



Università degli Studi di Ferrara

DOTTORATO DI RICERCA IN SCIENZE DELL'INGEGNERIA

Ciclo XXX

Coordinatore: Prof. S. Trillo

Verifica Sperimentale di Metodologie di Test Tailoring con Eccitazione Stocastica Monoassiale e Multiassiale

Settore Scientifico Disciplinare ING/IND 13

Dottorando

Dott. Andrea Tosini

Tutore

Chiar.mo Prof. Giorgio Dalpiaz

Correlatore

Prof. Emiliano Mucchi

Anni 2014/2017

PREFAZIONE

Questa tesi riassume il lavoro svolto durante il periodo di Dottorato di Ricerca, in cui mi sono occupato principalmente della tematica dei test dinamici accelerati: una metodologia sperimentale per verificare la durata attesa di componenti meccanici che devono operare in condizioni di forte vibrazione. Molte strutture e componenti meccanici sono esposti a forti sollecitazioni dinamiche durante l'utilizzo che possono portare a guasti causati principalmente dall'accumulo di fatica. Rientrano in questa categoria, ad esempio, i telai delle autovetture, sollecitati dalle asperità del fondo stradale, e le strutture off-shore, soggette all'azione delle onde oceaniche.

Nella pratica industriale è necessario prevedere un ragionevole time-to-failure già durante la fase di progettazione mediante, generalmente, criteri di fatica multiassiale e testare poi su prototipi la reale durata. I test dinamici sono spesso *test accelerati*, che significa che, per ragioni pratiche, la durata del test deve essere più breve rispetto alla vita reale del componente. Ciò si ottiene amplificando opportunamente le eccitazioni rispetto a quelle misurate in condizioni di lavoro normali per procurare all'oggetto in test lo stesso danneggiamento che subirebbe durante l'intero ciclo di vita.

La storia dei test dinamici accelerati ha inizio alla fine del secondo conflitto mondiale con i primi test con eccitazioni sinusoidali, ma è solo a partire dagli anni '60 che ha iniziato a svilupparsi, con l'introduzione di macchine in grado di generare vibrazioni random e lo sviluppo di tecniche per la generazione del segnale di eccitazione amplificato.

Ho trascorso il periodo iniziale della mia attività di ricerca studiando le tecniche più importanti sviluppate, concentrando l'attenzione in particolar modo sui punti deboli di ognuna. I metodi che hanno suscitato maggiore interesse sono stati quelli riguardanti le vibrazioni stocastiche, le più utilizzate nella pratica dei test dinamici a causa della maggiore somiglianza alle condizioni di eccitazione riscontrabili nelle strutture meccaniche.

La fase successiva è stata la realizzazione in laboratorio di un sistema di prova utilizzando lo shaker triassiale DongLing dell'Università degli Studi di Ferrara. I test hanno permesso di verificare le tecniche studiate su provini di

acciaio intagliati. Molta attenzione è stata dedicata alla progettazione del dispositivo di afferraggio e della forma dei provini poiché, per ottenere risultati attendibili, lo stato tensionale nella zona di innesco della cricca deve essere accuratamente studiato. Prima della loro realizzazione, la risposta dinamica dei provini è stata esaminata in ogni scenario di eccitazione per mezzo di un'accurata modellazione agli elementi finiti. Le simulazioni hanno permesso di prevedere la risposta tensionale nel punto più sollecitato del fondo intaglio e il tempo medio di rottura per ogni tipologia di test ricorrendo al criterio di danneggiamento di Rayleigh.

La campagna di test ha permesso un'analisi critica dell'affidabilità della cosiddetta *inverse power law*, la legge di scalatura temporale comunemente utilizzata nei test accelerati. La legge è stata impiegata sia in test con eccitazione monoassiale che in test biassiali, sfruttando le potenzialità della tavola vibrante. L'analisi dei risultati sperimentali ha messo in evidenza come l'imprecisione della legge di scalatura sia da imputare alla variazione della risposta dinamica del componente durante il test a causa del propagarsi di cricche nel materiale; variazione che comporta anche una modifica dello stato tensionale responsabile del danneggiamento e che non viene tenuta in considerazione dall'*inverse power law*.

Inoltre l'applicazione a shaker multiassiali delle usuali tecniche di sintesi rappresenta una novità nel panorama scientifico internazionale: gli shaker elettrodinamici multiassiali sono una rarità nei laboratori per via del loro elevato costo, e i lavori di letteratura che ne sfruttano le capacità sono molto pochi. Il lavoro è di interesse anche per l'ambito industriale in cui le attuali normative sui test vibrazionali sono pensate principalmente per test monoassiali, mentre l'effetto della contemporanea presenza di eccitazioni in più direzioni viene messo in conto eseguendo in successione un test accelerato per ognuna delle tre direzioni ortogonali. Studi reperibili nella letteratura scientifica hanno dimostrato come questa pratica non sia efficace nel replicare il reale danneggiamento causato dalle condizioni di esercizio, in cui l'eccitazione è generalmente multiassiale e simultanea. In particolare si è potuto mettere in evidenza come in test multiassiali la coerenza fra le eccitazioni rivesta un ruolo di primaria importanza nella definizione del coefficiente di accelerazione che compare nell'*inverse power law*. L'osservazione riveste particolare importanza soprattutto quando si adotta bassa coerenza fra le eccitazioni, poiché l'accelerazione risultante tende a deviare in modo considerevole dalla linea

retta, influenzando la modalità di propagazione del danno.

Le osservazioni contenute in questo lavoro di tesi sono presentate in:

A. Tosini, E. Mucchi, G. Dalpiaz (2018). Verifica Sperimentale di Metodologie di Test Tailoring con Eccitazione Stocastica Monoassiale e Multiassiale. *Dodicesima giornata di studio Ettore Funaioli - 20 luglio 2018*.

Durante il periodo di Dottorato mi sono occupato anche di altre attività riguardanti l'ambito della Meccanica Applicata alle Macchine e della Meccanica delle Vibrazioni. Ad esempio, un'attività di ricerca sulla modellazione e analisi multibody di motori monocilindrici a combustione interna è stata finalizzata a individuare le zone più sollecitate del telaio in funzione dei diversi regimi di funzionamento per migliorarne il comportamento a fatica. Il telaio è stato modellato come un corpo flessibile su cui agiscono le forzanti provenienti dal manovellismo di spinta, a sua volta modellato come un cinematismo a corpi rigidi e accoppiato al modello FEM del telaio con il metodo di Craig-Bampton. Le caratteristiche modali del telaio sono state oggetto di validazione mediante analisi modale sperimentale. Inoltre, la misura sperimentale della velocità della manovella e della pressione istantanea in camera di combustione ha permesso di stimare le perdite di potenza per attrito presenti nel motore con il modello di Rezek-Henein. Parte di questa attività, in termini di metodologia e risultati, è stata presentata in:

A. Tosini, E. Mucchi, G. Dalpiaz (2015). Analisi dinamica numerico - sperimentale di una motosega. *Ottava giornata di studio Ettore Funaioli - 18 luglio 2014*. A cura di: Meneghetti, Umberto; Maggiore, Alberto; Parenti Castelli, Vincenzo. Bologna: Società Editrice Esculapio. In: Quaderni del DIEM - GMA - Atti di giornate di studio (8), pp. 167-177.

Un'altra attività ha riguardato l'ottimizzazione vibroacustica di trasmissioni a ingranaggi, basandosi sullo sviluppo di modelli vibrazionali in cui è stata messa in conto l'eccitazione parametrica dovuta alle rigidità di ingranamento variabili. Tali rigidità sono state valutate mediante FEM per gli ingranaggi conici e mediante modelli analitici per le ruote cilindriche. Nell'applicazione

alla trasmissione di un mandrino di una macchina utensile, l'impiego del modello ha consentito di individuare soluzioni migliorative in termini di riduzione della rumorosità, agendo su modulo, larghezza di fascia e angolo d'elica delle ruote dentate, mantenendo inalterato il rapporto di trasmissione. Ulteriori attività hanno riguardato lo sviluppo e l'applicazione di metodologie per l'analisi vibrazionale, numerica e sperimentale, di sistemi meccanici complessi – quali attrezzature da giardinaggio e componenti di macchinari industriali – finalizzate all'ottimizzazione vibroacustica e alla stima della resistenza a fatica.

il candidato

Dott. Andrea Tosini

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Cenni storici	1
1.2	Standard militari	3
1.3	Stato dell'arte	6
1.4	Obiettivi e contenuto della tesi	17
2	INQUADRAMENTO TEORICO	19
2.1	Caratterizzazione della resistenza a fatica dei materiali	19
2.2	Accumulo del danno	21
2.3	Conteggio rainflow	23
2.4	Metodi spettrali per la stima del danneggiamento	25
2.4.1	Proprietà spettrali dei processi stocastici stazionari	26
2.5	Formulazione statistica dell'accumulo del danneggiamento	32
2.5.1	Formulazione narrowband	33
2.5.2	Correzione di Wirsching e Light	34
2.5.3	Metodo di Dirlik	36
2.6	Extreme Response Spectrum (ERS)	37
2.6.1	Eccitazione e risposta sinusoidali	38
2.6.2	Swept sine	42
2.6.3	Eccitazione e risposta random	43
2.7	Fatigue Damage Spectrum (FDS)	46
2.7.1	Eccitazione e risposta sinusoidali	46
2.7.2	Swept sine	47
2.7.3	Eccitazione e risposta random	48
2.8	Inverse power law	50
2.9	Sintetizzazione della PSD di eccitazione	51
3	SISTEMA SPERIMENTALE	55
3.1	Caratteristiche dello shaker triassiale	55
3.1.1	Controllo MIMO dello shaker triassiale	57
3.2	Progetto dell'afferraggio	60

3.3	Progetto del provino	60
3.3.1	Modellazione agli elementi finiti	65
4	CAMPAGNA SPERIMENTALE	75
4.1	Test monoassiali	76
4.2	Test biassiali	87
5	ANALISI CRITICA DELL'INVERSE POWER LAW	95
5.1	Analisi dei test monoassiali	97
5.1.1	Influenza della non stazionarietà	98
5.1.2	Individuazione di outlier statistici	101
5.1.3	Stima della tensione sull'intaglio	104
5.1.4	Analisi dell'esponente b	108
5.2	Analisi dei test biassiali	110
5.2.1	Test in alta coerenza	110
5.2.2	Test in bassa coerenza	116
6	CONSIDERAZIONI FINALI	123
	BIBLIOGRAFIA	127

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1	Profili PSD da MIL-STD 810	4
Figura 2	Provini utilizzati da Pothula et al.	11
Figura 3	Sistema di test di Jiang et al.	11
Figura 4	Sistema di test di Troncossi et al.	12
Figura 5	Geometria di provino di Palmieri et al.	13
Figura 6	Shaker triassiale dell'U.S. Army Research Laboratory .	15
Figura 7	Sistema di test dei laboratori Sandia	16
Figura 8	Curva S-N tipica per acciai	20
Figura 9	Schema di storia di carico	24
Figura 10	Conteggio rainflow e cicli di isteresi	25
Figura 11	Segnali a banda stretta e a banda larga	28
Figura 12	Numero medio di attraversamenti dello zero per secondo con pendenza positiva	30
Figura 13	Distribuzione di probabilità dei massimi locali di un segnale	31
Figura 14	Processo narrowband	35
Figura 15	Shock Response Spectrum	39
Figura 16	Spostamento relativo per un sistema SDOF	41
Figura 17	ERS per eccitazione sinusoidale	41
Figura 18	ERS per eccitazione swept sine	42
Figura 19	ERS per eccitazione narrowband	45
Figura 20	FDS per eccitazione sinusoidale	47
Figura 21	FDS per eccitazione swept sine	48
Figura 22	Calcolo dell'FDS per eccitazione random	49
Figura 23	Inviluppo di un profilo PSD	53
Figura 24	Schema di sintesi di un test accelerato	53
Figura 25	Shaker DongLing 3ES-10-HF	56
Figura 26	Controllo in ciclo chiuso	58
Figura 27	Geometria dell'afferraggio	61
Figura 28	Coefficiente di sensibilità all'intaglio	63
Figura 29	Curva S-N acciaio S355-J2	65

x Elenco delle figure

Figura 30	Colormap del criterio di progetto	66
Figura 31	CAD del provino progettato	67
Figura 32	Mesh del sistema di prova	68
Figura 33	Tensione media causata dalla forza peso	69
Figura 34	Deformate modali FEM e sperimentali	70
Figura 35	MAC fra modello FE e EMA	71
Figura 36	Schema di analisi FEM random	71
Figura 37	Eccitazioni e risposte dinamiche simulate	72
Figura 38	ERS/FDS per i test monoassiali	73
Figura 39	Sistema di prova assemblato	77
Figura 40	Matrice di controllo per test monoassiale	78
Figura 41	Rapporto fra le PSD di eccitazione nei test monoassiali	81
Figura 42	Scatter plot delle accelerazioni in un test monoassiale .	82
Figura 43	STFT dell'accelerazione misurata sulla massa a sbalzo .	83
Figura 44	Variazione della frequenza naturale nei test monoassiali	84
Figura 45	Errore commesso dall'approssimazione di Whiteman .	85
Figura 46	Evoluzione della FRF fra accelerazioni nel tempo	85
Figura 47	Variazione dei parametri modali nei test monoassiali .	86
Figura 48	Matrice di controllo per test biassiale con alta coerenza	90
Figura 49	Scatter plot delle accelerazioni nei test biassiali	91
Figura 50	Variazione della frequenza naturale nei test biassiali in alta coerenza	92
Figura 51	Variazione della frequenza naturale nei test biassiali in bassa coerenza	93
Figura 52	Variazione dei parametri modali nei test biassiali	94
Figura 53	Pendenza della curva S-N per sollecitazioni sinusoidali e random	96
Figura 54	Variabilità dell'accelerazione imposta nei test monoassiali	98
Figura 55	Retta di regressione test monoassiali con riduzione del- la f_n del 20%	99
Figura 56	Retta di regressione test monoassiali con riduzione del- la f_n del 3%	100
Figura 57	Schema della rappresentazione boxplot	101
Figura 58	Outlier nei test monoassiali	103
Figura 59	Schematizzazione del sistema di prova come trave a sbalzo	104

Figura 60	Curve S-N stimate dai test monoassiali	107
Figura 61	Confronto dell'esponente b per test a coppie	109
Figura 62	Rette di regressione per i test biassiali in alta coerenza .	113
Figura 63	Outlier nei test biassiali in alta coerenza	114
Figura 64	Confronto dell'esponente b per test biassiali in alta coerenza a coppie	115
Figura 65	Rette di regressione per i test biassiali in bassa coerenza	117
Figura 66	Outlier nei test biassiali in bassa coerenza	119
Figura 67	Confronto dell'esponente b per test biassiali in bassa coerenza a coppie	120

ELENCO DELLE TABELLE

Tabella 1	Caratteristiche dello shaker triassiale	56
Tabella 2	Caratteristiche resistenziali dell'acciaio S355-J2	62
Tabella 3	Parametri modali FEM e sperimentali	69
Tabella 4	Eccitazioni e durate stimate per i test monoassiali	73
Tabella 5	Elenco dei test monoassiali	78
Tabella 6	Elenco dei test biassiali in alta coerenza	88
Tabella 7	Elenco dei test biassiali in bassa coerenza	89
Tabella 8	Statistiche descrittive della dispersione dei test monoassiali	100
Tabella 9	Confronto b per coppie di test con riduzione della f_n del 20%	108
Tabella 10	Confronto b per coppie di test con riduzione della f_n del 3%	110
Tabella 11	Statistiche descrittive della dispersione dei test biassiali in alta coerenza	112
Tabella 12	Confronto b per coppie di test biassiali in alta coerenza con riduzione della f_n del 20%	113
Tabella 13	Confronto b per coppie di test biassiali in alta coerenza con riduzione della f_n del 3%	116
Tabella 14	Statistiche descrittive della dispersione dei test biassiali in bassa coerenza	117
Tabella 15	Confronto b per coppie di test biassiali in bassa coerenza con riduzione della f_n del 20%	118
Tabella 16	Confronto b per coppie di test biassiali in bassa coerenza con riduzione della f_n del 3%	121

ACRONIMI

ERS	Extreme Response Spectrum
ENV	Inviluppo
FDS	Fatigue Damage Spectrum
IQR	Interquartile Range
MAC	Modal Assurance Criterion
MIMO	Multi-Input Multi-Output
PSD	Power Spectral Density
SDOF	Single Degree of Freedom (system)
SRS	Shock Response Spectrum
STFT	Short-Time Fourier Transform

NOMENCLATURA

C	Costante della legge di Basquin
\bar{C}	Costante di proporzionalità fra tensione e spostamento relativo
$E\{\cdot\}$	Valore atteso di una variabile aleatoria
f	Frequenza
$G_{xx}(f)$	Power Spectral Density single-side di un segnale $x(t)$
$G_{xy}(f)$	Cross Power Spectral Density fra due segnali $x(t)$ e $y(t)$
K_t	Coefficiente di concentrazione delle tensioni
k	Pendenza della curva S-N
n_0^+	Numero medio di attraversamenti dello zero con pendenza positiva al secondo di un segnale $x(t)$
n_p^+	Numero medio di massimi locali al secondo di un segnale $x(t)$
$p_p(u)$	Densità di probabilità dei massimi locali di un segnale $x(t)$
$p_a(\sigma)$	Densità di probabilità delle ampiezze dei cicli di sollecitazione calcolate con un metodo di conteggio
$R_{xx}(\tau)$	Funzione di autocorrelazione di un segnale $x(t)$
$S_{xx}(f)$	Power Spectral Density double-side di un segnale $x(t)$
T	Durata di test
α_n	Parametro di banda n-esimo di una PSD
$\Gamma(\cdot)$	Funzione gamma di Eulero $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$
$\gamma_{xy}^2(f)$	Coerenza fra i segnali $x(t)$ e $y(t)$
γ	Esponente della legge di Whiteman

ϵ	Deformazione
ζ	Fattore di smorzamento modale
λ_i	Momento i-esimo di una PSD
σ	Tensione
τ	Ritardo temporale
$\Phi(\cdot)$	Funzione di ripartizione della variabile aleatoria normale $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

INTRODUZIONE

1.1 CENNI STORICI

I prodotti di ogni giorno, dai dispositivi meccanici e elettronici di uso comune alle strumentazioni più avanzate del campo aerospaziale e automotive, sono soggetti a condizioni variabili dell'ambiente circostante. Bruschi cambi di temperatura, umidità e vibrazioni possono influire negativamente sulla durata del prodotto, pertanto il loro effetto deve necessariamente essere tenuto in considerazione già durante le prime fasi di sviluppo. La capacità di resistere a condizioni avverse deve essere verificata ricorrendo a simulazioni numeriche o test di laboratorio su prototipi.

La sperimentazione in laboratorio, nell'ambito delle applicazioni meccaniche e elettroniche, è basata in larga parte su linee guida dettate da standard internazionali. I primi standard, databili alla fine del secondo conflitto mondiale, sono nati nel contesto militare, in cui la robustezza degli armamenti era un aspetto di primaria importanza. In particolare, per quanto riguarda l'ambito della meccanica delle vibrazioni, si trattava di linee guida generali, spesso decisamente severe, consistenti in test con eccitazione sinusoidale impostata su una frequenza di risonanza dell'equipaggiamento oggetto di test. Il loro scopo era solo di dimostrare la robustezza dell'oggetto, basandosi sull'ipotesi implicita che se questo fosse resistito al test, non avrebbe poi subito deterioramenti in esercizio a causa delle vibrazioni. I test con eccitazione armonica erano i soli possibili con la rudimentale strumentazione degli inizi ma, seguendo la naturale evoluzione delle macchine di test, anche le linee guida degli standard sono cambiate nel tempo, passando a eccitazioni con swept sine fino al random.

Alla fine degli anni '70 ha iniziato a diffondersi il consenso generale che

le specifiche dei test vibrazionali avrebbero dovuto replicare meglio le reali condizioni d'uso. I primi standard ad accogliere questa idea furono gli standard militari NATO, l'americano MIL-STD 810 e il francese GAM-EG 13. La filosofia, chiamata *test tailoring*, si basa sulla misurazione preventiva delle condizioni ambientali che il prodotto può sperimentare durante la sua vita. A posteriori, in laboratorio, occorre sintetizzare una vibrazione, sia essa un tono puro, uno swept sine o una vibrazione random, in grado di riprodurre lo stesso danneggiamento che possono arrecare le condizioni ambientali. In questo senso il test che ne deriva è "tailored" ovvero creato su misura per le specifiche condizioni operative.

Ad oggi, la pratica del test tailoring è ampiamente adottata e considerata una tecnica obbligatoria per quei componenti che devono operare in ambienti con elevate sollecitazioni.

Ottenere un test di vibrazione affidabile presuppone una generale comprensione delle sollecitazioni che agiscono sul sistema meccanico e dei possibili guasti. Una stima è fattibile utilizzando tecniche avanzate di analisi agli elementi finiti e criteri di danneggiamento basati sulla fatica stocastica. Calcoli di questo tipo possono essere eseguiti solo in uno stadio avanzato di progettazione, quando molti dettagli del prodotto sono stati sufficientemente definiti. Tuttavia, non è inusuale essere obbligati a eseguire stime di durabilità già nelle primissime fasi di un nuovo progetto, quando geometria e materiali sono ancora suscettibili di importanti modifiche. Per superare l'inconveniente i calcoli alla base del test tailoring si basano su un modello fortemente semplificato dell'oggetto da testare: un modello a un solo grado di libertà (da qui in poi indicato anche come modello *SDOF* per brevità). È un approccio che, nonostante l'enorme semplificazione della meccanica coinvolta, permette il confronto di diversi profili vibratorii in termini di potenziale danneggiante e l'abbozzo di specifiche con l'ipotesi implicita che il livello di danneggiamento causato al sistema *SDOF* sarà lo stesso del componente reale.

