. H.. Analytical moment–rotation curves for rigid foundations based on a Winkler model. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 23.5 (2003): 367-381.
- Argyris J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1982; 32: 85-155.
- Augusti G. Mode approximations for rigid-plastic structures supported by an elastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 1970; 6, 809–827
- Baraldi D., Tullini N. In-plane bending of Timoshenko beams in bilateral frictionless contact with an elastic half-space using a coupled FE-BIE method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 97 (2018): 114-130.
- Baraldi D., Tullini N. Static stiffness of rigid foundation resting on elastic half-space using a Galerkin boundary element method. *Engineering Structures* 225 (2020): 111061.
- Baraldi D., Tullini N. Buckling of beams and coatings of finite width in bilateral frictionless contact with an elastic half-space. *International Journal of Solids and Structures* 228 (2021): 111104.
- Barsoum R. S., Gallagher R. H. Finite element analysis of torsional-flexural stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1970; 2: 35-352.
- Batoz JL, Dhatt G. Incremental displacement algorithms for non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1979; 14(8): 1262- 267
- Bhat, S. Xirouchakis, P. Plastic Analysis of Floating Beams. *Journal of Engineering Mechanics*. 1986; 112 (2): 198–214.

-
- Bielak J., Stephan E. A modified Galerkin procedure for bending of beams on elastic foundations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1983; 4 (2): 340-352.
- Biot MA. Bending of an infinite beam on an elastic foundation. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME* 1937; 4: A1-A7.
- Borodachev N. M. Contact problem for a stamp with a rectangular base. *PMM Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1976; 40 (3): 554-560.
- Borodachev N. M. Contact problem for a stamp with a rectangular base. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 40.3 (1976): 505-512.
- Borowicka H. Über ausmittig belastete, starre Platten auf elastisch-isotropem Untergrund. *Ingenieur-Archiv* 14.1 (1943): 1-8.
- Bosakov S. V. Solving the contact problem for a rectangular die on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*. 2003; 39 (10): 1188-1192.
- Bosakov S. V. Variational approach to the solution of a contact problem for an elastic half-plane. *International Applied Mechanics*. 1994; 30(7): 535-538.
- Boussinesq J. *Application des potentials à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier Villars. Paris; 1885.
- Bowles E. J. *Foundation analysis and design*. McGraw Hill 1997.
- Brebbia C. A., Georgiou P. Combination of boundary and finite elements in elastostatics. *Applied Mathematical Modelling*. 1979; 3 (3): 212-220.
- Brothers, P. W., Sinclair, G. B., Segedin, C. M. Uniform Indentation of the Elastic Half-Space by a Rigid Rectangular Punch. *International Journal of Solids and structures*. 1977; 13: 1059–1072
- Cerruti V. Acc. Lincei, Roma, *Mem. fis. mat.* 1882.
- Chang S. P. , Kim S. B., Kim M.Y. Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches. *Journal of Engineering Mechanics*. 1996; 122: 844-854.
- Cheung Y. K., Nag D. K. Plates and Beams on Elastic Foundations—Linear and Non-Linear Behaviour. *Géotechnique*. 1968; 18 (2): 250 –260.

- Cheung Y. K., Zienkiewicz O. C. Plates and tanks on elastic foundations – an application of finite element method. *International Journal of Solids and Structures*. 1965; 1 (4): 451-461.
- Clark JW and Hill HN. Lateral buckling of beams. *Journal of the Structural Division*, ASCE. 1960; 86: 175-196.
- Clough R., Johnston S. Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements. *Transactions of Japan Earthquake Engineering Symposium*, Tokyo. 1967; 195-198.
- Cortínez V. H., Piovan M. T. Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers & Structures*. 2006; 84: 978-990.
- Criesfield M. A. Non-linear finite element analysis of solid and structures, volume 2: advanced topics. Wiley: Chichester, 1991.
- Dauge M. Elliptic boundary value problems on corner domains. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. 1988.
- Davies JM. Lightweight sandwich construction. Oxford: Blackwell Science; 2001.
- Dell'Acqua, L. C. *Meccanica delle strutture*. McGraw-Hill 1992.
- Dempsey J. P., Li H. A rigid rectangular footing on an elastic layer. Technical note. *Geotechnique*. 1989; 39 (1): 147-152.
- Ermopoulos J. C., Stamatopoulos G. N. Mathematical modelling of column base plate connections. *Journal of constructional steel research* 36.2 (1996): 79-100.
- Erwin V. J., Stephan E. P. Adaptive approximations for 3-D electrostatic plate problems. *Advances in Engineering Software*. 1992; 15: 211-215
- Erwin V. J., Stephan E. P., El-Seoud A. S. An improved boundary element method for the charge density of a thin electrified plate in R^3 . *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1990; 13: 291-303.
- Eurocode 3. EN 1993-1-8 (2005). Design of steel structures - Part 1-8: design of joints.
- Gallagher A P. Buckling of a beam under axial compression with elastic support. *Studies in Numerical Analysis*, Scaife, B. K. P., Academic Press, London and New York, 1974.