I primi metodi di creazione di specifiche per test vibrazionali si basavano sull'involuppo della Power Spectral Density della vibrazione misurata nel reale ambiente di utilizzo. Questo metodo di tailoring, pur essendo di semplice realizzazione, è stato riconosciuto essere eccessivamente severo e portare a progettare strutture sovradimensionate, con tutti gli inconvenienti che ciò comporta in termini di costi di produzione. Inoltre il peso ha un ruolo fondamentale nelle costruzioni aeronautiche e l'industria aerospaziale è da sempre

uno dei principali utilizzatori del test tailoring: per questo una grossa spinta verso il miglioramento delle tecniche di tailoring è venuta proprio da questo ambito. Attualmente le tecniche più utilizzate fanno uso di altri due strumenti da affiancare all'involuppo della PSD: due spettri che quantificano il potenziale danneggiante di una vibrazione su un sistema a singolo grado di libertà, l'*Extreme Response Spectrum* (da alcuni autori indicato anche come *Maximum Response Spectrum*) e il *Fatigue Damage Spectrum*. Entrambi sono necessari a creare un test sperimentale in grado di riprodurre lo stesso danno per fatica della vibrazione dell'ambiente reale.

Una descrizione dettagliata di questi metodi sarà fornita nel prosieguo della tesi.

1.2 STANDARD MILITARI

Uno *standard* è un documento che fornisce le specifiche tecniche relative a una tipologia di prodotto. Gli standard per test ambientali forniscono, per una categoria di prodotti, le indicazioni sui test da eseguire, la durata e le procedure dettagliate da seguire.

Le *specifiche* forniscono le linee guida che indicano come ogni specifico compito debba essere eseguito. Sono stabilite all'inizio di un nuovo progetto e vengono usate nei test sui primi prototipi per verificare che il prodotto soddisfi le caratteristiche resistenziali richieste dall'ambiente operativo. Il testo di una specifica contiene la descrizione dettagliata delle caratteristiche ambientali a cui il prodotto deve resistere (vibrazioni, urti, ecc...) e della loro severità.

Gli standard militari comprendono differenti tipi di test. Lo scopo di ogni tipologia è diverso e varia secondo lo stadio di sviluppo del prodotto: per esempio ci sono test pensati per accertare le caratteristiche meccaniche del prodotto, la caratterizzazione del comportamento dinamico o la verifica di resistenza a particolari sollecitazioni richieste da progetto. Un tipico test di qualifica a vibrazioni si compone di differenti fasi [1]:

1. Ricerca delle risonanze iniziali: test con eccitazione swept sine per verificare le frequenze di risonanza del componente ancora integro
2. Test di durata: il componente viene mantenuto per un certo lasso di tempo sotto uno specifico tipo di eccitazione che può essere ancora

uno swept sine oppure una vibrazione random o un sine-on-random. La durata di questa fase è dettata dalla specifica.

3. Ricerca delle risonanze finali: di nuovo un test con swept sine per verificare se sono emerse modifiche alle frequenze naturali misurate nel primo step. Eventuali variazioni osservate possono indicare l'insorgenza di cricche di fatica e in questo caso il componente deve essere dichiarato come non conforme alla specifica.

La maggioranza dei test vibrazionali vengono realizzati usando shaker elettrodinamici monoassiali. Per verificare la resistenza del componente in tutte e tre le direzioni cartesiane è prassi ripetere la fase di durata del test per ogni direzione considerata in modo sequenziale, smontando e riposizionando ogni volta il componente sulla tavola. Le specifiche forniscono l'ordine degli assi da seguire e, spesso, differenti profili di eccitazione da adottare per ognuno (fig.1). La filosofia dietro lo sviluppo delle specifiche è quella di arrecare al componente oggetto di test gli stessi danni che si osserverebbero nell'utilizzo reale, amplificando opportunamente gli stress meccanici per ridurre il tempo di test ma senza incorrere in sollecitazioni eccessivamente severe che porterebbero a sovradimensionare i dettagli strutturali.

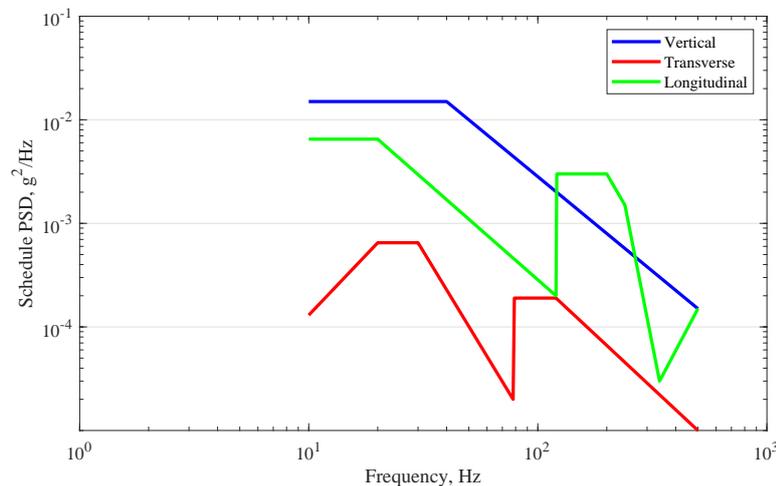


Figura 1: Esempio di profili di PSD forniti dalla normativa MIL-STD 810G per il trasporto di merce su camion [2]. I profili sono riferiti alle condizioni stradali medie delle autostrade americane

Ad oggi esistono diversi standard che trattano i test di vibrazioni e shock. Fra questi, i più conosciuti a livello internazionale sono:

- *MIL-STD 810*[2]

adatto non solo per test meccanici ma anche per la valutazione della resistenza climatica. Redatto dalla US Air Force specifica livelli di vibrazione ottenuti da dati ambientali reali. Lo standard è nato nel 1962 come rielaborazione dei precedenti standard creati alla fine della seconda guerra mondiale. Ne esistono diverse revisioni, l'ultima compilata nel 2008 (revisione G). Suggerisce sequenze di test, durate e livelli di eccitazione e inoltre introduce la pratica del test tailoring, per cui i metodi di test proposti non devono necessariamente essere applicati in modo rigido, ma possono essere personalizzati per produrre il test più appropriato possibile.

- *GAM-EG 13*[3]

promosso dal governo francese, ha visto la luce alla fine del 1986. Come per l'americano MIL-STD definisce la pratica del test tailoring ma è più rivolto alla produzione di veicoli militari e armamenti. È un documento composto di differenti sezioni: una prima parte definisce condizioni di test e linee guida per garantire una buona riproducibilità delle condizioni ambientali. Una seconda parte è rivolta alle applicazioni agli equipaggiamenti dei diversi comparti militari (aviazione, marina, fanteria, ...). La parte finale è composta da diverse appendici che forniscono gli strumenti matematici per sintetizzare specifiche di test, elaborare i segnali acquisiti e forniscono anche misurazioni sperimentali effettuate su equipaggiamenti militari sul campo.

- *STANAG 4370*

lo STANAG (abbreviazione per STANdardization AGreement) è una collezione di documenti rilasciati dai membri NATO nel 1986 con l'intento di uniformare i test ambientali a livello globale. I documenti forniscono linee guida per diverse tipologie di test ambientali: test climatici, test meccanici ed elettrici. Lo STANAG contiene diversi esempi di condizioni ambientali tipiche, il loro potenziale danneggiante e i metodi per simulare in modo affidabile i loro effetti in fase di test.

1.3 STATO DELL'ARTE

Le principali ricerche odierne nel campo dei test ambientali sulle vibrazioni, si focalizzano sullo sviluppo di metodi affidabili di creazione di eccitazioni dinamiche per accelerare i tempi di test.

Come già accennato, la vibrazione random è il tipo di eccitazione che più assomiglia alle sollecitazioni ambientali normalmente misurate in servizio. È innegabile che l'esatta replicazione delle condizioni ambientali sia la via preferibile da seguire per ottenere le stesse caratteristiche danneggianti delle condizioni di utilizzo. Sfortunatamente questa via non è percorribile per diverse ragioni. Innanzitutto la vita prevista di un prodotto è normalmente dell'ordine di decine di migliaia di ore: la replica delle condizioni ambientali dovrebbe mantenere la stessa durata. Inoltre le sollecitazioni ambientali tipicamente hanno carattere aleatorio e lavorare con registrazioni temporali delle sollecitazioni espone al rischio di non considerare frammenti della storia di carico statisticamente significativi dell'intera vita del prodotto. Inoltre va considerato un altro aspetto: molto spesso la robustezza richiesta a un prodotto deve essere tenuta in considerazione già nelle prime fasi di sviluppo, quando geometrie e materiali sono passibili di importanti modifiche [4]. Tutti questi aspetti complicano l'utilizzo di misure ambientali per studi di durabilità.

Un approccio alternativo consiste nell'utilizzo di vibrazioni create ad hoc partendo dai dati sperimentali disponibili, in grado di produrre lo stesso danneggiamento dell'ambiente reale ma in minor tempo. Questo è il modo preferibile di operare seguito anche dalle moderne specifiche, che mirano a riprodurre gli effetti dell'ambiente piuttosto che l'ambiente stesso. Ovviamente è un approccio che richiede una conoscenza preliminare delle modalità di guasto che possono verificarsi nel prodotto.

La riduzione temporale può essere effettuata nell'ipotesi che si riesca a definire un criterio di danneggiamento accettabile per comparare effetti ambientali diversi. Nel caso delle vibrazioni il danneggiamento è da ricondursi principalmente al fenomeno della fatica, per cui i criteri utilizzati sono quelli della fatica stocastica.

Uno dei primi metodi di sintesi di vibrazione si basava sulla misura della densità di potenza spettrale della vibrazione misurata sul campo e sul tracciamento semplificato di un nuovo profilo di PSD, composto da sole linee spezzate, tale da involuppare il profilo di PSD sperimentale e garantire una vi-

brazione in grado di danneggiare il componente in minor tempo. La relazione fra tempi e valori RMS di accelerazione è descritta da una legge derivata dalla curva di Wöhler, nota in letteratura con il nome generico di *Inverse Power Law*:

$$\frac{\text{RMS}_{\text{test}}}{\text{RMS}_{\text{env}}} = \left(\frac{T_{\text{env}}}{T_{\text{test}}} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (1)$$

in cui RMS_{env} e T_{env} sono il valore RMS della vibrazione misurata nell'ambiente di lavoro e la vita media del componente, e RMS_{test} e T_{test} sono rispettivamente il valore RMS e la durata della vibrazione del test. b è il fattore di accelerazione del test. Solo in prima approssimazione si può assumere b uguale alla pendenza della curva S-N del materiale ma più spesso è un valore normato in base alla tipologia di componente su cui si sta eseguendo il test o in base al tipo di applicazione a cui sarà sottoposto in opera.

Il tracciamento dell'inviluppo è un'operazione assolutamente soggettiva, di cui esistono solo linee guida dettate dall'esperienza ingegneristica, e il metodo descritto è incline a errori che possono manifestarsi come sovra-test, quando la vibrazione data dall'inviluppo è eccessivamente danneggiante, oppure come sotto-test, quando non ha lo stesso potenziale danneggiante dell'ambiente operativo reale.

Lalanne, nel tentativo di migliorare il processo di sintesi, ha proposto la distinzione di due meccanismi responsabili di rotture: la tensione massima e l'accumulo di danno da fatica [5]. Ispirato dallo *Shock Response Spectrum*, uno strumento matematico impiegato per valutare la severità di urti, ha proposto due nuovi spettri: i già menzionati Extreme Response Spectrum e il Fatigue Damage Spectrum. Si tratta di strumenti utili per creare eccitazioni per test accelerati, superando le imprecisioni insite nel metodo di inviluppo della PSD. Inoltre, come lo Shock Response Spectrum, si basano sulla schematizzazione del sistema meccanico come un sistema a singolo grado di libertà, una semplificazione drastica ma che fornisce un'utile astrazione dell'oggetto da testare quando la sua geometria ancora non è definitiva.

La possibilità di condurre test accelerati evitando gli inconvenienti dell'inviluppo della PSD ha sollevato in fretta gli interessi dell'industria e del mondo accademico. Diversi studi sono stati effettuati per verificare la validità del metodo. Le applicazioni industriali possono essere rintracciate nel tempo fin dall'introduzione della metodologia di Lalanne, con casi studio di test accelerati su componentistica di ambiti industriali diversi. Senza dubbio i maggiori

beneficiari del metodo ERS/FDS sono stati l'aeronautica [1, 6] e l'industria automobilistica [7, 8, 9, 10].

Gli strumenti sviluppati da Lalanne sono stati applicati con successo anche in casi in cui l'utilizzo di uno shaker non è possibile a causa delle dimensioni ingombranti della struttura da testare. Un esempio interessante è riportato nel lavoro di Cianetti et al. [11] in cui una camera climatica di grandi dimensioni non avrebbe potuto essere testata su un convenzionale shaker elettrodinamico: la soluzione trovata è stata quella di posizionare la struttura su un camion e usare come eccitazione la vibrazione trasmessa dalle asperità della strada. L'FDS si è rivelato utile per scegliere la giusta velocità del veicolo e le asperità della strada fra differenti tracciati, in modo che la PSD dell'accelerazione in input fosse danneggiante tanto quanto un normale test accelerato da laboratorio.

Un test simile, ma condotto su trattori agricoli, è stato effettuato da Vertua et al. [12] ed è servito per costruire un database di terreni da usare come campo di prova per test affaticanti. L'FDS ha permesso di dimostrare che terreni attentamente selezionati possono essere usati in modo efficace per ridurre drasticamente il tempo di test, mantenendo lo stesso contenuto di danneggiamento che la macchina avrebbe subito durante il normale utilizzo.

Extreme Response Spectrum e Fatigue Damage Spectrum hanno dato prova di essere strumenti versatili tanto che se ne rintracciano applicazioni anche in contesti inusuali. Per esempio Marin et al. [13] li hanno applicati a luminarie stradali, usandoli come criteri di equivalenza per realizzare test accelerati il cui danno a fatica fosse comparabile con quello prodotto dall'azione prolungata della turbolenza del vento.

Wijker et al. [14] invece se ne sono serviti per caratterizzare l'effetto danneggiante di una vibrazione causata da emissioni acustiche su un modello di trave e sono riusciti a sintetizzare un test accelerato utilizzando altoparlanti al posto del classico shaker.

In ambito accademico la ricerca si è concentrata in particolar modo sugli aspetti teorici dietro le definizioni di ERS e FDS. In particolare molta produzione riguarda l'FDS, essendo questo derivato dai criteri di resistenza impiegati nello studio della fatica stocastica. Larsen et al. [15] hanno indagato l'affidabilità di differenti formulazioni per la stima del danno nel dominio delle frequenze. Nel lavoro citato l'applicabilità di diversi criteri quando lo spettro di sollecitazione è a banda larga piuttosto che a banda stretta è mes-

so in discussione e il livello di danneggiamento previsto messo a confronto con quello ottenibile dall'approccio classico del conteggio rainflow e dalla regola di Miner. Dalle loro indagini è emerso che l'efficacia dei vari criteri è influenzata dalla pendenza della curva S-N del materiale. Tutti i criteri di danneggiamento più diffusi danno stime della vita a fatica comparabili con quelle dell'algoritmo rainflow quando la pendenza inversa della curva è molto bassa ma quando il valore aumenta, in particolare quando raggiunge i valori tipici degli acciai strutturali, solo i metodi denominati $\alpha_{0.75}$ [16] e single moment [17] continuano a dare previsioni compatibili con il conteggio rainflow.

Una comparativa simile, fra diversi criteri spettrali di resistenza a fatica, è stata condotta da Mršnik et al. [18] usando profili vibratorii tipicamente impiegati nell'industria automotive. Prendendo sempre come riferimento la durata stimata con il conteggio rainflow, hanno trovato che i metodi più adatti per derivare l'FDS sono il metodo TB [19], il Zhao-Baker [20] e il metodo di Dirlik [21]. Vista l'importanza che hanno assunto, alcuni di questi criteri verranno illustrati in dettaglio nel cap.2.

Bennebach [22] ha apportato una modifica interessante al Fatigue Damage Spectrum, prendendo in considerazione gli effetti di plasticizzazione locale che possono verificarsi nel materiale quando un test accelerato causa deformazioni troppo accentuate (è una circostanza che può verificarsi in strutture snelle quando il test vibrazionale è molto accelerato). Nel lavoro citato è riportato un caso di studio su tubazioni in rame di un compressore per un refrigeratore industriale, in cui la vita in servizio attesa di 15 anni viene accelerata in 10 ore di test. A supporto della nuova formulazione modificata è riportato un confronto con i tempi a rottura previsti dai criteri classici, anche attraverso una campagna sperimentale su provini di differenti geometrie.

Un altro aspetto affrontato da diversi autori è la verifica, teorica e sperimentale, dell'inverse power law (eq.1). L'importanza della formula è cruciale per i test accelerati perché è la legge comunemente utilizzata per accorciare i tempi di test. In particolare l'esponente b riveste un ruolo fondamentale dal momento che la sua assunzione uguale alla pendenza della curva S-N è valida solo come prima approssimazione e, generalmente, porta a stime di durata incoerenti con l'evidenza sperimentale. Per superare il problema le normative raccomandano dei coefficienti correttivi per b in funzione del materiale e della particolare funzione del componente, spesso dedotti dall'esperienza. Allegri e Zhang [23] hanno trovato una formulazione modificata per l'(eq.1) in grado

di tenere in considerazione gli effetti della multiassialità dello stato tensionale. Nella loro trattazione il valore che compare all'esponente è la pendenza di una curva S-N ottenuta con sollecitazioni random anziché la classica flessione rotante.

Altri autori invece si sono concentrati maggiormente sulla verifica sperimentale dell'inverse power law. Generalmente i lavori rintracciabili in letteratura fanno uso di provini metallici di forma semplice, eccitati con uno shaker fino al livello di danno desiderato. La geometria più utilizzata è quella della trave a sbalzo con un intaglio in prossimità dell'incastro che agisce da sito preferenziale per l'innescò di cricche. Solitamente una massa montata sull'estremo libero agisce da inerzia concentrata ed è utile per regolare le frequenze di risonanza del sistema. La grande maggioranza dei lavori sperimentali in letteratura eccitano il primo modo flessionale della trave, permettendo due semplificazioni:

- il sistema può essere trattato come un sistema a singolo grado di libertà
- la risposta dinamica è generalmente a banda stretta vista la snellezza della geometria e il basso fattore di smorzamento del materiale. Questo secondo aspetto è fondamentale per una stima affidabile del danneggiamento.

Pothula et al. [24] utilizzando un set-up simile a quello descritto, hanno applicato differenti profili di PSD di accelerazione a sottili strisce di alluminio e hanno comparato il tempo di rottura sperimentale con quello previsto da diversi criteri di resistenza spettrali applicati a simulazioni agli elementi finiti. Il confronto è servito a stabilire il miglior valore per l'esponente b per ottenere corrispondenza con le tempistiche di test sperimentali, inoltre, siccome il fattore di smorzamento ha una grossa influenza sulla risposta dinamica, alcuni provini sono stati rivestiti di un polimero spray (fig.2) e l'effetto del differente smorzamento sul valore dell'esponente è stato investigato. Hanno concluso che il valore dello smorzamento modale deve essere tenuto in considerazione prima di qualsiasi stima di durata perché dà indicazioni su quale criterio di resistenza utilizzare: sperimentalmente hanno evidenziato che non esiste un criterio affidabile per qualsiasi valore di smorzamento.

In modo simile Jiang et al. [25] hanno condotto una campagna sperimentale su provini intagliati fresati da lamiera di alluminio (fig.3). Non solo hanno

usato eccitazioni random gaussiane con diversi profili di PSD, ma hanno anche eseguito test con eccitazioni non gaussiane, controllando la curtosi del segnale. La ricerca è servita a stabilire quali parametri statistici e dello spettro di eccitazione sono più influenti sulla vita a fatica.

La non gaussianità dell'eccitazione è un altro aspetto che in anni recenti è stato investigato da più autori. Nell'ottica di eseguire test sempre più vicini alle reali condizioni ambientali, è importante riuscire a replicare tutte le caratteristiche delle reali eccitazioni: non sempre seguono la distribuzione gaussiana, molto spesso le time histories mostrano picchi di accelerazione distribuiti in modo casuale. I picchi possono essere simulati sullo shaker controllando

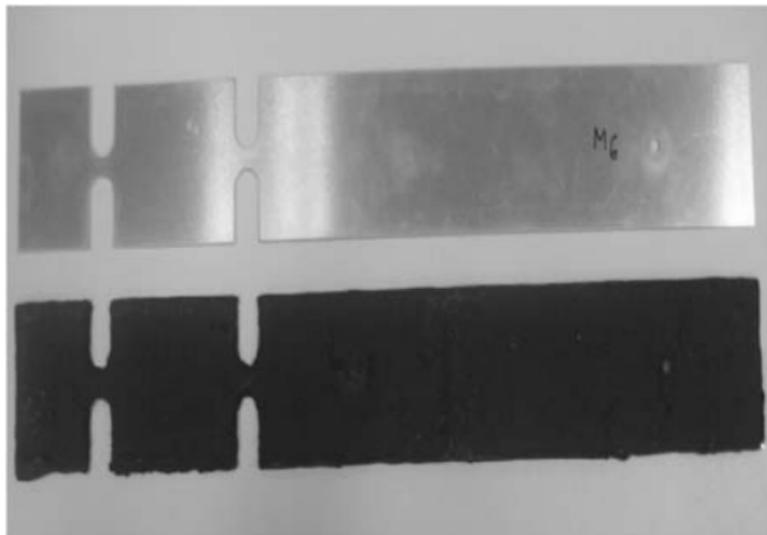


Figura 2: Provini utilizzati da Pothula et al. [24]

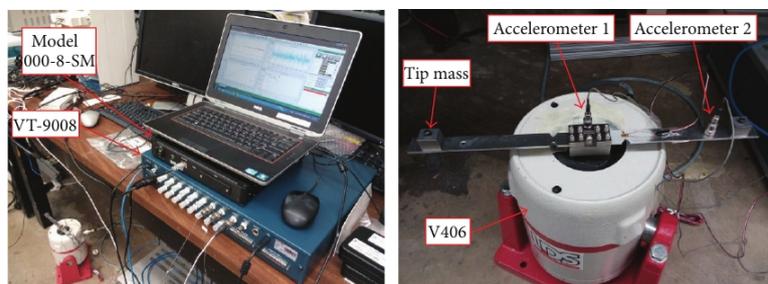


Figura 3: Sistema di test di Jiang [25]

la curtosi del segnale, in particolare adottando segnali con distribuzione leptocurtica. È importante sottolineare come la consueta definizione della vibrazione mediante la PSD, come quella fornita dagli standard, consenta solo la sintesi di segnali gaussiani nonostante sia noto che la non gaussianità può contribuire al danneggiamento in modo considerevole.

Troncossi et al. [26] replicando su shaker diversi segnali di eccitazione con differenti livelli di curtosi hanno investigato la risposta dinamica di provini intagliati, torniti da una barra di alluminio (fig.4). Hanno osservato che la cosiddetta *regola di Papoulis* [27] può avere un grande impatto sulla risposta dinamica, a seconda delle caratteristiche del provino. La regola afferma che una risposta dinamica in banda stretta, quale è tipicamente quella dei sistemi poco smorzati, può agire come una sorta di filtro per la distribuzione statistica del segnale "filtrando" i picchi e lasciando una risposta gaussiana. A causa di questo effetto la risposta misurata nel caso di eccitazione non gaussiana era molto simile a quella prodotta dall'eccitazione gaussiana stazionaria. Questo mette in evidenza un aspetto critico legato a questo tipo di eccitazione: non sempre il controllo non gaussiano della tavola vibrante è una strategia di test efficace perché, specialmente per sistemi poco smorzati, il potenziale danneggiante dell'eccitazione potrebbe essere lo stesso di un'eccitazione gaussiana.

Il problema della non gaussianità è di interesse anche nell'ambito delle simulazioni numeriche in cui tutti i criteri computazionalmente più efficienti sono criteri di danneggiamento in frequenza che si basano sull'ipotesi di tensioni distribuite gaussianamente. Nel caso di tensioni con distribuzioni stati-

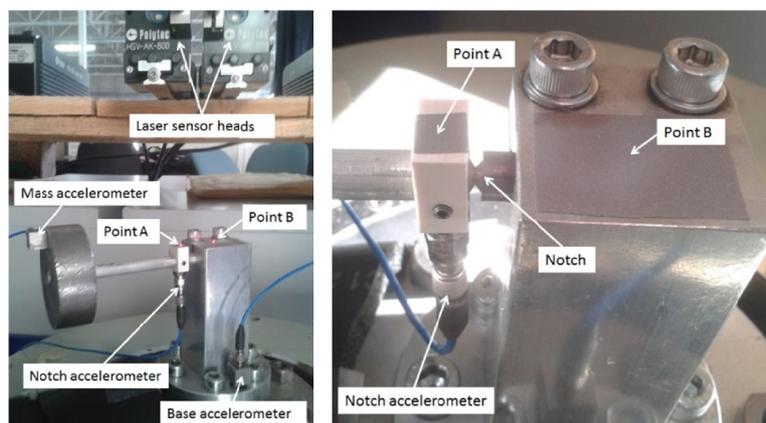


Figura 4: Sistema di test utilizzato da Troncossi et al. [26]

stiche diverse, l'unica strada percorribile rimane l'applicazione di metodi che operano nel dominio del tempo, come i metodi di conteggio dei cicli che, a causa della ricorsività degli algoritmi, sono di gran lunga meno efficienti. Per aggirare il problema Wolfsteiner et al. [28] hanno sviluppato un metodo per dividere la storia temporale dell'eccitazione in piccoli frammenti e mantenere solo quelli gaussiani ai fini del calcolo del danno a fatica. L'obiettivo della tecnica è quello di velocizzare l'analisi agli elementi finiti mantenendo solo quei frammenti temporali su cui si possono applicare metodi di calcolo efficienti. L'efficacia è dimostrata in un caso di studio di un componente di un vago-ferroviario mettendo in evidenza il grande risparmio in termini di tempo computazionale.

Palmieri et al. [29] infine, hanno condotto un'accurata campagna, sia numerica che sperimentale (fig.5), per valutare in che modo non solo la non gaussianità ma anche la non stazionarietà influiscono sulla vita a fatica. In modo diverso da Wolfsteiner, nei loro modelli agli elementi finiti hanno tenuto tutto l'intero spettro della sollecitazione, non solo le parti gaussiane del segnale, e corretto le previsioni degli usuali criteri di danneggiamento con un coefficiente introdotto da Braccesi [30]. Hanno osservato che il maggiore impatto sulla durabilità è dovuto alla stazionarietà dell'eccitazione e non alla gaussianità: infatti quando è stazionaria e non gaussiana la vita a fatica non differisce significativamente dal caso gaussiano stazionario, al contrario di quanto succede quando non gaussianità e non stazionarietà sono contemporaneamente presenti.

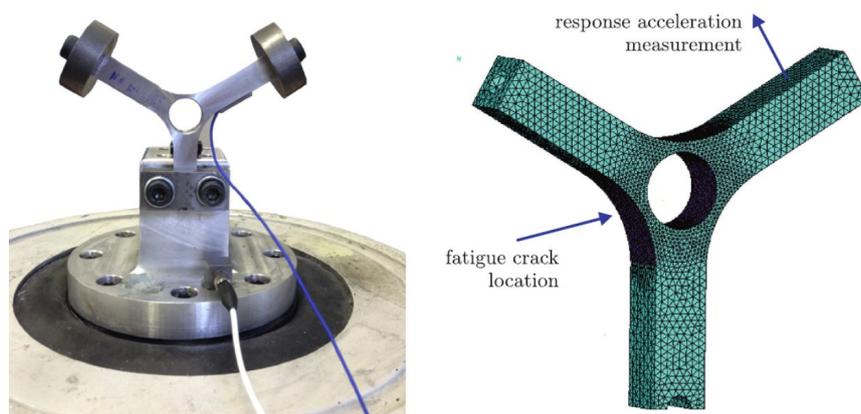


Figura 5: Provino utilizzato da Palmieri et al. [29]

Tutte le procedure di test accelerati descritte dagli standard comprendono solo test pensati per essere eseguiti su shaker monoassiali. È evidente tuttavia che nella realtà le vibrazioni agiscono su un componente in più di una direzione simultaneamente. Per tenere conto degli effetti della multiassialità, la procedura comune suggerita consiste nell'eseguire il test accelerato in tutte le direzioni coinvolte in modo sequenziale, ruotando l'oggetto di 90 gradi ad ogni ripetizione del test. Questo espediente è utile per simulare le condizioni ambientali reali, ma ovviamente prolunga il tempo di test (considerando anche il tempo necessario per smontare l'oggetto dalla sua posizione attuale e rimontarlo nel nuovo orientamento). Sono state condotte ricerche che hanno dimostrato come questa pratica non solo sia dispendiosa in termini di tempo ma addirittura che non permetta di replicare le reali rotture osservabili durante le normali condizioni di utilizzo.

I primi a condurre ricerche in questo ambito sono stati Whiteman e Berman [31, 32]. Nei lavori citati, utilizzando uno dei primi shaker elettrodinamici triassiali (fig.6), hanno condotto delle ricerche sperimentali su barre cilindriche di alluminio intagliate. Eccitando i provini fino a rottura prima su ogni asse in modo sequenziale e poi tutti e tre allo stesso tempo, hanno provato che il tempo a rottura è diverso, dimostrando che i test multiassiali sono molto più brevi di quelli sequenziali.

French et al. [34] usando uno shaker multiassiale di piccola taglia su barre di alluminio con intagli diversi hanno provato che non solo le tempistiche di test sono differenti, come osservato da Whiteman, ma anche il punto di innesco della cricca è diverso quando si passa da test su singolo asse a più assi contemporaneamente, significando che anche il meccanismo di danneggiamento è diverso. La conclusione è che, se già con geometrie molto semplici si osservano modalità di danno diverse, non c'è assolutamente garanzia che su geometrie più complesse un test accelerato svolto in sequenza possa dare previsioni affidabili delle reali modalità di rottura osservabili durante l'utilizzo.

Queste ragioni spiegano perché l'attuale frontiera di ricerca si stia spostando verso i test multiassiali. Sfortunatamente la letteratura scientifica dedicata agli shaker elettrodinamici multiassiali è alquanto scarsa a causa dell'elevato costo della strumentazione. Oltre a quelli citati, sono pochi gli altri lavori dedicati a evidenziare le differenze rispetto ai comuni test su singolo asse. Alcuni di questi sono rintracciabili nell'attività dei Sandia National Laboratories in

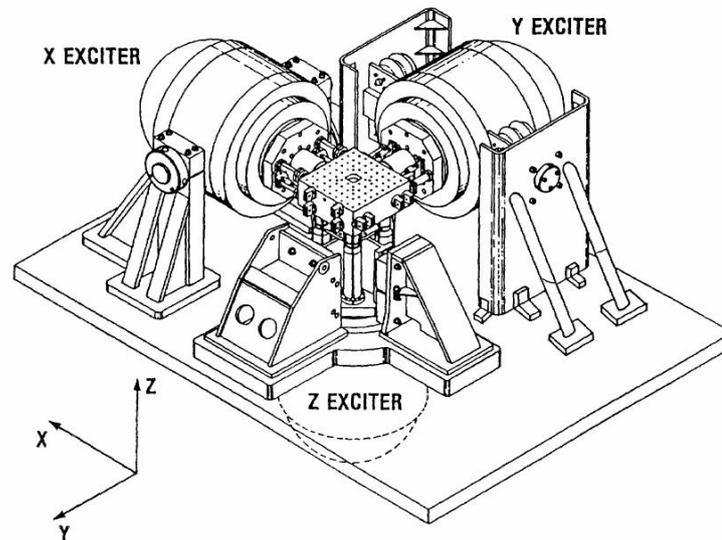
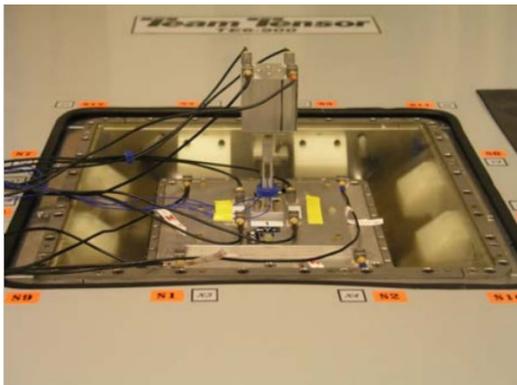


Figura 6: Shaker triassiale dell'U.S. Army Research Laboratory (da [33])

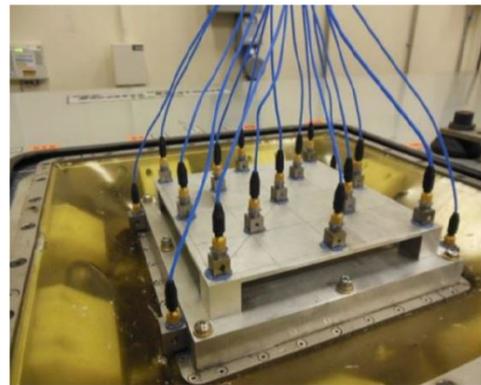
cui è a disposizione uno shaker elettrodinamico a 6 gradi di libertà sviluppato da TEAM Corporation. Gregory et al. [35] l'hanno utilizzato per misurare la risposta dinamica di una piccola struttura costituita da una trave verticale con una massa concentrata in cima (fig.7a). Gli esperimenti sono stati condotti in modalità a singolo asse e multiassiale, eccitando tutti i modi compresi nella banda fra 10Hz e 2kHz. I primi esperimenti sono stati condotti su tutti e 6 i gradi di libertà contemporaneamente, usando la stessa PSD di eccitazione e scorrelando completamente gli assi, e successivamente ripetuti per ogni asse alla volta. Le misure hanno mostrato significative differenze nella risposta accelerometrica della massa, come anche della deformazione misurata sulla trave. Deformazioni e accelerazioni istantanee erano differenti non solo in valore assoluto, ma anche nella posizione, indicando che le potenziali modalità di cedimento sarebbero state differenti se il provino fosse stato portato a rottura completa. Jacobs e Nelson [36, 37] hanno svolto esperimenti simili sulla stessa macchina ma usando provini di geometria diversa (fig.7b). Ancora una volta oggetto dell'indagine è stata la differente risposta dinamica della struttura a fronte di un'eccitazione mono o multiassiale ma, in più, anche l'effetto di un diverso livello RMS e grado di correlazione sono stati indagati. È stato misurato che la risposta dinamica in condizioni multiassiali è quella che ha un

contenuto di energia più alto rispetto al possibile valore RMS della risposta data dall'eccitazione su singolo asse. Inoltre per ogni risposta dinamica sono stati calcolati lo Shock Response Spectrum e il Fatigue Damage Spectrum trovando che, a causa della dominanza del primo modo, il potenziale di danneggiamento dell'eccitazione multiassiale è complessivamente comparabile a quello dell'eccitazione monoassiale, tranne in poche zone circoscritte in cui l'eccitazione multiassiale dà un FDS maggiore.

A conclusione dell'excursus sullo stato dell'arte dei test accelerati, in particolare del problema della multiassialità, vale la pena ricordare che lo standard americano MIL-STD 810 nella revisione G incorpora alcune linee guida per eseguire test su più gradi di libertà (Method 527 - Multi-Exciter Testing).



(a)



(b)

Figura 7: Test condotti presso i laboratori Sandia: (a) provino utilizzato da Gregory et al. (b) sistema di test utilizzato da Nelson e Jacobs

1.4 OBIETTIVI E CONTENUTO DELLA TESI

Obiettivo del presente lavoro è quello di indagare l'affidabilità previsionale degli attuali metodi per la sintesi di test accelerati quando applicati a eccitazioni monoassiali e multiassiali simultanee. Prendendo spunto dai lavori attualmente reperibili in letteratura è stata organizzata una campagna sperimentale su provini di acciaio su cui sono stati realizzati test con eccitazioni su singolo asse e su più assi simultaneamente, variando il livello di coerenza. Le modalità e i risultati sono riportati in dettaglio mettendo in risalto gli aspetti che concorrono a influenzare le previsioni della legge di scalatura temporale universalmente adottata nei test accelerati. Essendo la geometria dei provini e dei profili di PSD adottati molto semplici, è presumibile che le osservazioni a cui si è giunti mantengano validità anche in contesti più complessi e interessanti dal punto di vista industriale, su componenti meccanici reali e con spettri di eccitazione ottenuti da misure sperimentali in condizioni di esercizio.

Di seguito si riporta una breve descrizione del contenuto di ogni capitolo, da usare come riferimento per orientarsi all'interno del presente lavoro:

CAP.2 Nel secondo capitolo viene affrontato l'inquadramento teorico dei test accelerati. Partendo dalle nozioni fondamentali della fatica, verranno introdotti i metodi statistici utili per affrontare lo studio della fatica stocastica. La fatica meccanica è il fenomeno alla base del danneggiamento durante un test accelerato e la formulazione stocastica è lo strumento fondamentale per descriverne il comportamento. I concetti illustrati sono utili anche per la definizione rigorosa degli spettri ERS/FDS incontrati nel primo capitolo e dell'inverse power law (eq.1).

CAP.3 Nel terzo capitolo viene descritto il funzionamento dello shaker triassiale a disposizione dell'Università degli Studi di Ferrara e le problematiche connesse alla progettazione dei provini e al sistema di afferraggio. Viene descritta la strategia di test in accordo alla metodologia ERS/FDS e la modellazione agli elementi finiti che ha permesso di avere una stima delle durate prima della realizzazione del sistema.

CAP.4 Nel quarto capitolo sono riportati in dettaglio i risultati della campagna sperimentale e sono descritti gli strumenti analitici necessari per il processamento dei dati raccolti.

CAP.5 Nel quinto capitolo si affronta l'analisi critica dell'inverse power law alla luce dei risultati della campagna sperimentale, sia quando applicata a test monoassiali, sia a test con eccitazione biassiale. È descritta in dettaglio la procedura adottata per eliminare anomalie statistiche dal campione delle osservazioni sperimentali e gli effetti della non stazionarietà della risposta dinamica e della coerenza fra eccitazioni multiple sull'affidabilità previsionale della legge di scalatura temporale.

CAP.6 L'ultimo capitolo racchiude le considerazioni finali e le future direzioni che può intraprendere questo filone di ricerca.

INQUADRAMENTO TEORICO

In questo capitolo verranno trattati gli aspetti teorici fondamentali della fatica stocastica e dei metodi di sintesi di profili vibratorii per test accelerati. Il danneggiamento osservato nei componenti meccanici nel reale utilizzo è imputabile all'accumulo di fatica, in genere random e multiassiale. Verrà illustrato qui l'approccio classico monoassiale su cui si basa anche la teoria dei test accelerati e che sarà utile anche per la comprensione dei risultati della campagna di test condotta su provini metallici intagliati. In particolare verranno illustrati i metodi che si basano sullo spettro in frequenza della tensione misurata, ritenuti ormai robusti e comparabili con i metodi nel dominio del tempo basati sul conteggio dei cicli. Dopo aver introdotto la schematizzazione a singolo grado di libertà che sta alla base della teoria dei test accelerati, la teoria della fatica stocastica sarà utile per la definizione analitica degli spettri ERS/FDS e per la trattazione dell'inverse power law.

2.1 CARATTERIZZAZIONE DELLA RESISTENZA A FATICA DEI MATERIALI

La resistenza a fatica dei materiali viene solitamente studiata in laboratorio utilizzando provini sagomati sottoposti a sforzi (o deformazioni) di ampiezza σ , fino alla rottura. L'approccio classico si basa sull'uso di sollecitazioni sinusoidali di ampiezza costante e media nulla. Il lavoro di Wöhler portato avanti da metà '800 su assali ferroviari sottoposti a sforzi di flessione rotante, e i successivi, hanno evidenziato come il numero N di cicli a rottura (resistenza del componente o vita a fatica) dipenda da σ . La curva, ottenuta plottando N in funzione di σ , è comunemente chiamata curva S-N (Stress - Number of cycles) o curva Wöhler, ed è solitamente tracciata in scala logaritmica come mostrato in fig.8.

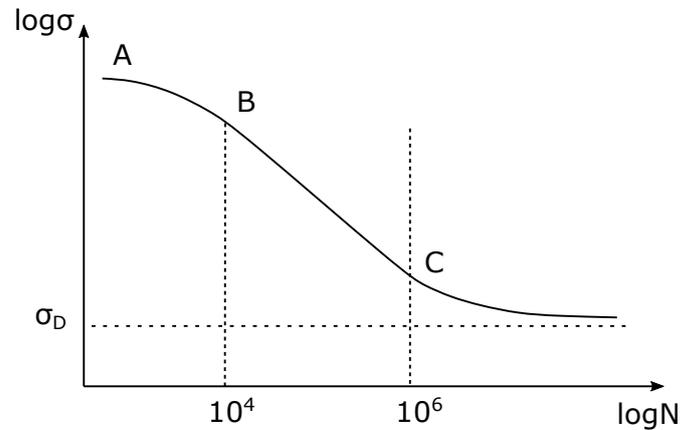


Figura 8: Andamento tipico della curva S-N per acciai

Nei metalli è generalmente possibile identificare tre zone distinte:

1. zona A-B: zona della fatica a basso numero di cicli, che corrisponde alla zona in cui le tensioni sono superiori alla tensione di snervamento del materiale. N varia da uno a approssimativamente $10^4 - 10^5$ cicli (per acciai dolci). In questa zona è osservabile una significativa deformazione plastica del provino prima del cedimento
2. zona B-C: zona della vita limitata, in cui la frattura appare a tensioni inferiori delle precedenti, senza mostrare apprezzabile deformazione plastica. Esistono diverse relazioni fra σ e N per rappresentare il fenomeno della fatica in questa regione che è approssimativamente posizionata fra i 10^4 cicli e $10^6 - 10^7$ cicli
3. zona oltre C: zona della vita infinita, in cui σ_D è chiamato limite di fatica e rappresenta il valore limite delle tensioni a media nulla per cui non è osservabile la rottura a fatica, nemmeno dopo un numero infinito di cicli. La curva S-N presenta generalmente una variazione significativa della pendenza attorno 10^6 cicli, seguita da una zona in cui la curva tende ad un asintoto orizzontale. La differenza più significativa fra curve di Wöhler per diversi materiali è rappresentata dal comportamento oltre il punto C: mentre gli acciai generalmente mostrano un limite di durata a fatica, altri materiali, tipicamente leghe di alluminio, mostrano un calo della pendenza ma non un vero asintoto orizzontale.

Varie espressioni sono state proposte per descrivere analiticamente la curva S-N, specialmente nella zona di durata limitata. Per la sua rilevanza negli argomenti trattati in questa tesi la relazione proposta da Basquin è qui riportata:

$$N\sigma^k = C \quad (2)$$

dove C è una costante, caratteristica del materiale. L'equazione approssima il tratto B-C di fig.8 con una linea retta di pendenza k.

2.2 ACCUMULO DEL DANNO

Il concetto di danno da fatica non è ben definito a causa delle difficoltà inerenti ai meccanismi di nucleazione e propagazione delle cricche nei materiali metallici. La nucleazione della cricca è un fenomeno che si verifica su scala microscopica, causato dal movimento dei piani del reticolo cristallino, in larga parte dovuto all'azione di tensioni alternate tangenziali che portano a deformare plasticamente i grani più favorevolmente orientati. L'accumulo di deformazione plastica può causare la creazione di micro-cricche sulla superficie del materiale che tendono poi a propagare per effetto di sollecitazioni ripetute. Diverse micro-cricche possono unirsi insieme e formare una cricca macroscopica che continua a propagare verso il cuore del componente meccanico. In un test di fatica la propagazione rimane invisibile per la maggior parte del tempo, diventando rilevabile solo verso la fine della vita del campione, quando l'area non fessurata rimanente non è più in grado di sostenere il carico applicato. La nucleazione è largamente influenzata da fattori metallurgici, come la struttura cristallina, difetti superficiali e disomogeneità microscopiche che possono fungere da siti preferenziali per l'innescò della cricca. Altri fattori non dipendenti dai processi metallurgici possono influenzare la resistenza a fatica finale, come l'azione ambientale (ad esempio la corrosione), ripetute dilatazioni termiche e la presenza di concentrazioni di tensione nella geometria.

Tutti questi aspetti contribuiscono all'incertezza insita alla fatica meccanica e alla difficoltà di una definizione generale di danno: i test eseguiti con carichi semplici (alternati ad ampiezza costante) mostrano grandi differenze nella resistenza alla fatica anche a parità condizioni nominali.

In un test a fatica di solito si definisce come *danno* una quantità adimensionale che assume valore zero all'inizio del test e può crescere fino a 1 nell'istante di rottura completa.