-
- Gazetas, G. (1991). Foundation vibrations. *Foundation engineering handbook* (2nd ed.). New York: Van Nostrand Reinhold.
- Gelagoti, F., Kourkoulis, R., Anastasopoulos, I., & Gazetas, G. (2011). Rocking isolation of low-rise frame structures founded on isolated footings. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(7), 1177-1197.
- Giberson, M. F. Two Nonlinear beams with definition of ductility. *Journal of the Structural Division*. 1969; 95, ST7.
- Gonzalez J. A., Park K. C., Felippa C. A. FEM and BEM coupling in elastostatics using localized Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007; 69 (10): 2058-2074.
- Gorbunov-Posadov M. I., Serebrjanyi R. V. Design of structures on elastic foundations. *Proceedings 5th International Conference in Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1961; 1: 643-648.
- Gorbunov-Posadov, M. I. Design of structure upon elastic foundations. *Proc. VICSMFE, Paris 1* (1961): 643-648.
- Gorbunow-Posadow, M. I. (1956). *Structures calculation on elastic subgrade (in Polish)*. Warsaw: Budownictwo i Architektura.
- Graham I. G., McLean W. Anisotropic mesh refinement: the conditioning of Galerkin boundary element matrices and simple preconditioners. *Journal on Numerical Analysis*. 2006; 44(4): 1487-1513.
- Hasan R., Xu L., Grierson D. E., Push-over analysis for performance based seismic design. *Computers & Structures*. 2002; 80, 2483-2493.
- Hetenyi M. *Beam on elastic foundation*. Ann Arbor: The University of Michigan Press; 1946.
- Ibrahimbegović A. On FE implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1993; 122: 11-26.
- Johnson KL. *Contact Mechanics*, Cambridge: Cambridge University Press; 1985.

- Kerr A D. Analysis of concrete pavement blowups. *Acta Mechanica*. 1984; 52: 201-224.
- Kerr A D. Analysis of thermal track buckling in the lateral plane. *Acta Mechanica* 1978; 30: 17-50.
- Kerr A D. Response of floating ice beams and plates with partial flooding. *Proceedings 1st International Conference on Ice Technology*, Cambridge. 1986. 75-86.
- Kerr A D. The stress and the stability analyses of railroad tracks. *Journal of Applied mechanics* 1974; 41(4): 841-848.
- Kikuchi N. Beam bending problems on a Pasternak foundation using reciprocal variational-inequalities. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1980; 38 (1): 91-108.
- Kosmatka, J. B. An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams. *Computer & Structures*. 1995; 57 (1): 141-149.
- Krystosik P. Influence of supporting joints flexibility on statics and stability of steel frames. *International Journal of Steel Structures* 18.2 (2018): 433-442.
- Lai S., Will G., Otani S. Model for inelastic biaxial bending of concrete members. *Journal of Structural Engineering*. 1984; 110, ST11: 2563-2584.
- Laudiero F and Zaccaria D. A consistent approach to linear stability of thinwalled beams of open section. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1988; 30: 503-515.
- Love A. E. H. The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1929 228 659-669 377-420.
- Meyerhof G. G. Load carrying capacity of concrete pavements. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1962; 88 (SM3): 89-115.
- Mendonca A. V., Paiva J. B. An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2003; 27 (9): 919-933.
- Minghini F., Tullini N., Laudiero F. Buckling analysis of FRP pultruded frames using locking-free finite elements. *Thin-walled Structures*. 2008; 43: 223- 241.