La curva S-N descritta in precedenza non contiene alcuna informazione sul processo di accumulo del danno. Per tenere in considerazione l'accumulo del danno durante un test, uno dei metodi più semplici ma largamente adottati è la regola Palmgren-Miner [38]. Il danno accumulato ad ogni ciclo è una funzione dell'ampiezza della tensione σ : per n ripetizioni di tensione al livello σ il danno è definito come:

$$d = \frac{n}{N} \quad (3)$$

dove N è il numero di cicli a rottura per l'ampiezza σ scelta ed è un valore ottenibile dalla curva S-N. È evidente che quando $n = N$, il provino si rompe e $d = 1$ in accordo alla definizione di danno precedente.

La regola di Miner afferma che i danneggiamenti provocati da differenti livelli di tensioni possono essere sommati linearmente: per i blocchi di carico con differenti ampiezze il danno totale accumulato può essere espresso come:

$$D = \sum_i d_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} \quad (4)$$

Si è implicitamente assunto che il danno si accumuli senza l'influenza di un livello di tensione sull'altro, producendo così rottura completa quando si raggiunge $D = 1$. La regola di Palmgren-Miner è una legge lineare che si basa sull'ipotesi che non ci sia alcuna interazione tra cicli consecutivi con differenti ampiezze.

Dal momento che la fatica è un fenomeno complesso che coinvolge molti fattori, questa regola non fornisce stime molto precise. Numerosi studi sono stati condotti per valutare sperimentalmente questa legge e, alla fine, ne hanno messo in luce alcuni difetti:

- l'ordine di applicazione delle tensioni sinusoidali influenza la vita a fatica
- il tasso di propagazione della cricca non dipende solo dall'ampiezza del carico in un certo istante, ma anche dall'ampiezza dei precedenti cicli.

Le osservazioni sperimentali possono essere spiegate considerando che, quando sono applicati per primi, i cicli di grande ampiezza contribuiscono al danno sotto forma di cricche intergranulari che i seguenti cicli di minore ampiezza continueranno a far propagare. Altrimenti, se sono i cicli di minore ampiezza a venire applicati per primi, questi non sono efficaci a nucleare le cricche microscopiche e la propagazione è dovuta solo all'effetto dei cicli successivi più ampi.

Nonostante la sua bassa accuratezza, l'ipotesi di Miner rimane un buon strumento di prima approssimazione per stimare la vita a fatica di un componente. Nel caso particolare di tensioni random, la maggior parte degli autori considera questa regola ancora più accurata rispetto a quando applicata a tensioni sinusoidali: infatti, dal momento che l'ordine dei cicli è casuale, la sua influenza è molto più debole rispetto all'utilizzo di blocchi di carico sinusoidali.

Nel tempo sono state sviluppate altre leggi per stimare l'accumulo del danno con maggiore precisione ma, a parte l'aumento di complessità, portano a risultati migliori solo in casi specifici. Una rassegna dettagliata di molti modelli di accumulo del danno può essere rintracciata nel lavoro di Fatemi [39].

2.3 CONTEGGIO RAINFLOW

Durante la sua vita un componente meccanico è soggetto a diversi tipi di sollecitazioni che possono essere classificate in sollecitazioni di natura deterministica e di natura stocastica. Le prime sono legate all'impiego funzionale del pezzo, sono le sollecitazioni che vengono trasferite al componente dagli altri membri della catena cinematica in cui è inserito; le seconde sono dovute ad eventi aleatori che possono verificarsi e di cui se ne può dare solo una stima probabilistica. Le sollecitazioni stocastiche sono quelle legate alle vibrazioni agenti sul componente e per esse diventa indispensabile poter quantificare il danneggiamento arrecato nel tempo.

Ai fini della quantificazione del danno i parametri ritenuti utili sono gli estremi locali della storia di carico (picchi e valli), le ampiezze fra picchi e valli e il passaggio di livelli prestabiliti. Tipicamente la storia temporale viene rappresentata in forma schematica come riportato in fig.9 in cui le grandezze interessate vengono messe in evidenza.

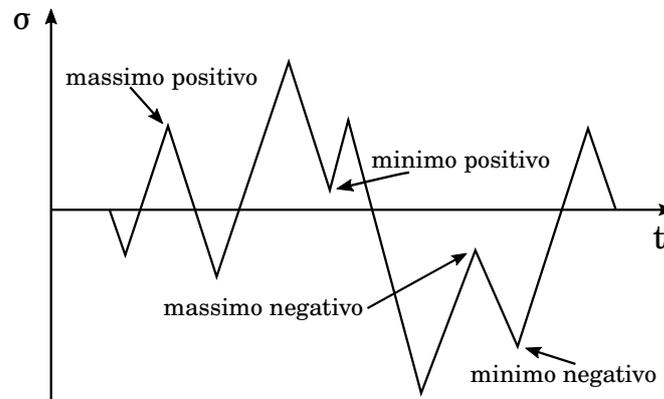


Figura 9: Storia temporale schematizzata e relativa nomenclatura

L'approccio comunemente seguito è quello di convertire la storia di carico in un insieme di cicli (ad ampiezza costante) con lo stesso potere affaticante usando un metodo di conteggio dei cicli e, successivamente, calcolare il danno totale accumulato sommando i danneggiamenti causati da ogni ciclo individuato.

I metodi di conteggio sono algoritmi che individuano i cicli di fatica accoppiando secondo regole prestabilite i massimi e i minimi della storia di carico. I vari metodi di conteggio esistenti si differenziano per le regole con cui accoppiano picchi e valli; una possibile classificazione può essere fatta sulla base del numero di parametri tenuti in considerazione dei cicli individuati. I metodi monoparametrici individuano i cicli sulla base di un solo parametro, ad esempio la sua ampiezza, i metodi biparametrici oltre all'ampiezza considerano anche il livello medio di ogni ciclo [40].

Il metodo rainflow [41] appartiene a questa seconda famiglia ed è indubbiamente uno dei metodi di conteggio più utilizzati poiché la sua accuratezza è stata verificata anche in condizioni di carico complesse [42]. Il metodo identifica i cicli affaticanti e li classifica sulla base dell'effetto memoria del materiale, ovvero individuando cicli di isteresi sul piano tensione-deformazione. Ogni parte della storia temporale viene contata una sola volta: metà ciclo è sempre formato collegando il picco massimo con la valle più profonda (punti A e D di fig.10), le variazioni di ampiezza più piccole vengono considerate interruzioni dei cicli più grandi e corrispondono ai cicli di isteresi chiusi sul piano $\sigma - \epsilon$ (punti B-C e E-F). Al danno totale si risale inserendo ampiezza e numero di ripetizioni di ogni ciclo individuato nella regola di Miner.

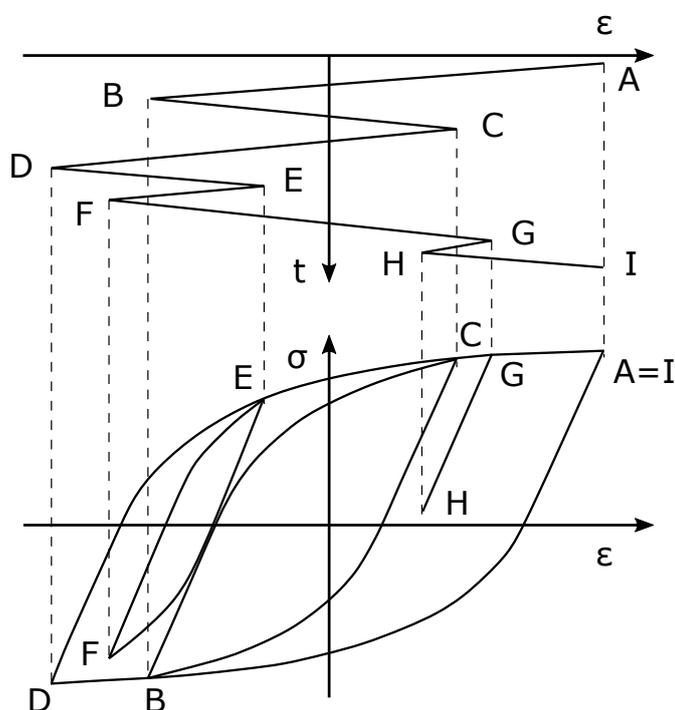


Figura 10: Conteggio rainflow e individuazione dei cicli di isteresi sul piano tensione-deformazione

2.4 METODI SPETTRALI PER LA STIMA DEL DANNEGGIAMENTO

La procedura descritta di conteggio dei cicli e accumulo lineare del danno è in grado di fornire previsioni affidabilistiche molto precise ma solamente quando il carico agente è noto, ad esempio dopo una misurazione sperimentale. Nel caso di sollecitazioni irregolari, la storia di carico assume carattere aleatorio e tutte le grandezze associate utili per la stima della durata diventano variabili aleatorie che vanno trattate con metodi statistici. Ad esempio vanno trattate come variabili aleatorie il numero di cicli contati e le relative ampiezze che risulterebbero dal conteggio rainflow, così come anche il danno accumulato che risulta dalla regola di Palmgren-Miner. Statistiche affidabili sono ottenibili a posteriori di estese campagne sperimentali, spesso dispendiose in termini di tempo e risorse economiche. Inoltre permane il problema della significatività del campione temporale misurato, ovvero se la storia di carico registrata in un periodo limitato possa essere considerata come rappre-

sentativa delle condizioni di carico dell'intera vita del componente. In questo caso risulta utile applicare i metodi della statistica inferenziale sul periodo di osservazione considerato per poter estrapolare le grandezze utili alla stima della vita a fatica con opportuni intervalli di confidenza.

Nei cosiddetti *metodi spettrali* la sollecitazione irregolare viene modellata come un *processo stocastico gaussiano stazionario*, descritto dalla sua densità spettrale nel dominio delle frequenze. Il vantaggio di questo approccio è quello di permettere di legare, attraverso formulazioni analitiche, il danno a fatica direttamente alla stima della PSD del processo, evitando i metodi di conteggio dei cicli nel dominio del tempo. I metodi spettrali, evitando la ricorsività propria dei metodi di conteggio, risultano ordini di grandezza più efficienti tuttavia, come si vedrà nel seguito del capitolo, l'accuratezza della previsione di danno è legata alla larghezza di banda in frequenza del fenomeno aleatorio, risultando affidabile e comparabile con le stime del conteggio rainflow solo nel caso di fenomeni a banda stretta.

2.4.1 Proprietà spettrali dei processi stocastici stazionari

La sollecitazione irregolare che agisce su un componente meccanico può essere modellata come un processo stocastico: nel seguito con la notazione $\{X(t)\}_k$ ci si riferirà a un processo stocastico costituito da k elementi (ad esempio k possibili osservazioni sperimentali) e con $x(t)$ a una sua possibile realizzazione. L'ipotesi fondamentale della trattazione è che il processo possa essere considerato *stazionario* e *ergodico*. Non si tratta di limitazioni restrittive poiché, tipicamente, le sollecitazioni random che agiscono su un componente meccanico rientrano in questa categoria [43].

Nel dominio del tempo il processo è caratterizzato in modo univoco dalla funzione di autocorrelazione

$$R_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} \quad (5)$$

in cui τ rappresenta un ritardo temporale.

Alternativamente il processo può essere descritto nel dominio delle frequenze ricorrendo alla Power Spectral Density, che descrive la potenza media del segnale contenuta in una banda di frequenza. Il teorema di Wiener-Khinchin

lega la funzione di autocorrelazione R_{xx} alla PSD double-side S_{xx} attraverso la trasformata di Fourier:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (6)$$

Solitamente riferendosi alla PSD di un processo stocastico si rimanda alla rappresentazione single-side G_{xx} , definita solo sull'asse positivo delle frequenze: la trasformazione che lega le due rappresentazioni è la seguente

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} 2S_{xx}(f), & 0 < f < +\infty \\ S_{xx}(0), & f = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Un processo stazionario si definisce a banda stretta (o *narrowband*) se la sua PSD è distribuita in una banda di frequenze ristretta rispetto il valore della frequenza centrale. Un processo a banda larga (o *wide band*) invece ha un contenuto in frequenza distribuito in un intervallo più ampio. La distinzione fra processi a banda stretta e banda larga è evidente dal confronto di figura 11, in cui la diversa distribuzione delle densità spettrali nel dominio delle frequenze è responsabile di forme d'onda marcatamente diverse nel dominio del tempo, benché la distribuzione statistica di entrambi i segnali sia gaussiana.

Si definiscono momenti spettrali della PSD i coefficienti λ_n calcolabili come

$$\lambda_n = \int_0^{+\infty} f^n G_{xx}(f) df \quad n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

che sono legati a importanti proprietà statistiche del processo $x(t)$. Ad esempio il momento zero rappresenta la varianza del segnale, il secondo momento la varianza della derivata prima di $x(t)$ calcolata rispetto il tempo e il quarto momento la varianza della derivata seconda

$$\lambda_0 = \int_0^{+\infty} G_{xx}(f) df = \text{var}\{x(t)\} \quad (9)$$

$$\lambda_2 = \int_0^{+\infty} f^2 G_{xx}(f) df = \text{var}\{\dot{x}(t)\} \quad (10)$$

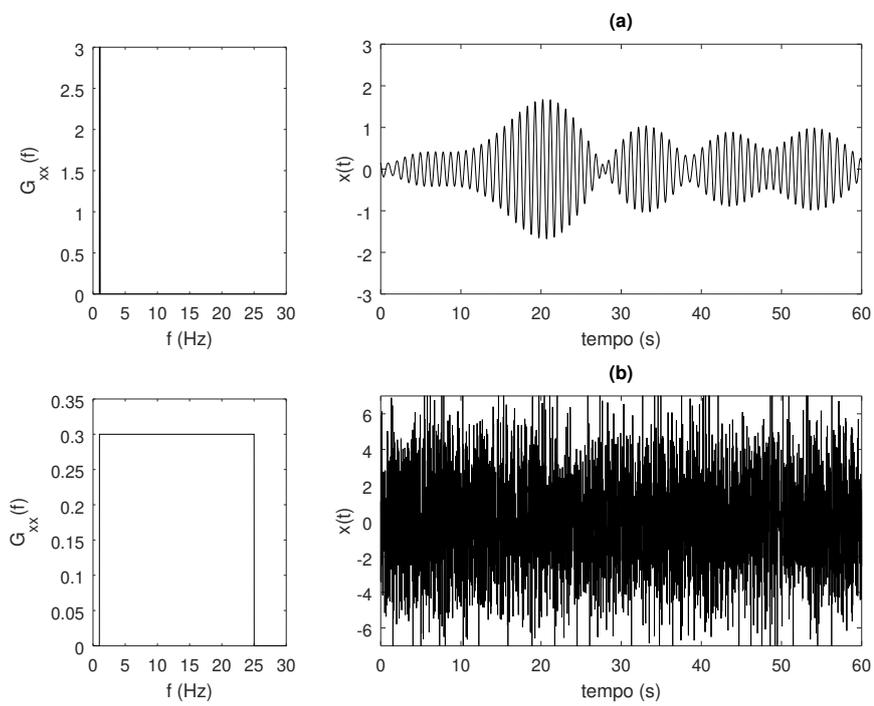


Figura 11: Esempi di segnali: a) segnale a banda stretta b) segnale a banda larga

$$\lambda_4 = \int_0^{+\infty} f^4 G_{xx}(f) df = \text{var} \{\ddot{x}(t)\} \quad (11)$$

I momenti spettrali sono utili per definire anche altre caratteristiche del segnale nel tempo; in un segnale gaussiano ad esempio il numero medio di attraversamenti dello zero con pendenza positiva per secondo è legato alla PSD del segnale attraverso

$$n_0^+ = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (12)$$

mentre il numero medio di picchi al secondo si può esprimere come

$$n_p^+ = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (13)$$

Dai momenti spettrali derivano i parametri di banda α_n

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_{2n}}} \quad (14)$$

Si tratta di una famiglia di parametri legati alla larghezza di banda del processo il cui valore è sempre compreso fra zero e uno. Fra questi, il parametro α_2 è utile per quantificare la larghezza di banda di una PSD

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_4}} = \frac{n_0^+}{n_p^+} \quad (15)$$

Essendo equivalente al rapporto fra n_0^+ e n_p^+ , quando il suo valore è vicino a 1 significa che, in media, in ogni secondo di segnale il numero di attraversamenti dello zero con pendenza positiva è uguale al numero di picchi, una condizione verificata tipicamente nei segnali a banda stretta. Viceversa, $\alpha_2 \simeq 0$ è tipico dei segnali in banda larga, in cui sono presenti più massimi locali (positivi e negativi) che attraversamenti dello zero. Per questa caratteristica α_2 prende anche il nome di *fattore di irregolarità*.

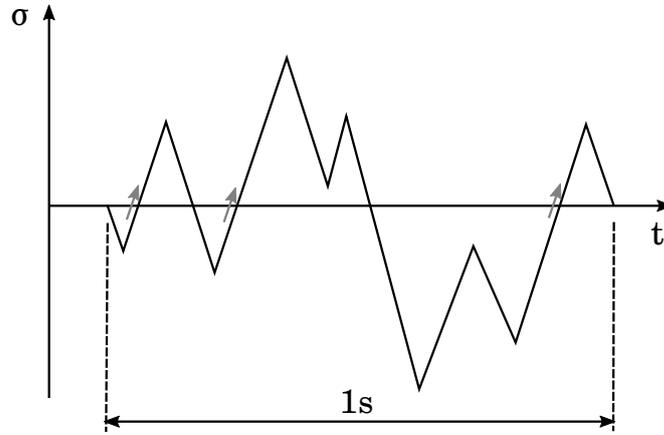


Figura 12: Numero medio di attraversamenti dello zero per secondo con pendenza positiva

Si ritiene utile concludere il paragrafo con alcune proprietà statistiche dei massimi e minimi locali di $x(t)$ che saranno utili nell'analisi della fatica stocastica, in particolare nel par.2.6.3 in cui si affronterà lo spettro ERS per eccitazioni random. Se $x(t)$ è gaussiana la densità di probabilità dei massimi locali si dimostra essere una combinazione di una variabile aleatoria gaussiana e una di Rayleigh [44]:

$$p_p(u) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} e^{-\frac{u^2}{2\lambda_0(1 - \alpha_2^2)}} + \frac{\alpha_2 u}{\lambda_0} e^{-\frac{u^2}{2\lambda_0}} \Phi\left(\frac{\alpha_2 u}{\sqrt{\lambda_0(1 - \alpha_2^2)}}\right) \quad (16)$$

in cui $\Phi(\cdot)$ è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria gaussiana e u indica un possibile valore di picco raggiunto da $x(t)$ (fig.13).

La corrispondente funzione di ripartizione è data da:

$$P_p(u) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda_0(1 - \alpha_2^2)}}\right) - \alpha_2 e^{-\frac{u^2}{2\lambda_0}} \Phi\left(\frac{\alpha_2 u}{\sqrt{\lambda_0(1 - \alpha_2^2)}}\right) \quad (17)$$

e indica la probabilità di osservare massimi locali inferiori o uguali al valore di soglia u all'interno del segnale.

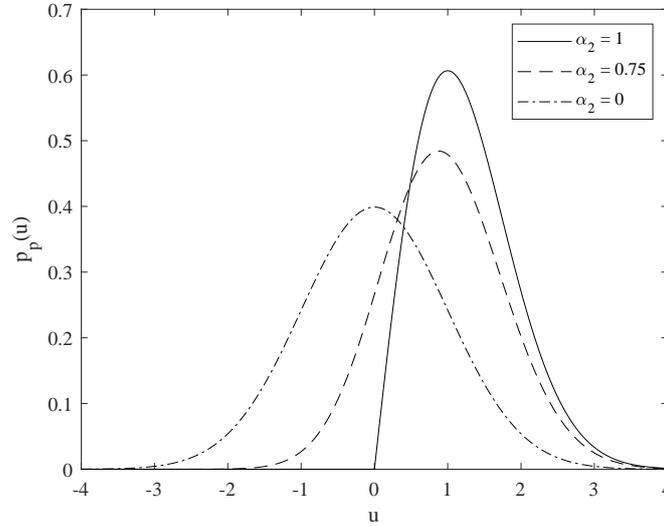


Figura 13: Distribuzione di probabilità dei massimi locali di un segnale: per $\alpha_2 = 0$ è una distribuzione gaussiana, per $\alpha_2 = 1$ è una distribuzione di Rayleigh [45]

Nel caso limite di processo aleatorio a banda stretta ($\alpha_2 = 1$) la distribuzione dei picchi si semplifica nella distribuzione di Rayleigh, definita solo per massimi locali che stanno sopra lo zero

$$p_p(u) = \frac{u}{\lambda_0} e^{-\frac{u^2}{2\lambda_0}} \quad u \geq 0 \quad (18)$$

La funzione di ripartizione della variabile aleatoria di Rayleigh è

$$P_p(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2\lambda_0}} \quad (19)$$

In un processo gaussiano i minimi locali seguono la stessa densità di probabilità dei massimi, quindi valgono anche per essi le stesse considerazioni viste per i picchi.

Dal confronto delle figure precedenti si osserva come un processo gaussiano a banda stretta presenti massimi locali tutti sopra la linea dello zero (cioè nessun picco negativo), al contrario di un processo a banda larga in cui i picchi possono essere sia al di sopra che al di sotto dell'asse delle ascisse.

Questa caratteristica è descritta anche dall'equazione (17) in cui la quota parte di massimi sotto lo zero è calcolabile come

$$P_p(0) = \frac{1 - \alpha_2}{2} \quad (20)$$

in cui si vede che la frazione è nulla per processi a banda stretta.

2.5 FORMULAZIONE STATISTICA DELL'ACCUMULO DEL DANNEGGIAMENTO

Il danneggiamento a fatica è legato non tanto a massimi e minimi locali della storia temporale, quanto piuttosto a ampiezza e valore medio dei cicli di sollecitazione. Nella fatica ad ampiezza variabile si usano algoritmi di conteggio per individuare i cicli, accoppiando picchi e valli secondo regole diverse a seconda del metodo scelto. Se la storia di carico è random, può essere descritta in termini statistici, e anche la distribuzione dei cicli può essere interpretata come una possibile realizzazione di un processo stocastico sottostante di cui è utile conoscere la distribuzione di probabilità.

Ipotizzando di conoscere le caratteristiche di resistenza a fatica del materiale, e la distribuzione statistica dei cicli di sollecitazione è possibile ottenere una stima della durata di un componente meccanico usando la legge di accumulo lineare del danno (4).

Se si indica con T la durata della sollecitazione, il danno accumulato è esprimibile sommando il danno arrecato da ciascun ciclo per il numero di cicli contati $N(T)$. Sostituendo la legge di Basquin, la regola di Palmgren-Miner si riscrive come [46]:

$$D(T) = \sum_{i=1}^{N(T)} d_i = \sum_{i=1}^{N(T)} \frac{1}{N_i} = \sum_{i=1}^{N(T)} \frac{\sigma_i^k}{C} \quad (21)$$

In un processo random l'ampiezza di sollecitazione σ di ogni ciclo è una variabile aleatoria la cui densità di probabilità dipende dal processo stesso ma anche dal metodo di conteggio impiegato. Di conseguenza anche il danno

$D(T)$ può essere modellato come una variabile aleatoria di cui risulta utile, dal punto di vista ingegneristico, riuscire a stimarne il valore atteso $E\{D(T)\}$:

$$E\{D(T)\} = E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} \frac{\sigma_i^k}{C}\right\} = \frac{1}{C} E\{N(T)\} E\{\sigma^k\} \quad (22)$$

Se il processo è stazionario si può sostituire $E\{N(T)\}$ con il numero medio di cicli al secondo n_a per la durata T espressa in secondi, e la precedente diventa:

$$D = \frac{n_a T}{C} \int_0^{+\infty} \sigma^k p_a(\sigma) d\sigma \quad (23)$$

in cui si è esplicitato l'operatore integrale della media: gli estremi di integrazione sono $[0, +\infty]$ perché si considera come danneggianti solo i cicli con ampiezza positiva.

$p_a(\sigma)$ è la distribuzione di probabilità delle ampiezze dei cicli, ed è legata alla distribuzione di probabilità dei massimi locali (16) ma dipende dal metodo di conteggio adottato. Come già accennato precedentemente, il metodo universalmente riconosciuto come il più affidabile è il rainflow: l'algoritmo però opera accoppiando massimi e minimi locali non sulla base della loro sequenza temporale, ma sulla base dei cicli di isteresi che provocano sul materiale. La complessità è tale che, ad oggi, non esistono formulazioni in forma chiusa per descrivere gli accoppiamenti, quindi anche una formulazione statistica della distribuzione delle ampiezze dei cicli individuati non è realizzabile. Le maggiori difficoltà incontrate nello sviluppo dei metodi spettrali risiedono in questa mancanza, per cui della distribuzione delle ampiezze dei cicli se ne può dare solo un'approssimazione più o meno aderente a quella osservabile applicando direttamente il conteggio rainflow.

Un'eccezione è rappresentata dalle sollecitazioni a banda stretta, in cui della distribuzione statistica delle ampiezze dei cicli se ne può dare una rappresentazione comparabile a quella ottenibile dal conteggio rainflow.

2.5.1 Formulazione narrowband

Per un processo a banda stretta ogni massimo locale è immediatamente seguito da un avvallamento che, con ragionevole approssimazione, è simmetrico

rispetto il valore medio del processo. Questa caratteristica fa sì che ad ogni alternanza picco-valle il conteggio rainflow individui un ciclo di isteresi, la cui ampiezza è pari al valore del picco considerato (vedi fig.14). Per questa particolarità è ragionevole assumere che la distribuzione statistica delle ampiezze dei cicli sia coincidente con la distribuzione dei massimi locali (18) e $n_a = n_p^+ = n_0^+$.

Sostituendo la (18) in (23) al posto di $p_a(\sigma)$ si giunge alla formulazione del criterio di danneggiamento narrowband (o criterio di Rayleigh):

$$D = \frac{n_0^+ T}{C} \left(\sqrt{2\lambda_0} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) \quad (24)$$

in cui $\Gamma(\cdot)$ è la funzione gamma di Eulero che si ottiene dalla soluzione dell'integrale dell'eq.23 e λ_0 è il momento zero calcolato sulla PSD delle tensioni nel punto più sollecitato. T è il tempo necessario per portare a rottura il componente, ovvero è il tempo necessario per raggiungere la soglia $D = 1$ in accordo alla regola di Miner.

Il criterio dà risultati comparabili con le previsioni ottenibili usando il conteggio rainflow e la legge di accumulo lineare, tuttavia è applicabile solo nel caso di sollecitazioni prettamente a banda stretta: diversi autori hanno evidenziato come il danno previsto sia largamente sovrastimato se applicato a processi a banda larga.

Nel seguito verranno illustrate brevemente alcune delle formulazioni introdotte nel tempo per correggere le previsioni e adattare il criterio al caso *wide band*.

2.5.2 Correzione di Wirsching e Light

Wirsching e Light [47] proposero un coefficiente correttivo da applicare al criterio narrowband per poterne estendere l'applicazione anche a sollecitazioni a banda larga, facendo in modo che il danneggiamento corretto potesse essere comparabile a quello derivante dal conteggio rainflow.

Chiamando D^{NB} il danneggiamento previsto con il criterio narrowband e D^{RF} quello derivante dal conteggio rainflow, il coefficiente correttivo ρ intro-

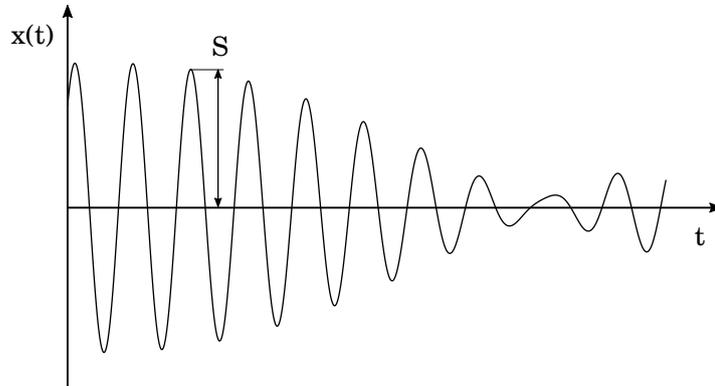


Figura 14: Segnale a banda stretta: l'ampiezza S di un ciclo è pari al valore del picco corrispondente

dotto risulta definito come

$$D^{RF} = \rho D^{NB} \quad (25)$$

e dipende dalla larghezza di banda della storia temporale delle tensioni e dalle caratteristiche della curva S-N:

$$\rho = A(k) + [1 - A(k)] \left(1 - \sqrt{1 - \alpha_2^2}\right)^{B(k)} \quad (26)$$

$A(k)$ e $B(k)$ sono parametri empirici funzione della pendenza della curva S-N

$$A(k) = 0.926 - 0.033k \quad B(k) = 1.587k - 2.323 \quad (27)$$

Questa correzione trova applicazione nella progettazione di saldature per costruzioni offshore, in cui k ha valori tipici attorno a 3 ma, in generale, è applicabile in tutti i casi in cui si può ritenere $k < 6$.

2.5.3 *Metodo di Dirlik*

Probabilmente è il metodo più conosciuto per la stima del danneggiamento wide band, per lungo tempo è stato considerato uno dei più affidabili e tuttora si trova implementato in diversi codici FEM commerciali.

Al contrario del metodo proposto da Wirsching e Light, che mira a correggere a posteriori il risultato del criterio narrowband, il metodo proposto da Dirlik [21] fornisce una formula analitica della distribuzione di probabilità delle ampiezze di tensione, che si ricaverebbero con il conteggio rainflow. In generale non è possibile conoscere a priori la vera forma della distribuzione, per cui Dirlik, sulla base di un'estesa campagna di simulazioni numeriche, ne ha proposto un'approssimazione combinando una variabile aleatoria esponenziale e due di Rayleigh:

$$p_a^{\text{DK}}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left[\frac{G_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + G_2 \frac{Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + G_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right] \quad (28)$$

in cui Z è l'ampiezza del generico ciclo normalizzata rispetto alla deviazione standard e x_m la frequenza media di applicazione, definiti dall'autore come:

$$Z = \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_0}}$$

$$x_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

I coefficienti G_i , R e Q risultano essere una combinazione di soli parametri che descrivono la distribuzione della PSD:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{2(x_m - \alpha_2^2)}{1 + \alpha_2^2} \\
G_2 &= \frac{1 - \alpha_2 - G_1 + G_1^2}{1 - R} \\
G_3 &= 1 - G_1 - G_2 \\
R &= \frac{\alpha_2 - x_m - G_1^2}{1 - \alpha_2 - G_1 + G_1^2} \\
Q &= \frac{1.25(\alpha_2 - G_3 - G_2 R)}{G_1}
\end{aligned} \tag{30}$$

Alla durata del componente meccanico si risale dalla formula seguente, ottenuta sostituendo $p_a^{DK}(\sigma)$ nella (23):

$$D^{DK} = \frac{T n_p^+}{C} \lambda_0^{\frac{k}{2}} \left[G_1 Q^k \Gamma(1+k) + 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (G_2 |R|^k + G_3) \right] \tag{31}$$

Nonostante l'accuratezza previsionale, il metodo comunque presenta degli inconvenienti. Innanzitutto la formulazione è stata ricavata dall'autore in modo empirico, cercando, per un'ampia casistica di sollecitazioni simulate numericamente, i coefficienti (30) che meglio adattavano la distribuzione (28) alla distribuzione ottenibile dal conteggio rainflow. Inoltre non tiene conto dell'influenza di una eventuale tensione media quindi, così come è definita, non è possibile utilizzarla per sollecitazioni non stazionarie, in cui la tensione media può mostrare variazioni.

2.6 EXTREME RESPONSE SPECTRUM (ERS)

Le vibrazioni possono portare alla rottura di un sistema meccanico attraverso diversi processi, in particolare:

- il ripetersi del superamento del valore limite di resistenza del materiale (tensione limite di snervamento per materiali duttili, tensione di rottura per materiali fragili). È il meccanismo della fatica oligociclica
- l'accumulo del danneggiamento per fatica meccanica, quando le tensioni rimangono all'interno del campo elastico (fatica ad alto numero di cicli).

Lalanne, nello sviluppo della teoria dei test accelerati [4], per quantificare il contributo dato al danneggiamento da questi due fattori introduce due strumenti: l'Extreme Response Spectrum (talvolta denominato anche Maximum Response Spectrum) e il Fatigue Damage Spectrum.

In questo paragrafo verrà descritto il primo, a sua volta derivato per analogia dallo Shock Response Spectrum, uno spettro normalmente utilizzato per quantificare il contributo danneggiante di urti.

La trattazione si basa sull'ipotesi che il sistema meccanico oggetto di studio possa essere schematizzato come un sistema a singolo grado di libertà eccitato alla base in cui le tensioni, nel punto più sollecitato, possono essere considerate legate da una costante allo spostamento relativo massa-base:

$$\sigma(t) = \bar{C}z(t) \quad (32)$$

Nell'eq. precedente \bar{C} è la costante che lega la tensione σ allo spostamento relativo z .

L'ERS è definito come la curva che rappresenta il massimo spostamento relativo raggiunto da un sistema SDOF in funzione della propria frequenza naturale, quando l'eccitazione alla base è l'accelerazione misurata nell'ambiente operativo del componente meccanico. È la stessa definizione dello Shock Response Spectrum (fig.15) con la differenza che l'eccitazione della base non è un urto. Per analogia allo SRS si è soliti trasformare il massimo spostamento relativo nella massima accelerazione corrispondente, quindi l'ERS ha le dimensioni di un'accelerazione.

Nel seguito verranno illustrati più in dettaglio diversi procedimenti analitici di calcolo dell'ERS a seconda della natura della risposta del sistema.

2.6.1 *Eccitazione e risposta sinusoidali*

Si consideri il sistema a singolo grado di libertà di fig.16 in cui alla base è applicata un'accelerazione sinusoidale $\ddot{x}(t)$ di frequenza f e ampiezza \ddot{x}_a :

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_a \sin(2\pi ft) \quad (33)$$

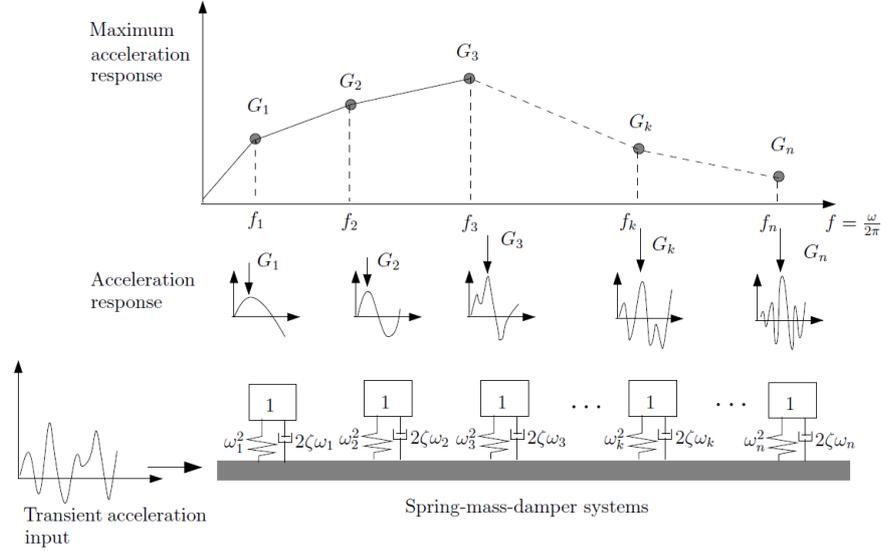


Figura 15: Shock Response Spectrum (da ref.[14])

Con $z(t)$ si indichi lo spostamento relativo della massa rispetto la base:

$$z(t) = y(t) - x(t) \quad (34)$$

La funzione di trasferimento che lega l'accelerazione della base allo spostamento relativo della massa è una funzione complessa di ampiezza [48]:

$$|H_{\ddot{x}z}| = \left[(2\pi f_n)^2 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{f}{f_n}\right)^2} \right]^{-1} \quad (35)$$

in cui f_n rappresenta la frequenza di risonanza del sistema e ζ il fattore di smorzamento modale.

L'ERS è la curva che si ottiene prendendo solo il massimo raggiunto da $z(t)$ in funzione della frequenza naturale, mantenendo costante il fattore di smorzamento. La relazione analitica si ottiene moltiplicando la funzione di trasferimento precedente per l'ampiezza dell'eccitazione:

$$z_a(f_n) = |H_{\ddot{x}z}(f_n)| \ddot{x}_a \quad (36)$$

Infine, per ottenere un parametro dimensionalmente equivalente a un'accelerazione la (36) viene scritta come:

$$ERS = (2\pi f_n)^2 z_a(f_n) = (2\pi f_n)^2 |H_{\ddot{x}_z}(f_n)| \ddot{x}_a \quad (37)$$

In fig.17 è riportato un esempio di grafico di ERS per eccitazione sinusoidale.

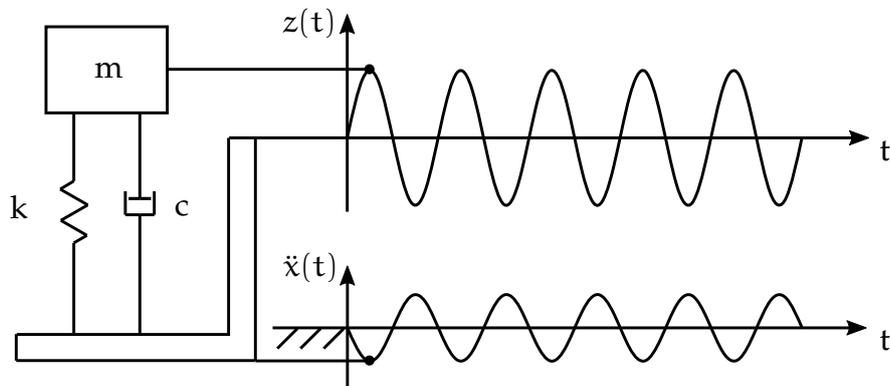


Figura 16: Spostamento relativo per un sistema SDOF

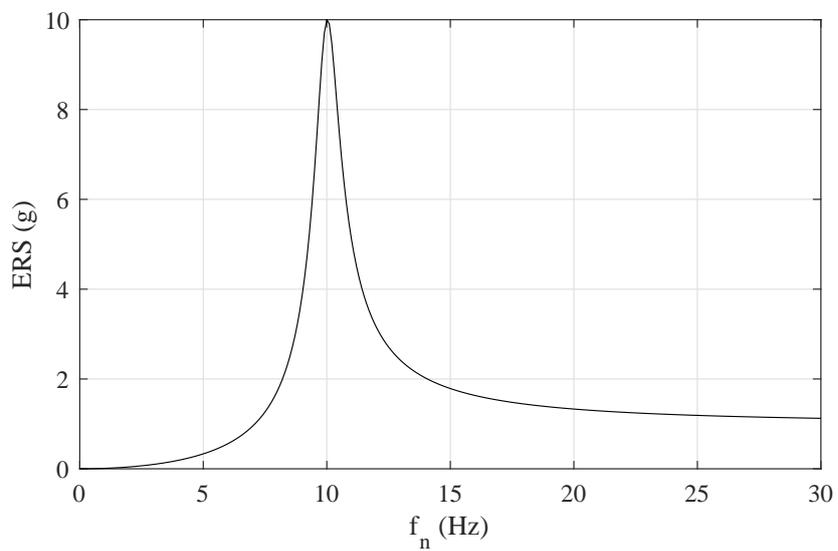


Figura 17: ERS per eccitazione sinusoidale con ampiezza 1g e frequenza 10Hz. Il sistema SDOF ha fattore di smorzamento $\zeta = 0.05$

2.6.2 *Swept sine*

L'ERS nel caso di swept sine corrisponde all'involuppo degli ERS del precedente caso di eccitazione a frequenza costante lungo tutto l'intervallo di frequenze interessato dallo sweep (fig.18).

Lo spettro ha andamento crescente fino alla frequenza f_1 di inizio sweep, si mantiene costante fino alla frequenza di fine sweep f_2 e decresce con andamento asintotico al valore di ampiezza dell'eccitazione \ddot{x}_a .

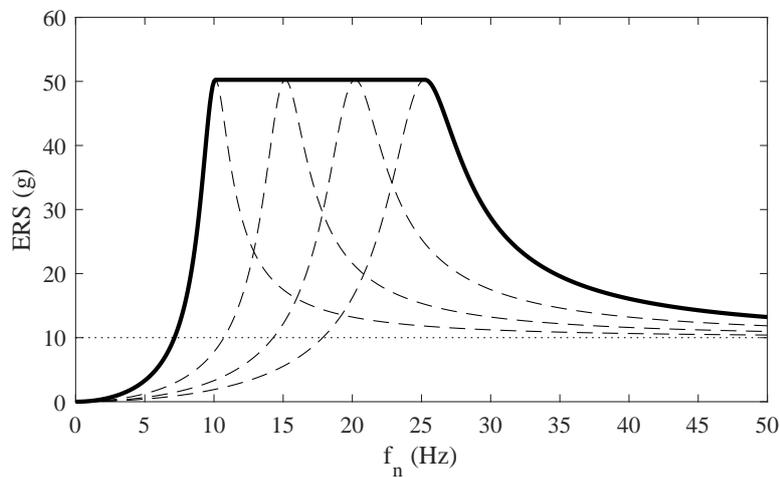


Figura 18: L'ERS per eccitazione swept sine è l'involuppo degli ERS delle eccitazioni a frequenza costante. In figura è riportato un esempio per sweepata da 10 a 25Hz con ampiezza 10g. Il sistema SDOF ha fattore di smorzamento $\zeta = 0.1$

Analiticamente, i tre tratti distinti sono descritti da:

$$\text{ERS} = z_a(f_n) (2\pi f_n)^2 = \begin{cases} \ddot{x}_a \left[\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f_1}{f_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{f_1}{f_n}\right)^2} \right]^{-1} & , f_n \leq f_1 \\ \frac{\ddot{x}_a}{2\zeta} & , f_1 < f_n < f_2 \\ \ddot{x}_a \left[\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f_2}{f_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{f_2}{f_n}\right)^2} \right]^{-1} & , f_n \geq f_2 \end{cases} \quad (38)$$

2.6.3 Eccitazione e risposta random

Rispetto ai casi precedenti la definizione dell'ERS per vibrazioni random è più interessante poiché trova applicazione diretta nella sintesi dei test accelerati con profilo random che possono essere realizzati su tavola vibrante.

A causa della natura random però la definizione di massimo dello spostamento relativo non è univoca [4]: nel seguito si farà riferimento al massimo come al più grande valore della risposta $z(t)$ in media in un tempo T .

Nel caso più generale l'eccitazione misurata nell'ambiente di lavoro del componente meccanico su cui si vuole realizzare un test accelerato è random non stazionaria, per cui anche la risposta avrà la stessa natura. L'unico modo per ricavare l'ERS è applicare la funzione di trasferimento accelerazione-spostamento relativo per un sistema a singolo grado di libertà alla storia temporale di eccitazione misurata. La funzione di trasferimento si comporta da filtro in frequenza in cui guadagno e banda passante sono funzione dei parametri f_n e ζ scelti. Scelto un valore per il fattore di smorzamento, spesso dettato dall'esperienza, all'ERS si risale applicando in modo ricorsivo la funzione di trasferimento impostando di volta in volta il valore di frequenza naturale da riportare in ascissa nel grafico. L'ordinata si ottiene, in modo analogo ai precedenti casi di eccitazione deterministica, selezionando solo il massimo di spostamento relativo raggiunto dal sistema nella durata T del se-

gnale acquisito e moltiplicandolo per $(2\pi f_n)^2$ per ottenere l'unità di misura di un'accelerazione.