-
- Minghini, F., Tullini, N., Laudiero, F. Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams. *International Journal for the Numerical Methods in Engineering*. 2007; 72 (7): 808–834.
- Monfortoon G. R., Wu T. S., Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames. *Journal of the Structural Division*. 1963; 89 (6) 13-42
- Mullan S. J., Sinclair G. B., Brothers P. W. Stresses for an elastic half-space uniformly indented by a rigid rectangular footing. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1980; 4 (3): 277-284.
- Murthy G K N. Buckling of beams supported by Pasternak Foundation. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 1973a; 99 (3): 565-579.
- Murthy G K N. Buckling of continuously supported beams. *Journal of Applied Mechanics* 1973b; 50 (2): 546-551.
- Murthy G K N. *Buckling of continuously supported beams*. Ph.D. thesis, School of Engineering and Science, New York University, New York; July 1970.
- Otani S. Inelastic analysis of R/C frame structures. *Journal of the Structural Division*. 1974; 100, ST7.
- Pasternak P. L. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. (in Russian), Gosudarstvennogo Izatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Architekture, Moscow, U.S.S.R., 1954.
- Piovan M. T., Cortínez V. H. Mechanics of shear deformable thin-walled beams made of composite materials. *Thin-Walled Structures*. 2007; 45: 37-62.
- Prager W (1927). Zur Theorie elastische gelagerter Konstruktionen. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1927; 7(5): 354- 360.
- Rajapakse R. K. N. D., Selvadurai A. P. S. On the performance of Mindlin plate elements in modelling plate-elastic medium interaction: A comparative study. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986; 23 (7): 1229-1244.

- Rao, K. Singh, S. Concentrated Load-Carrying Capacity of Concrete Slabs on Ground. *Journal of Structural Engineering*. 1986; 112 (12): 2628–2645.
- Reissner M. E. On non-uniform torsion of cylindrical rods. *Journal of Mathematics and Physics*. 1952; 31: 214-221.
- Reissner M. E. On the theory of beams resting on a yielding foundation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 1937; 23(6): 328-333.
- Rvachev V. L. The pressure on an elastic half-space of a stamp with a wedgedshaped planform. *PMM Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1959; 23 (1): 169-171.
- Shakourzadeh H., Guo Y. Q., Batoz J. L. Modelling of connections in the analyses of thin-walled space frames. *Computers & Structures*. 1999; 71, 423-433.
- Smith T. E. Buckling of a beam on a Wieghardt-type elastic foundation. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1969; 49(11): 641-645.
- Stamatopoulos G. N., Ermopoulos J. C. Experimental and analytical investigation of steel column bases. *Journal of constructional steel research* 67.9 (2011): 1341-1357.
- Takeda T., Sozen M. A., Nielsen N. Reinforced concrete response to simulated earthquakes. *Journal of Structural Engineering*. 1970; 96, ST12: 2557- 2573.
- Tezzon E., Tullini N., Minghini F. Static analysis of shear flexible beams and frames in adhesive contact with an isotropic elastic half-plane using a coupled FE–BIE model. *Engineering Structures*, 104, (2015) 32-50.
- Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Geotechnique* 5.4 (1955): 297-326.
- Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill; 1961.
- Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*. New York: McGraw-Hill; 1951.
- Timoshenko, Stephen P. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41.245 (1921): 744-746.

-
- Tullini N., Tralli A. Static analysis of Timoshenko beam resting on elastic halfplane based on coupling of locking-free elements and boundary integral. *Computational Mechanics*. 2010; 45(2-3): 211-225.
- Tullini N., Tralli A., Baraldi D. Stability of slender beams and frames resting on 2D half-space. *Archive of Applied Mechanics*. 2013; 83 (3): 467-482.
- Tullini N., Tralli A., Lanzoni L. Interfacial shear stress analysis of bar and thin film bonded to 2D elastic substrate using a coupled FE-BIE method. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012a; 55: 42-51.
- Tullini, N., Tralli, A., Baraldi, D. Buckling of Timoshenko Beams in Frictionless Contact with an Elastic Half-Plane. *Journal of Engineering Mechanics*. 2012b; doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000529.
- Vesic A. B. Bending of beams resting on isotropic elastic solid. *Journal of Engineering Mechanics Division*. 1961; 87(EM2): 35-53.
- Vlasov Z. Z. Thin-Walled Elastic Beams. *Israel Program for Scientific Translations*. Jerusalem, 1961.
- Vlasov V. Z., Leonitiev U. N. Beams, plates and shells on elastic foundations. Israel program for scientific translations. Jerusalem, 1966.
- Wang C. M., Wang C. Y., Reddy J.N. Exact Solutions for Buckling of Structural Members. CRC Press; 2005.
- Wang C.Y. Buckling of a weakened infinite beam on an Elastic Foundation. *Journal of Engineering Mechanics*. 2010; 136 (4): 534-537.
- Wiegardt K. Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1922; 2(3): 165-184.
- Winkler, E. *Die Lehre Von Elasticitaet Und Festigkeit*. 1st Ed., H. Dominicus, Prague; 1867.
- Xu L. Geometric stiffness and sensitivity matrices for optimization of semirigid steel frameworks. *Structural Optimization*. 1992; 5 (1-2): 95-99.