Nel caso più specifico di eccitazione stazionaria gaussiana l'ERS può essere previsto analiticamente applicando le statistiche degli estremi locali illustrate nel par.2.4.1 allo spostamento relativo $z(t)$. Se il sistema è poco smorzato la risposta è a banda stretta, quindi il numero medio di passaggi al secondo oltre un certo valore di soglia a si dimostra essere esprimibile come:

$$n_a^+ = n_0^+ e^{-a^2/(2z_{rms}^2)} \quad (39)$$

In un segnale di durata T il numero totale di passaggi della soglia a con pendenza positiva diventa:

$$N_a^+ = T n_0^+ e^{-a^2/(2z_{rms}^2)} \quad (40)$$

Il picco di spostamento più elevato durante il tempo T è quello che oltrepassa la soglia a una sola volta:

$$N_a^+ = 1 \quad (41)$$

$$e^{-a^2/(2z_{rms}^2)} = \frac{1}{n_0^+ T} \quad (42)$$

ovvero è il picco che raggiunge la soglia:

$$a = z_{rms} \sqrt{2 \ln(n_0^+ T)} \quad (43)$$

in cui il valore RMS di spostamento relativo si ricava, in funzione della PSD di eccitazione $G_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)$ e della frequenza naturale considerata, dalla seguente [49]:

$$z_{rms}(f_n) = \left(\int_0^{+\infty} |H_{\ddot{x}z}(f_n)|^2 G_{\ddot{x}\ddot{x}}(f) df \right)^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

Nuovamente, l'ERS si ottiene moltiplicando il valore di soglia calcolato per $(2\pi f_n)^2$, al variare della frequenza naturale f_n :

$$\text{ERS} = \alpha (2\pi f_n)^2 \quad (45)$$

La figura 19 riporta un esempio di calcolo dell'ERS per un sistema eccitato con un rumore bianco in banda limitata fra 200 e 1000Hz: la risposta del sistema è in banda stretta perché lo smorzamento ha valore $\zeta = 2\%$ e α_2 è sempre vicino a 1 per tutti i valori di frequenza naturale presi in considerazione.

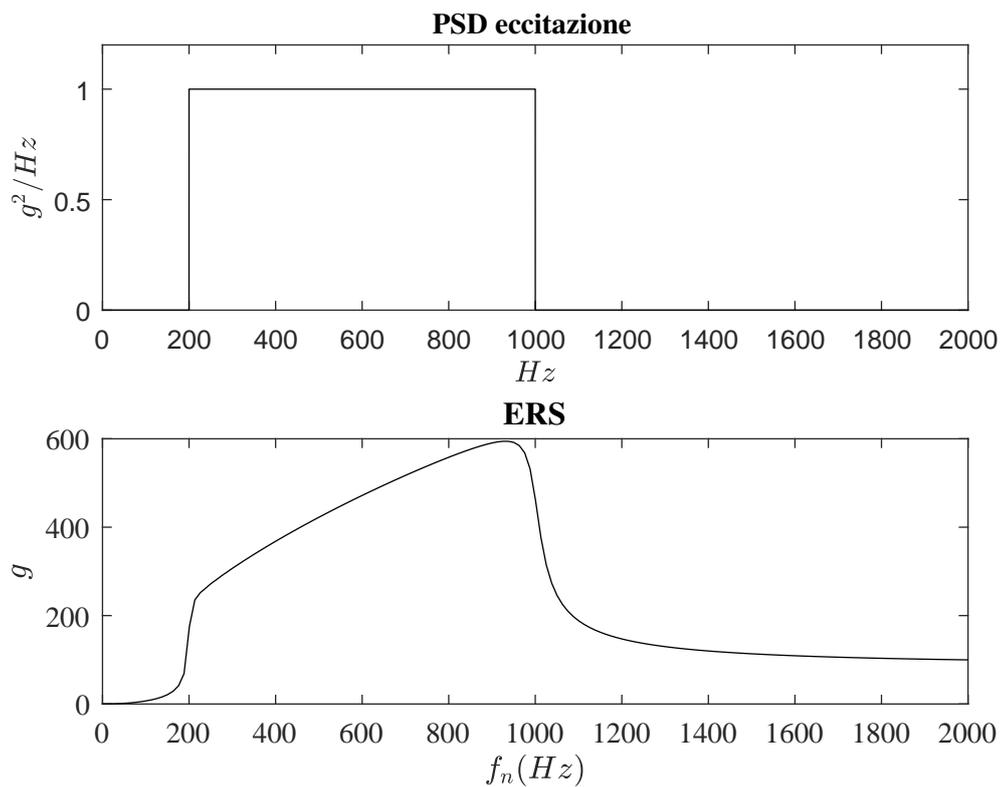


Figura 19: ERS per risposta random gaussiana a banda stretta. L'eccitazione è un rumore bianco nella banda 200-1000Hz, il sistema SDOF ha fattore di smorzamento $\zeta = 0.02$

2.7 FATIGUE DAMAGE SPECTRUM (FDS)

Mentre l'ERS, partendo dallo studio della massima elongazione del sistema a un grado di libertà, è utile per quantificare le tensioni massime in un componente meccanico [50], l'FDS ne quantifica il danneggiamento accumulato per fatica, come sempre al variare della frequenza di risonanza e per fissato fattore di smorzamento. Le ipotesi alla base sono quelle già illustrate nel corso del capitolo: curva S-N del materiale approssimabile con la legge di Basquin (eq.2) e accumulo del danno descrivibile dalla regola di Miner (eq.4). Inoltre tensioni e spostamento relativo del sistema a un grado di libertà possono essere considerate proporzionali (eq.32).

Come per la trattazione dell'ERS, verranno affrontati diversi casi di calcolo a seconda della natura della risposta del sistema.

2.7.1 *Eccitazione e risposta sinusoidali*

Nella trattazione dell'ERS, l'(eq.36) ha permesso di calcolare l'ampiezza dello spostamento sinusoidale della massa del sistema rispetto alla base quando alla base è imposta un'accelerazione. Il danno accumulato dal sistema dipende dall'ampiezza della tensione, che è proporzionale all'ampiezza dello spostamento relativo, e dal numero di cicli applicati.

Usando la regola di Miner (eq.4):

$$D = \frac{n}{N} = \frac{n}{C} \sigma^k \quad (46)$$

Se f è la frequenza dell'eccitazione il numero di cicli applicati in T secondi è semplicemente $n = fT$. Ricordando che \bar{C} è la costante che lega tensioni e spostamento, il danno totale accumulato diventa:

$$FDS = D = \frac{fT}{C} (\bar{C}z_a(f_n))^k \quad (47)$$

La figura 20 riporta l'andamento del Fatigue Damage Spectrum al variare della frequenza naturale del sistema a singolo grado di libertà. Il danno accumulato raggiunge il massimo quando la frequenza naturale uguaglia la frequenza di eccitazione, ovvero in condizioni di risonanza di ampiezza.

Poiché rappresenta un danneggiamento accumulato nel tempo, l'FDS è una quantità adimensionale. È prassi rappresentarne il grafico in scala logaritmica viste le grandi variazioni del parametro al variare della frequenza di risonanza.

2.7.2 Swept sine

Nel caso di eccitazione swept sine la tensione varia nel tempo seguendo anch'essa un profilo sinusoidale a frequenza variabile ma è legata all'accelerazione imposta alla base dalla costante \bar{C} e dalla funzione di trasferimento (eq.35).

In questo caso, visto che la variazione dell'eccitazione è continua e non avviene a blocchi di carico, la regola di Palmgren-Miner (eq.4) si riscrive in forma integrale:

$$D = \int_0^T \frac{dn}{N} = \int_0^T \frac{\sigma(t)^k}{C} dn \quad (48)$$

in cui T è la durata dello sweep e $\sigma(t)$ l'ampiezza della tensione istantanea.

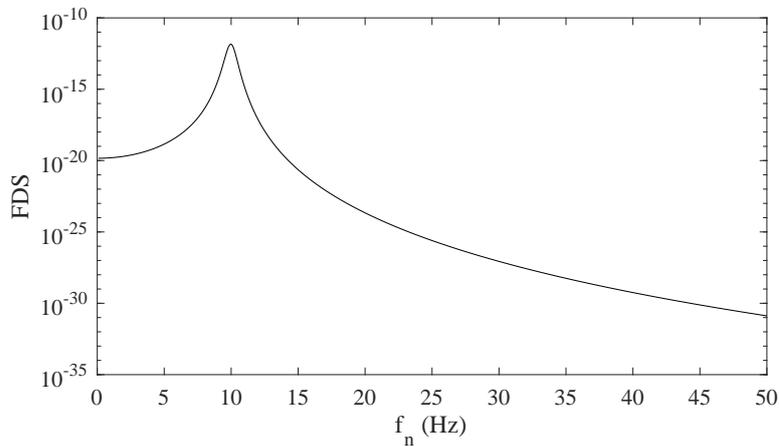


Figura 20: FDS per eccitazione e risposta sinusoidale: il massimo è raggiunto quando la frequenza naturale del sistema SDOF uguaglia la frequenza di eccitazione. Nell'esempio l'eccitazione ha ampiezza 1g, frequenza 10Hz e durata 1s, il sistema SDOF fattore di smorzamento $\zeta = 0.05$, $\bar{C} = C = 1$ e $k = 8$

In uno swept sine la frequenza della risposta varia nel tempo ed è esprimibile come numero di cicli compiuti in un intervallo temporale dt :

$$f(t) = \frac{dn}{dt} \quad (49)$$

Sostituendo nella precedente ed esplicitando la dipendenza della tensione dallo spostamento relativo:

$$FDS = D = \int_0^T \frac{(\bar{C}z_a(t))^k}{C} f(t) dt = \frac{\bar{C}^k}{C} \int_0^T (|H_{\ddot{x}z}(f_n)| \ddot{x}_a)^k f(t) dt \quad (50)$$

La fig.21 riporta un esempio di FDS ottenuto per uno swept sine lineare di accelerazione applicato alla base del sistema a un grado di libertà

2.7.3 Eccitazione e risposta random

Come visto per l'ERS la trattazione del caso di eccitazione stocastica complica l'applicazione del metodo.

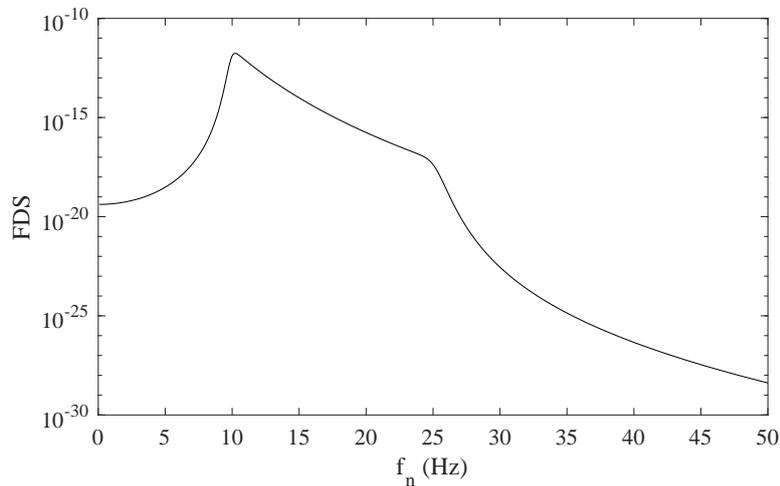


Figura 21: FDS per eccitazione swept sine. Nell'esempio l'eccitazione ha ampiezza $1g$, frequenza di inizio e fine sweep rispettivamente 10 e 25Hz, durata 60s, il sistema SDOF fattore di smorzamento $\zeta = 0.05$, $\bar{C} = C = 1$ e $k = 8$

Occorre distinguere il caso più generale di risposta del sistema non gaussiana e non stazionaria dal caso più semplice analiticamente di risposta gaussiana stazionaria. Nel primo caso l’FDS va ricavato per applicazione successiva della storia temporale di un filtro in frequenza in cui la frequenza naturale può essere variata a piacere in un intervallo scelto. Il danno accumulato dal sistema a singolo grado di libertà si ottiene dal conteggio rainflow della risposta $z(t)$ ottenuta per ogni frequenza naturale indagata. La figura 22 riporta uno schema della procedura.

Al contrario, se la risposta del sistema può essere ritenuta gaussiana l’FDS può essere facilmente descritto analiticamente ricorrendo alle formulazioni illustrate nel paragrafo 2.5.

In particolare se la risposta è a banda stretta l’FDS è descrivibile in forma chiusa ricorrendo al criterio di danneggiamento di Rayleigh. Esplicitando la dipendenza della tensione dallo spostamento relativo la (eq.24) diventa:

$$D = \frac{n_0^+ T}{C} \bar{C}^k \left(\sqrt{2} z_{rms} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) \tag{51}$$

poiché si dimostra che anche i valori RMS di tensione e spostamento relativo sono legati dalla stessa costante \bar{C} .

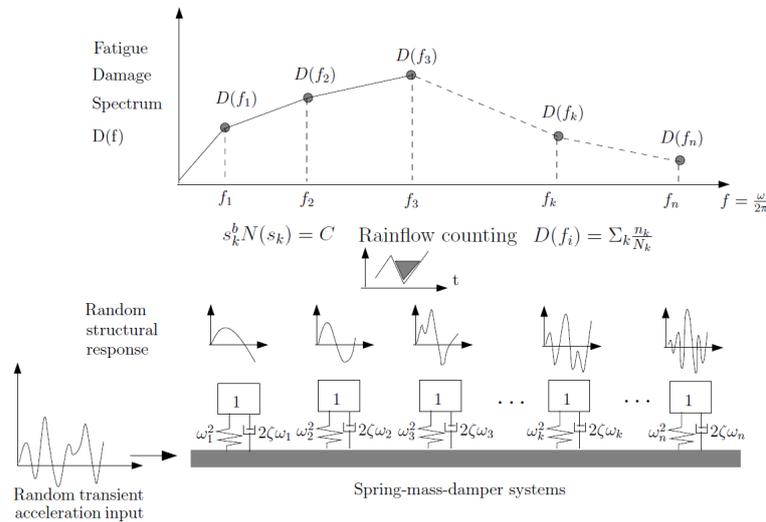


Figura 22: Procedura generale per il calcolo dell’FDS nel caso di eccitazione random (da ref.[14])

Il Fatigue Damage Spectrum si ricava in forma chiusa esplicitando l'RMS della risposta $z(t)$ in funzione della frequenza naturale considerata (eq.44).

Il caso di risposta gaussiana a banda larga si affronta alla stessa maniera, adottando al posto del criterio narrowband una delle formulazioni wide band reperibili in letteratura, ad esempio (eq.25) o (eq.31), e ripetendo il calcolo del danno accumulato per i valori di frequenza naturale desiderati.

Di fatto, l'FDS per eccitazioni stocastiche è un criterio di resistenza per sollecitazioni random riformulato in funzione delle possibili frequenze naturali del sistema a un grado libertà che sta alla base di tutta la modellazione.

2.8 INVERSE POWER LAW

L'inverse power law, già introdotta nel capitolo 1, è la legge che lega le eccitazioni alla base del sistema a un grado di libertà, utilizzata per sintetizzare l'eccitazione in un test vibrazionale accelerato.

La tensione gaussiana stazionaria che porta a rottura un componente meccanico sia nota in valore RMS (la si indichi con $\sigma_{rms,1}$) e il tempo per arrivare a rottura sia T_1 : il problema fondamentale dei test accelerati è trovare la sollecitazione $\sigma_{rms,2}$ per testare il componente nel tempo $T_2 < T_1$. La schematizzazione da utilizzare è quella del sistema a un grado di libertà in cui lo smorzamento tipicamente assume valori bassi, per cui è giustificabile ritenere che la risposta del sistema sia a banda stretta. Sotto queste ipotesi per entrambe le sollecitazioni è applicabile il criterio di danneggiamento narrowband (eq.24). A rottura completa il danno raggiunto è unitario in entrambi i casi e quindi si può scrivere l'uguaglianza:

$$1 = \frac{n_0^+ T_1}{C} \left(\sqrt{2} \sigma_{rms,1} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) = \frac{n_0^+ T_2}{C} \left(\sqrt{2} \sigma_{rms,2} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) \quad (52)$$

Quando un sistema ha risposta a banda stretta è ragionevole assumere $n_0^+ = f_n$, per cui la precedente equazione si semplifica in:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\sigma_{rms,2}}{\sigma_{rms,1}} \right)^k \quad (53)$$

o, facendo ricorso alla proporzionalità fra tensioni e spostamento relativo:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{z_{rms,2}}{z_{rms,1}} \right)^k \quad (54)$$

La precedente è l'equazione che permette di accorciare la durata di un test quando è noto lo spostamento della massa rispetto la base nella schematizzazione a singolo grado di libertà di un componente meccanico. È una relazione analiticamente esatta in cui le uniche approssimazioni che entrano in causa sono le stesse illustrate per il criterio di danneggiamento di Rayleigh.

Lo spostamento relativo tuttavia non è una grandezza misurabile nella pratica perché il suo utilizzo è giustificato dalla semplificazione a un solo grado di libertà. L'inverse power law, per poter avere una valenza più pratica, fa uso di una ulteriore ipotesi semplificativa, considerando il valore RMS dello spostamento relativo linearmente proporzionale al valore RMS di accelerazione imposto alla base del sistema. Sotto questa ipotesi si ritrova la formulazione dell'inverse power law introdotta nel primo capitolo:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\ddot{x}_{rms,2}}{\ddot{x}_{rms,1}} \right)^k \quad (55)$$

L'esponente b dell'eq.1 è diverso dall'esponente k utilizzato fino a qui per tenere conto della semplificazione introdotta. Maggiori dettagli saranno illustrati nel cap.5.

2.9 SINTETIZZAZIONE DELLA PSD DI ECCITAZIONE

Il problema affrontato in questo paragrafo è quello di trovare l'eccitazione da realizzare in laboratorio in un test accelerato nota l'eccitazione misurata sul componente nel suo ambiente di lavoro, facendo in modo che la vibrazione sintetizzata abbia lo stesso potenziale danneggiante della vibrazione reale nonostante il tempo di test sia di gran lunga inferiore alla vita reale del componente. Nei precedenti paragrafi si sono introdotti alcuni strumenti matematici che vengono in aiuto quando si tratta di trovare il miglior profilo di vibrazione adatto ai test.

Indicando con \ddot{x}_{rms}^{real} il livello RMS di eccitazione misurato nell'ambiente di lavoro, T^{real} e T^{test} rispettivamente la vita attesa del componente e la durata

desiderata del test accelerato, la (eq.55) permette di trovare il valore RMS che deve avere l'eccitazione da replicare con uno shaker:

$$\ddot{x}_{\text{rms}}^{\text{test}} = \ddot{x}_{\text{rms}}^{\text{real}} \left(\frac{T^{\text{real}}}{T^{\text{test}}} \right)^{1/k} = \sqrt{\int_0^{+\infty} G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{test}}(f) df} \quad (56)$$

in cui $G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{test}}(f)$ è il profilo di PSD da realizzare in laboratorio. La (eq.56) da sola non è sufficiente a definire il profilo desiderato: esistono infinite PSD che possono dare il valore RMS cercato. Le vecchie normative in tema di test accelerati suggerivano di tracciare un profilo con linee spezzate attorno la PSD dell'eccitazione misurata, in modo che il valore RMS della spezzata fosse comparabile con quello cercato (fig.23). Tuttavia è un modo di procedere che lascia ampia libertà di manovra perché l'operazione di tracciamento della curva è assolutamente soggettiva, in cui entra in gioco l'esperienza di chi esegue test accelerati e come tale è incline a errori, perché si può incorrere in profili di eccitazione che portano a sotto-testare la durata del componente [5]. Inoltre il profilo va tracciato sulla PSD di una eccitazione che non è detto essere l'unica eccitazione che interviene nella vita del componente: altri eventi affaticanti potrebbero essere, ad esempio, il trasporto e il montaggio del materiale, e la vibrazione sintetizzata finale (gaussiana e stazionaria) deve poter essere significativa di tutte le fasi della vita del prodotto.

Per ovviare al problema la via preferibile è quella che fa uso degli spettri ERS e FDS come indicatori della qualità della PSD tracciata (fig.24). Per ogni possibile evento che potrebbe verificarsi durante il normale funzionamento ne vengono calcolati l'FDS, che ne quantifica il potenziale danneggiante, e l'ERS, che ne quantifica invece la massima tensione causata. La somma di tutti gli FDS dei singoli eventi è l'FDS che deve avere anche la vibrazione sintetizzata per poter avere lo stesso effetto danneggiante di tutti gli eventi (i danneggiamenti si sommano, in accordo alla regola di Miner). L'ERS totale invece si ricava dall'involuppo dei singoli ERS perché, essendo l'ERS un indicatore della massima tensione agente nel sistema a singolo gradi libertà della schematizzazione, ci si vuole assicurare che tutte le tensioni di picco causate da ogni evento siano tenute in considerazione, evitando problemi di under-test.

Il profilo di PSD del test si può ricavare ancora dall'involuppo di una PSD di una misurazione sperimentale ritenuta significativa, e a posteriori verificare che l'FDS associato sia comparabile all'FDS somma e l'ERS maggiore di

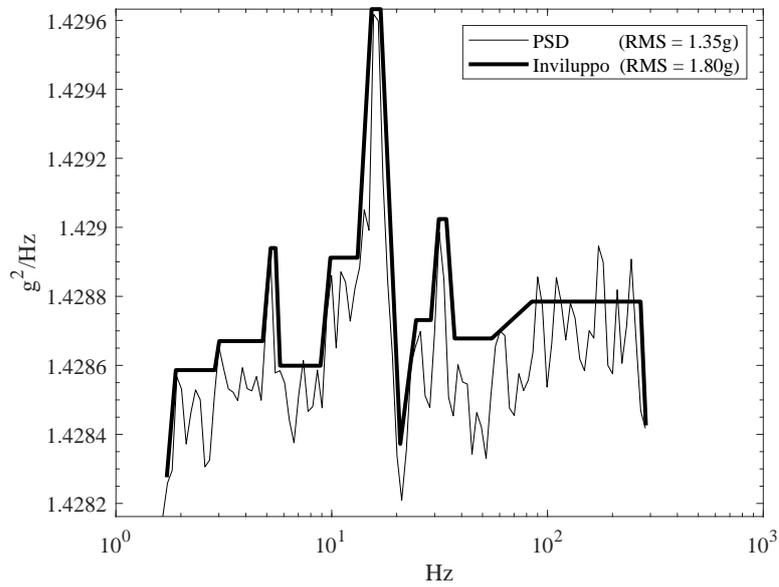


Figura 23: Involuppo di un profilo di PSD

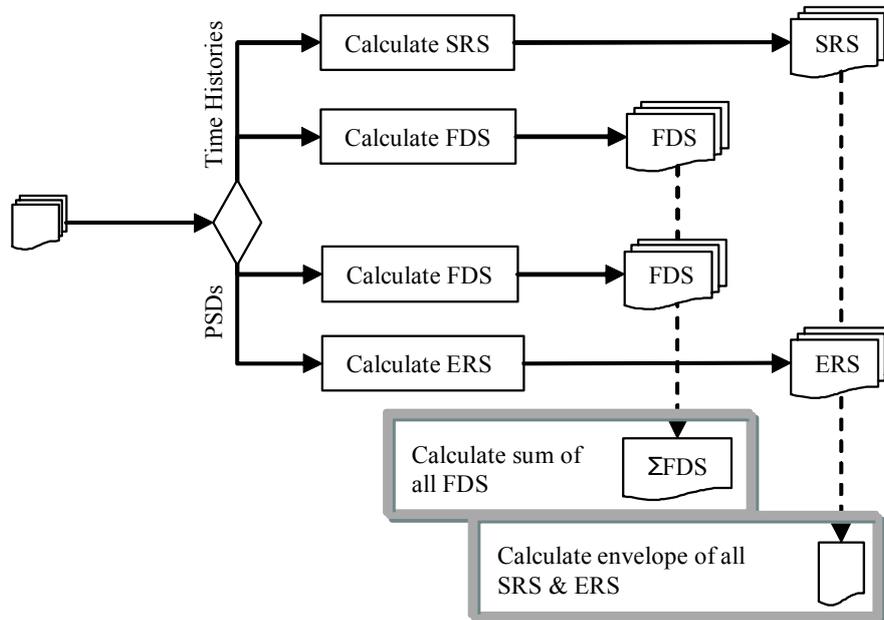


Figura 24: Schema di sintesi della PSD di eccitazione per un test accelerato (da ref.[50])

quello dell'involuppo [50]. Matematicamente si tratta di risolvere il seguente problema di ottimizzazione vincolata in cui l'incognita è la PSD $G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{test}}(f)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\int_0^{+\infty} G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{test}}(f) df} = \sqrt{\int_0^{+\infty} G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{real}}(f) df} \left(\frac{T^{\text{real}}}{T^{\text{test}}} \right)^{1/k} \\ \text{FDS} \left(G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{test}}(f) \right) = \sum_i \text{FDS} \left(G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{(i)}(f) \right) \\ \text{ERS} \left(G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{\text{test}}(f) \right) > \text{ENV} \left(\text{ERS} \left(G_{\ddot{x}\ddot{x}}^{(i)}(f) \right) \right) \end{array} \right. \quad (57)$$

Alternativamente, se il sistema in oggetto ha risposta in banda stretta, si può trovare analiticamente il profilo di PSD cercato invertendo la definizione dell'FDS (eq.51).

SISTEMA SPERIMENTALE

In questo capitolo verrà descritto il sistema di prova messo a punto presso l'Università di Ferrara utilizzando lo shaker elettrodinamico triassiale DongLing a disposizione. I test condotti hanno avuto come fine la verifica dell'inversa power law precedentemente illustrata utilizzando provini di acciaio montati a sbalzo: la legge è stata oggetto di un'intensa campagna sperimentale sia con eccitazioni monoassiali, sia biassiali. In entrambi i casi l'eccitazione imposta è stata un rumore bianco a banda larga la cui banda in frequenza era centrata sulla frequenza di risonanza del primo modo flessionale del provino integro, così da mantenere la struttura in condizioni di risonanza durante tutta la durata dei test. La geometria di provino studiata è stata mutuata da geometrie simili reperibili in letteratura [31, 51] ed è stata oggetto di un'accurato studio agli elementi finiti prima di essere realizzata per valutarne il comportamento dinamico nelle varie condizioni di carico indagate.

3.1 CARATTERISTICHE DELLO SHAKER TRIASSIALE

La macchina a disposizione dell'Università di Ferrara (fig.25) è uno shaker elettrodinamico DongLing, in grado di esercitare 10kN di forza simultaneamente su ogni asse nella banda 5-2000Hz. La tabella 1 riporta i dati di targa della macchina. I tre shaker ortogonali sono collegati fra loro da un cuscinetto a lubrificazione forzata che ne garantisce il disaccoppiamento degli assi.

Il sistema di controllo attualmente impiegato è rappresentato da un sistema Siemens SCADAS Mobile equipaggiato con un modulo DAC4 per pilotare le tre uscite analogiche richieste dallo shaker e una scheda di acquisizione V8 in grado di acquisire fino a 8 canali contemporaneamente (tre dei quali sono impegnati per il controllo in retroazione della tavola quando si effettuano test



(a)

Figura 25: Shaker DongLing 3ES-10-HF

Tabella 1: Caratteristiche dello shaker triassiale

Modello	Forza massima	Velocità massima	Spostamento massimo (peak to peak)	Dimensione head expander
3ES-10-HF	10 kN	1.2 m/s	38 mm	500 mm

in ciclo chiuso).

Il sistema di controllo sviluppato da Siemens è in grado di pilotare i tre gradi di libertà dello shaker nelle modalità:

- MIMO Random: per controllare i tre movimenti in modalità random gaussiano, impostando la PSD di ogni asse e il grado di mutua correlazione
- MIMO Sine: per controllare i movimenti in modalità swept sine
- MIMO Time Waveform Replication: per replicare sui tre assi un segnale temporale di vibrazione.

3.1.1 Controllo MIMO dello shaker triassiale

Nei test a ciclo chiuso tutti e tre gli assi devono essere pilotati in contemporanea e la vibrazione della tavola monitorata in tempo reale attraverso una strategia di controllo in retroazione (fig.26). Il seguente paragrafo vuole solo fornire alcune nozioni di base della strategia di controllo random Multi-Input Multi-Output (nel seguito abbreviata MIMO) necessaria alla comprensione del set-up sperimentale dei test descritti nel capitolo successivo. Per maggiori approfondimenti si rimanda a letteratura specializzata, ad esempio [52, 53, 54].

Al contrario di un usuale test random con tavola vibrante monoassiale, in cui è sufficiente fornire al controllore un solo profilo di PSD, in un test multiassiale è necessario specificare una PSD per ogni asse controllato e anche le corrispondenti cross-PSD, per definire il grado di correlazione fra le eccitazioni. PSD e cross-PSD compongono una matrice che il controllore prende come riferimento per generare i segnali di pilotaggio dei singoli shaker: durante il processo i segnali di pilotaggio sono continuamente corretti in base al feedback dell'accelerometro di controllo posizionato sulla tavola.

Per comprendere la strategia di controllo MIMO si consideri, facendo una trattazione generale, un sistema costituito da m input (ad es. m shaker da pilotare) e l output (l canali accelerometrici di controllo). Gli input vengono raggruppati nel vettore $U(f)$ definito nel dominio delle frequenze, e gli out-

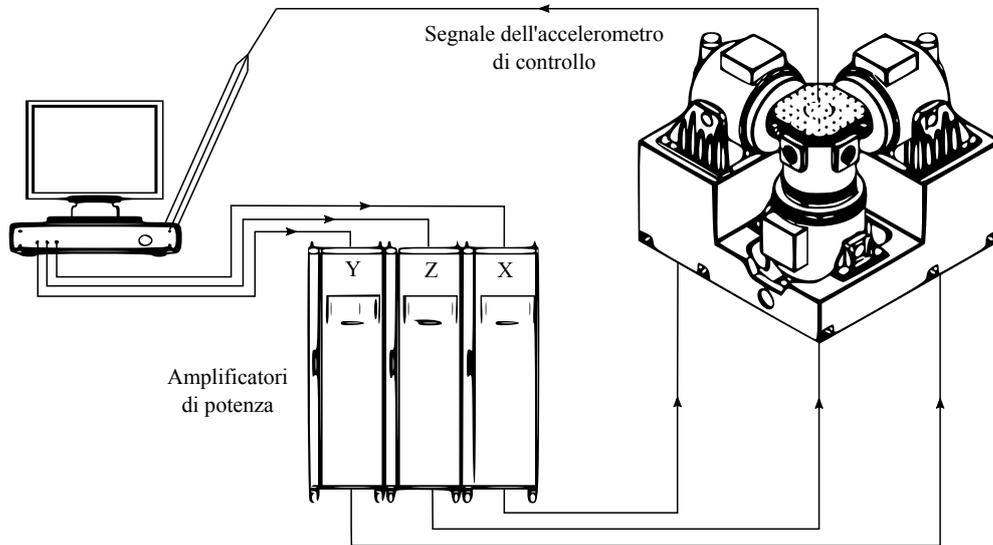


Figura 26: Controllo in ciclo chiuso dello shaker triassiale

put nel vettore $Y(f)$. La matrice di trasferimento $H(f)$ ha dimensione $l \times m$ e collega input e output secondo la relazione lineare:

$$Y(f) = H(f)U(f) \quad (58)$$

o in alternativa, in termini di PSD:

$$S_{yy} = HS_{uu}H^* \quad (59)$$

in cui H^* denota la matrice trasposta complessa coniugata di H e S_{yy} e S_{uu} sono matrici quadrate, rispettivamente di dimensioni $l \times l$ e $m \times m$.

Nel controllo di un sistema di test MIMO l'utente imposta la matrice di output desiderata in frequenza e il controllo deve produrre i segnali di pilotaggio nel tempo per muovere gli shaker. La matrice di input, che contiene le PSD e cross-PSD con cui generare i segnali temporali, si ricava invertendo l'equazione precedente:

$$S_{uu} = H^{-1}S_{yy} \left(H^{-1} \right)^* \quad (60)$$

Per passare ai segnali di pilotaggio nel tempo si applica alla matrice definita dall'utente S_{yy} la fattorizzazione di Cholesky, che la spezza nel prodotto di una matrice triangolare inferiore per una triangolare superiore. Si dimostra che S_{yy} per essere fisicamente consistente deve essere hermitiana definita positiva, pertanto la fattorizzazione di Cholesky produce due matrici $l \times l$ di cui la triangolare superiore è la complessa coniugata della triangolare inferiore:

$$S_{yy} = LL^* \quad (61)$$

Si può dimostrare che la trasformata di Fourier del vettore che contiene i segnali di input nel tempo è:

$$U(f) = H^{-1}(f)L(f)W(f) \quad (62)$$

in cui $W(f)$ è un vettore che contiene le trasformate di Fourier di l segnali di rumore bianco fra loro correlati con correlazione unitaria. Dalla trasformata inversa dell'(eq.62) si ottengono i segnali di pilotaggio degli shaker.

Tipicamente la matrice di trasferimento H di tutto il sistema di prova viene stimata in una fase precedente l'inizio del test, eccitando la struttura con segnali random scorrelati a bassa potenza. Durante tutto il test poi, una matrice \hat{S}_{yy} analoga a S_{yy} , viene continuamente stimata dal segnale dell'accelerometro di controllo e i segnali di pilotaggio periodicamente aggiustati per minimizzare l'errore con la matrice desiderata dall'utente.

Generalmente i software di controllo permettono all'utente di impostare la matrice S_{yy} definendo le PSD lungo la diagonale e le cross-PSD nel triangolo superiore (o inferiore). La cross-PSD fra due segnali, ad esempio x e y , è una funzione complessa e può essere scritta ricorrendo alle definizioni di coerenza e fase:

$$S_{xy} = \sqrt{\gamma_{xy}^2 S_{xx} S_{yy}} e^{i\phi_{xy}} \quad (63)$$

in cui $\phi_{xy}(f)$ è lo sfasamento e $\gamma_{xy}^2(f)$ è la coerenza fra i due segnali definita come:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f) G_{yy}(f)} \quad (64)$$

Il vantaggio di usare la notazione con coerenza e fase rispetto la notazione con parte reale e parte immaginaria è legato al significato fisico associato alle prime: se la fase è 0° il movimento della tavola sarà preferibilmente lungo la direzione a 45° fra gli assi x e y . Inoltre più la coerenza è un valore vicino a 1 e più il movimento sarà simile a una linea retta.

3.2 PROGETTO DELL’AFFERRAGGIO

L’afferraggio ha la funzione di permettere il montaggio del provino sull’head expander comportandosi come un incastro rigido nell’intervallo di frequenze interessate dal test. La geometria adottata deriva dal sistema proposto da altri autori per eseguire test a fatica sulla medesima tavola vibrante [55], in cui si è avuta l’accortezza di apportare le modifiche necessarie ad assicurare la resistenza per i test in programma. L’afferraggio è costituito da un supporto centrale con sezione quadrata ricavato per fresatura da una piastra di 30 mm di spessore (fig.27): un collegamento a morsa con viti prigioniere permette il montaggio del provino nella parte superiore del supporto, mentre una piastra inferiore permette il montaggio di tutta la struttura sull’head expander. Tutto il supporto è realizzato in acciaio S275 in cui si è deciso di evitare l’utilizzo di saldature per non introdurre zone ad alto rischio di nucleazione di cricche che, in caso di danneggiamento, avrebbero modificato la risposta dinamica della struttura. L’intero sistema costituito da afferraggio e provino completo di massa a sbalzo è stato oggetto di verifica attraverso modellazione agli elementi finiti per assicurare che la frequenza naturale dei modi flessionali su tutti i piani di eccitazione fosse la stessa.

3.3 PROGETTO DEL PROVINO

Nella progettazione del provino uno dei requisiti fondamentali per l’affidabilità dei risultati era rimanere il più aderenti possibile alle ipotesi alla base di tutta la trattazione teorica finora incontrata. Sono state individuati i seguenti vincoli progettuali che avrebbero dovuto essere rispettati:

- la risposta dinamica misurata sull’estremo libero avrebbe dovuto essere in banda stretta così da permettere l’applicazione del criterio di Rayleigh (eq.24) che, come descritto nel cap.2, introduce meno approssimazioni ri-

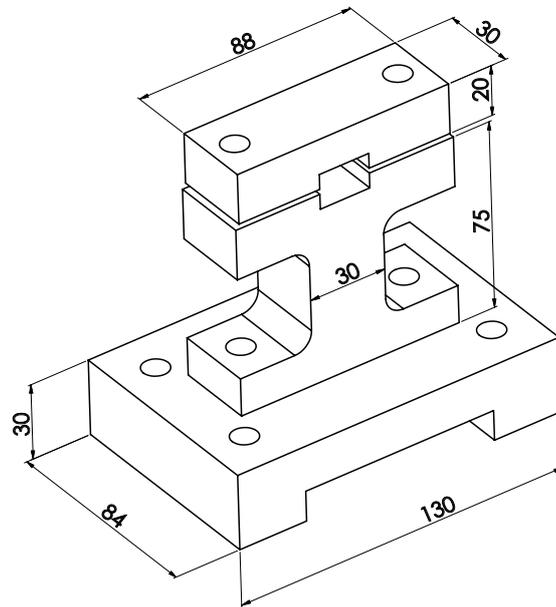


Figura 27: Ingombri dell'afferraggio costruito

spetto i criteri in banda larga. La forma più appropriata è una geometria snella, in cui agisce solo lo smorzamento isteretico del materiale

- Lo shaker avrebbe dovuto eccitare solo la prima deformata flessionale della trave, in modo tale da ritenere lecita la schematizzazione del sistema di prova come un sistema a singolo gradi libertà, in accordo alla teoria alla base del criterio ERS/FDS
- la rottura del provino avrebbe dovuto avvenire ad alto numero di cicli così da poter utilizzare il criterio di Rayleigh senza bisogno di ricorrere a ulteriori correzioni introdotte dalla plasticizzazione del materiale. Per tutte le eccitazioni scelte il numero di cicli a rottura avrebbe dovuto essere superiore a 10^5 cicli
- per poter utilizzare il provino anche in test multiassiali, la geometria avrebbe dovuto presentare delle simmetrie, così da avere risposte simili in tutte le direzioni di eccitazione.

La scelta finale è ricaduta su una geometria cilindrica con intaglio circonferenziale a ridosso dell'afferraggio: l'intaglio ha la funzione di creare una sede

preferenziale per l'accumulo di danno in prossimità della zona di momento flettente massimo. La sezione di gola ha geometria a U con raggio di fondo di 3 mm che introduce un coefficiente di intaglio K_t pari a:

$$K_t = \frac{\sigma_p}{\sigma_{nom,n}} = 1.41 \quad (65)$$

in cui σ_p è la tensione di picco elastico causata dall'effetto geometrico e $\sigma_{nom,n}$ la tensione nominale che si otterrebbe nella sezione dell'intaglio con il modello strutturale della trave. Il pedice n indica che la tensione nominale va valutata nella sezione netta della gola. Il valore numerico è reperibile da letteratura [56].

La resistenza a fatica dipende dal valore efficace di tensione σ_{eff} nell'apice dell'intaglio, inferiore, ma spesso prossimo, alla tensione di picco σ_p , calcolabile attraverso il coefficiente K_f :

$$K_f = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_{nom,n}} \quad (66)$$

Il legame fra K_f e K_t dipende dal raggio di raccordo dell'intaglio e dal materiale ed è espresso dal coefficiente di sensibilità all'intaglio q :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (67)$$

dove q è ricavabile da formulazioni empiriche o grafici (fig.28).

Il materiale scelto per la realizzazione è l'acciaio da costruzione S355-J2, per via della reperibilità delle caratteristiche di resistenza a fatica da letteratura (tab.2).

Tabella 2: Caratteristiche resistenziali dell'acciaio S355-J2 (da [57])

Limite di resistenza a fatica (σ_D)	Pendenza della curva S-N (k)	Tensione di snervamento (σ_s)	Tensione di rottura (σ_R)
204 MPa	7.9	355 MPa	510 MPa

Il raggio scelto è sufficientemente ampio da poter ritenere che il coefficiente di sensibilità all'intaglio sia prossimo a 1 e quindi lecito considerare per K_f lo stesso valore del fattore di concentrazione statico K_t .

La scelta di utilizzare un intaglio con raggio di fondo superiore a 2 mm cautele dall'influenza di piccoli errori di fabbricazione perché il materiale non lavora in condizioni di piena sensibilità all'intaglio, cioè piccole differenze della geometria della gola hanno poca influenza sulla tensione massima che vi insiste e che governa la fatica. Si è scelto anche di non utilizzare un raggio troppo ampio a causa della pendenza della curva S-N del materiale usato: l'acciaio S355-J2, al contrario di altri acciai da costruzione, ha un valore k piuttosto elevato, corrispondente a una curva S-N con pendenza poco pronunciata. Piccole variazioni dello stato tensionale, ad esempio causate da imprecisioni del controllo della tavola vibrante, avrebbero avuto una forte influenza sulla vita a fatica del provino risultando in una grande dispersione delle tempistiche misurate. L'intaglio, oltre a creare una sede preferenziale per l'innescò delle cricche, ha anche la funzione di aumentare la pendenza della curva S-N mitigando così l'effetto della variabilità del controllo della macchina.

La resistenza a fatica del componente intagliato è governata da diversi fattori fra cui, i più influenti per il provino in esame, sono la concentrazione di

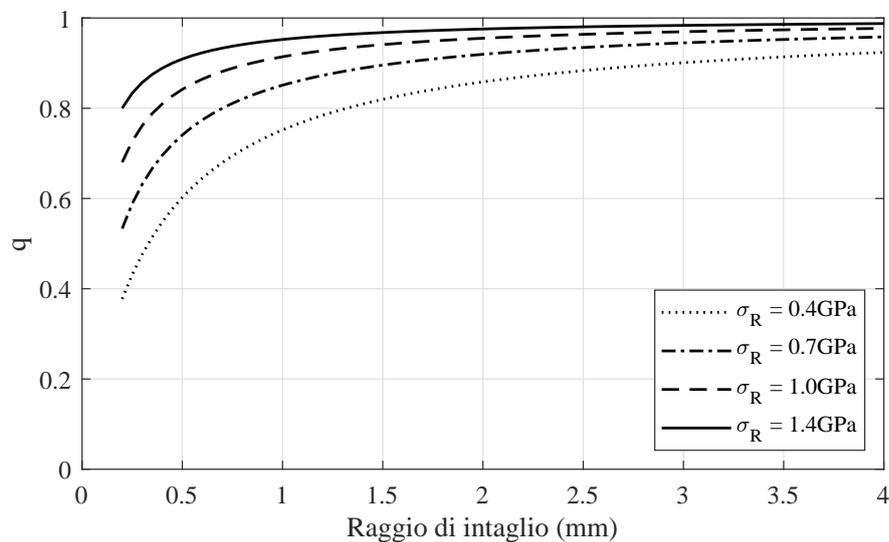


Figura 28: Coefficiente di sensibilità all'intaglio per acciai con diversa tensione di rottura (da [58])

tensioni causata dalla presenza dell'intaglio e la finitura superficiale lasciata dalla lavorazione di tornitura. Il loro effetto è quello di abbassare il limite di tensione della vita infinita e, di conseguenza, aumentare la pendenza della curva S-N (fig.29). Da letteratura si trovano diverse relazioni empiriche per la modifica della curva S-N attraverso l'utilizzo di coefficienti di penalizzazione [58]. Ad esempio, chiamando K_l il coefficiente di penalizzazione introdotto dalla finitura superficiale, il suo valore nel caso di lavorazione generica da macchine utensili può essere stimato come:

$$K_l = \left(4.51\sigma_R^{-0.265}\right)^{-1} = 1.16 \quad (68)$$

e risulta utile per una stima approssimata del valore di tensione corrispondente al limite di fatica del componente intagliato attraverso la:

$$\sigma_D^* = \frac{\sigma_R/2}{K_f K_l} = 95.3\text{MPa} \quad (69)$$

Questo valore rappresenta il limite inferiore delle tensioni (sinusoidali e a media nulla) che devono insistere nel punto più sollecitato per arrivare a rottura. Eventuali cicli di tensione di ampiezza inferiore a σ_D^* non hanno effetto sulla vita residua del provino.

Massa a sbalzo, lunghezza del provino e caratteristiche dell'eccitazione random sono state scelte in modo da avere durate ragionevoli dei test. Una stima iniziale delle durate medie dei test è stata ricavata utilizzando il criterio narrowband. Dall'(eq.24), conoscendo la pendenza della curva di Wöhler, le uniche grandezze che rimangono incognite sono la durata desiderata T , la frequenza naturale del sistema e il valore RMS di tensione che deve insistere sull'intaglio per raggiungere la condizione di rottura completa ($D = 1$). Ricordando che in un sistema dinamico che ha risposta in banda stretta il numero medio di attraversamenti dello zero con pendenza positiva (eq.12) è approssimabile alla frequenza di risonanza, la (eq.24) può essere riscritta esplicitando σ_{rms} in funzione di T e f_n :

$$1 = \frac{n_0^+ T}{C} \left(\sqrt{2\lambda_0}\right)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \quad (70)$$

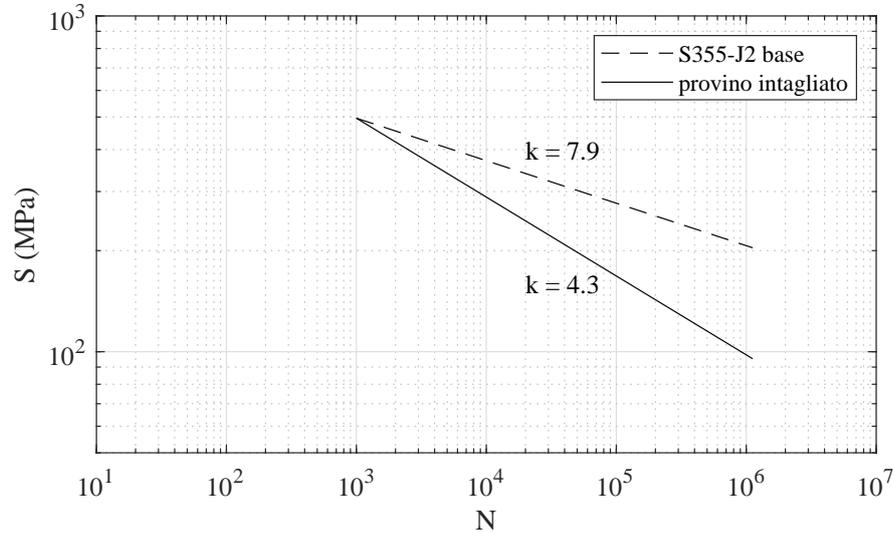


Figura 29: Confronto fra le curve S-N del materiale base e del provino intagliato

$$1 = \frac{f_n \Gamma}{C} \left(\sqrt{2} \sigma_{\text{rms}} \right)^k \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right) \quad (71)$$

$$\sigma_{\text{rms}}(T, f_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{C}{T f_n \Gamma \left(1 + \frac{k}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{k}} \quad (72)$$

Il grafico dell'equazione è riportato in fig.30 in cui viene messo in evidenza il punto di progetto del test più lungo, ovvero il test la cui eccitazione imposta dallo shaker è tale da dare una σ_{rms} di poco superiore al limite di resistenza a fatica σ_D^* . La decisione di fare alcuni test della campagna sperimentale in una zona a ridosso del ginocchio inferiore della curva S-N è in linea con la scelta di lavorare nella zona della curva ad alto numero di cicli, lontano dalla regione in cui potrebbero insorgere effetti di plasticità del materiale.

3.3.1 Modellazione agli elementi finiti

Scelta la durata del test più lungo, la frequenza naturale del provino è la frequenza che permette di avere tensioni σ_{rms} di poco superiori al limite di

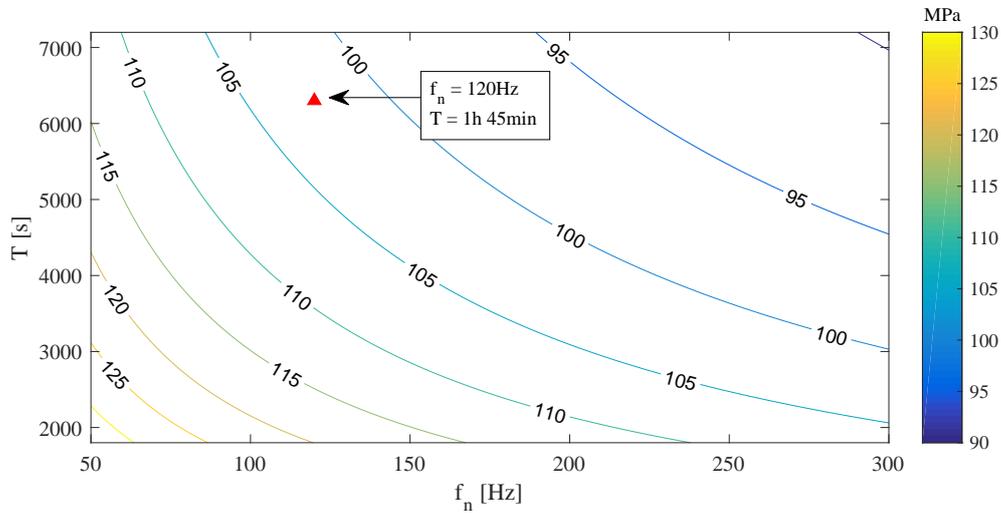


Figura 30: Contour del criterio di danneggiamento narrowband con in evidenza il punto di progetto del test più lento. I colori rappresentano il valore σ_{rms} all'apice dell'intaglio

resistenza σ_D^* . Dalla fig.30 il valore di frequenza naturale del sistema deve essere attorno i 120 Hz.

È stato realizzato un modello agli elementi finiti per ottimizzare la geometria in funzione della frequenza di risonanza richiesta. Il modello è stato realizzato usando come meshatore LMS Virtual.Lab e come solutore MSC Nastran: in totale è costituito da 120000 elementi esaedrici a 8 nodi, distribuiti in modo mappato nella zona dell'intaglio per modellare fedelmente il gradiente di tensione.

La fig.31 mostra la geometria completa di quote dimensionali del provino progettato e la fig.32 la mesh realizzata dell'intero sistema di prova. La massa a sbalzo non è mostrata perché è modellata come una massa concentrata completa di relativo tensore di inerzia, collegata alla mesh del provino con elementi rigidi Nastran RBE2. La massa realizzata consiste in un contrappeso cilindrico di acciaio, del diametro di 75 mm e spessore 20 mm, avvitato all'estremo del provino. Il peso della sola massa a sbalzo è di 690 grammi, mentre tutto il sistema completo di afferraggio e viti supera i 4 kg.

Nella trattazione descritta non è stato preso in considerazione finora l'effetto della forza peso che induce una tensione media sull'intaglio potenzialmente in grado di modificare la resistenza a fatica del provino. A posteriori della

progettazione della geometria, il modello agli elementi finiti sviluppato ha permesso di stimare una componente media di tensione $\sigma_{y,m} = 14.6\text{MPa}$ nella sezione di gola (fig.33). Tale componente tensionale modifica solo marginalmente la curva di Wöhler stimata facendone variare la pendenza da $k = 4.3$ a $k = 4.4$ e abbassandone il ginocchio inferiore al valore $\sigma_{D,m}^*$ secondo la relazione di Haigh:

$$\sigma_{D,m}^* = \sigma_D^* \left(1 - \frac{\sigma_{y,m}}{\sigma_R} \right) = 92.6\text{MPa} \quad (73)$$

L'effetto della tensione media è trascurabile rispetto all'effetto degli altri fattori penalizzanti ed è lecito trascurarne l'effetto sulla resistenza a fatica. Inoltre questa osservazione giustifica anche l'utilizzo della formulazione di eq.72 dal momento che questa non tiene conto della presenza di una eventuale componente media di tensione.

Il modello agli elementi finiti è stato validato attraverso analisi modale sperimentale su un prototipo di afferraggio. L'analisi modale è stata eseguita in condizioni vincolate avvitando la struttura all'head expander e eccitando il provino con un martello strumentato (mod. PCB 086D05) con punta in plastica. La risposta accelerometrica è stata acquisita nelle direzioni X e Z con un accelerometro triassiale posto sulla massa a sbalzo.

In fig.34 sono mostrati i modi di vibrare interessati dalla campagna sperimentale, ottenuti dal modello numerico e dall'analisi sperimentale. La tab.3 ne riassume le caratteristiche modali corrispondenti. Le discrepanze fra modello e analisi sperimentale, evidenti soprattutto nella differenza fra le frequenze di

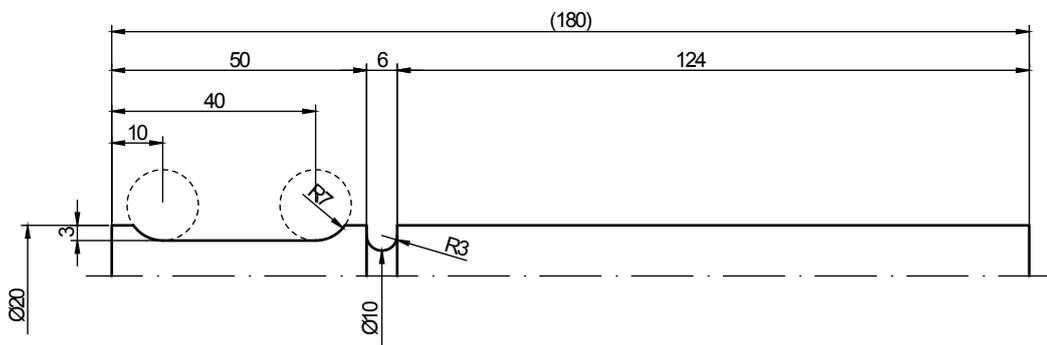


Figura 31: Dimensioni del provino

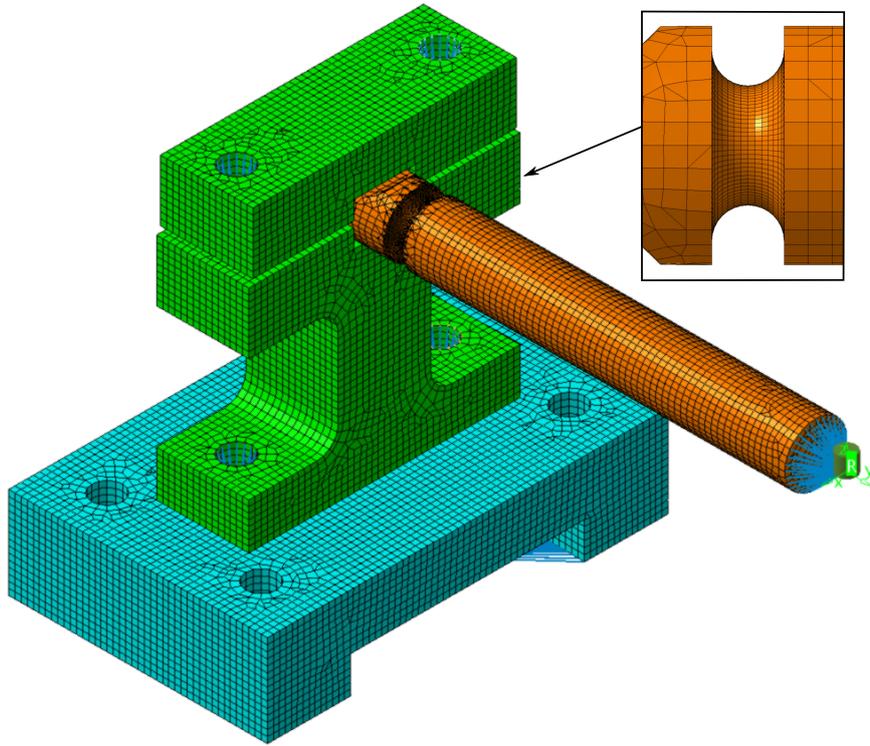


Figura 32: Mesh del sistema di prova. In evidenza: mesh mappata attorno l'intaglio

risonanza, sono da attribuire alla modellazione del collegamento a morsa che sostiene il provino. Nel modello agli elementi finiti è stata imposta continuità dei nodi della mesh all'intefraccia di provino e sede dell'afferraggio, nella realtà il collegamento avviene ad opera dell'attrito e, a rigore, non è schematizzabile come un incastro perfetto. Il *Modal Assurance Criterion* tuttavia mostra ottima correlazione fra le deformate modali numeriche e sperimentali (fig.35).

Il legame fra la tensione all'apice dell'intaglio e l'eccitazione necessaria della tavola è stato ottenuto ricorrendo a un'analisi FEM forzata dell'intero sistema di prova. L'analisi FEM random, a fronte di una forzante definita in termini di PSD, permette di calcolare nei nodi del modello grandezze utili ancora sotto forma di densità di potenza spettrale: dal punto di vista strutturale, la grandezza di interesse ai fini della durata è la PSD di tensione nel punto più sollecitato. Come eccitazione è stata applicata ai nodi alla base dell'afferraggio un'accelerazione con profilo di PSD piatto nell'intervallo di frequenze

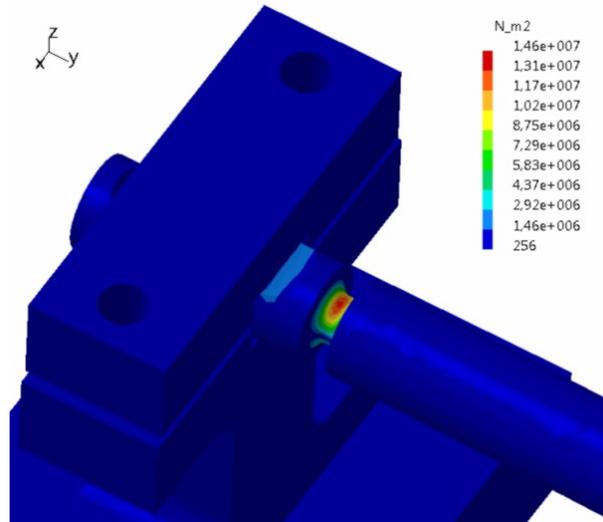


Figura 33: Componente di tensione $\sigma_{y,m}$ causata dalla forza peso: nella sezione di gola raggiunge il valore massimo di 14.6MPa

Tabella 3: Parametri modali da analisi FEM e sperimentale

	FEM	EMA		
	f_n	f_n	ζ	
Modo 1	125 Hz	112.5 Hz	0.40%	flessione sul piano Y-Z
Modo 2	126 Hz	120.1 Hz	0.40%	flessione sul piano X-Y

fra 70 e 150 Hz, ovvero a cavallo della frequenza di risonanza. Si tratta di un espediente sfruttato anche da altri autori per mantenere sempre in risonanza il provino anche durante il propagarsi della cricca [49, 59]: in effetti durante un test accelerato che prevede il danneggiamento di un componente, le frequenze di risonanza tendono a spostarsi progressivamente verso valori più bassi ma l'intervallo di eccitazione, in questo tipo di test, è tale da mantenere la risposta dinamica sempre in risonanza.

La grandezza calcolata in uscita è la PSD della tensione di trazione nel nodo di fondo intaglio evidenziato in fig.36. Partendo da tale PSD diventano applicabili i criteri spettrali di danneggiamento visti nel cap.2, ed è possibile stimare la durata di ogni test al variare della PSD di eccitazione evitando

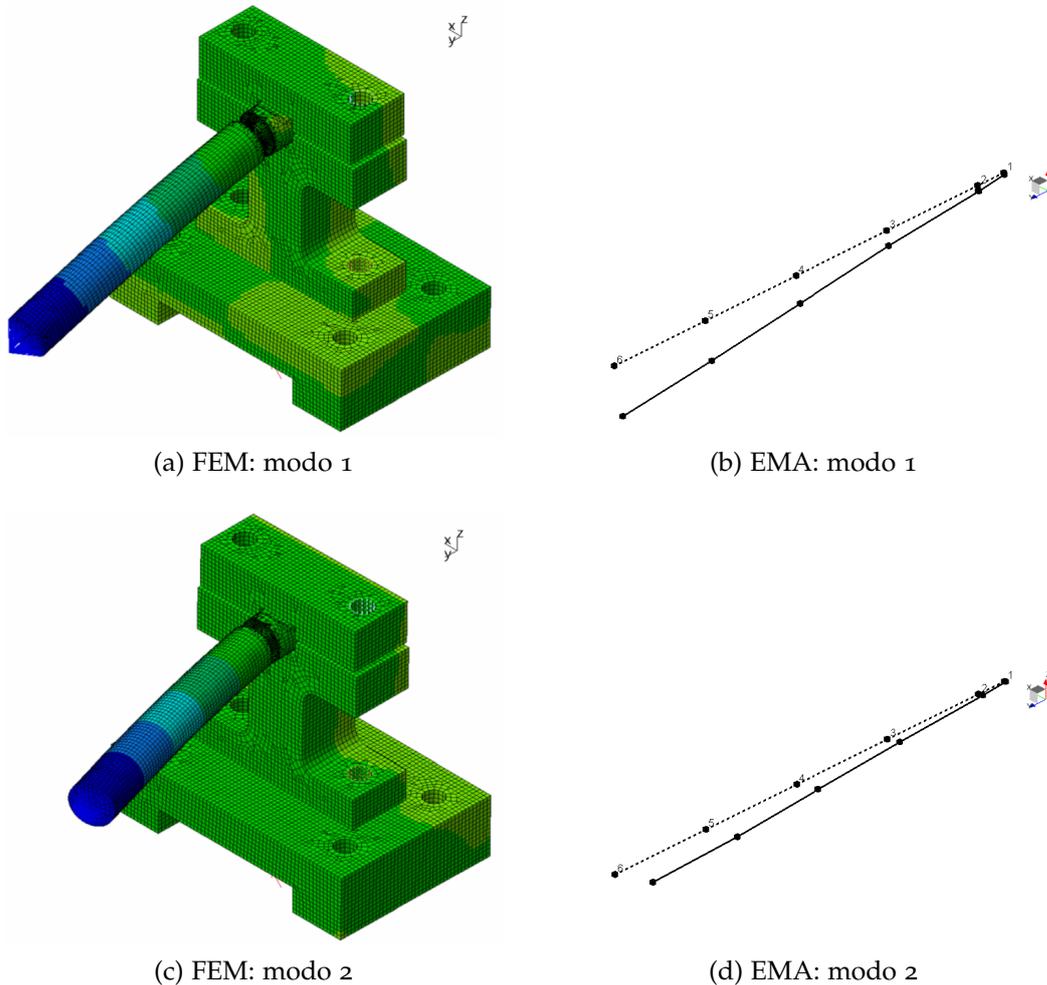


Figura 34: Confronto delle deformate modali da modello FE e da analisi modale sperimentale

onerose simulazioni nel dominio del tempo che comporterebbero l'uso del conteggio rainflow.

Per i test monoassiali, una campagna di simulazioni FEM ha permesso di individuare nell'eccitazione di 0.5 gRMS l'eccitazione più idonea per il test più lento. Lo spettro di accelerazione è stato applicato lungo la direzione verticale, trascurando per semplicità le direzioni ortogonali perché il loro contributo sullo stato tensionale è pressoché nullo.

Il parametro di banda α_2 (eq.15) per tale PSD risulta 0.99, giustificando

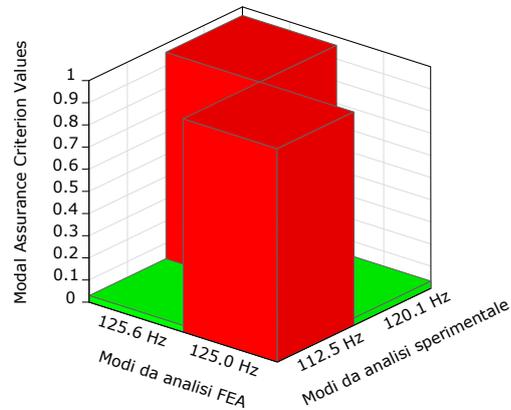


Figura 35: Modal Assurance Criterion fra il modello FE e l'analisi modale sperimentale. Il MAC vale 0.96 per le coppie di modi sulla diagonale, 0.03 fuori diagonale

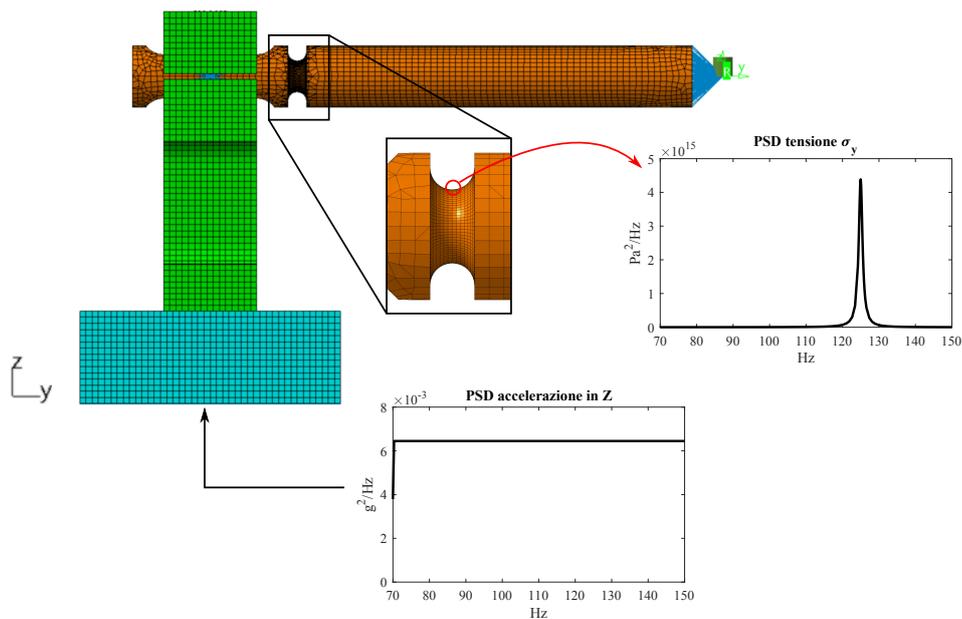


Figura 36: Schema di analisi FEM random

l'utilizzo del criterio di Rayleigh. La durata stimata del test più lento risulta essere di 1 ora e 46 minuti.

Gli altri livelli di eccitazione sono stati ricavati ricorrendo all'inverse power law. Per avere confrontabilità fra tutti i test si è deciso di modificare il valore

RMS di ogni eccitazione mantenendo costante il range in frequenza: la scelta è ricaduta sulle accelerazioni di 0.55 gRMS e 0.6 gRMS. La fig.37 riporta, per ogni condizione di carico, la PSD della componente verticale di accelerazione sull'estremo libero del provino e la PSD di tensione nel nodo più sollecitato. L'esigua differenza di valore RMS imposto alla tavola è giustificata dalla grande influenza della dinamica del sistema sulla durata finale: la tab.4 riporta un confronto fra i valori RMS di eccitazione sull'asse verticale e la durata corrispondente. Va notato anche che il parametro più influente in queste stime è il valore di pendenza della curva S-N il quale è stato assunto basandosi su dati di letteratura, non avendo a disposizione in fase di progetto il valore esatto per il materiale a disposizione in laboratorio.

L'assunzione fatta, di agire sul valore RMS dell'accelerazione della tavola senza modificare il range in frequenza, è giustificata applicando i criteri ERS e FDS. I grafici di fig.38 mettono in evidenza come, all'aumentare dell'eccitazione imposta alla base del sistema a singolo grado di libertà, l'ERS aumenti ma l'FDS si mantenga costante, in accordo a quanto illustrato nel cap.2.

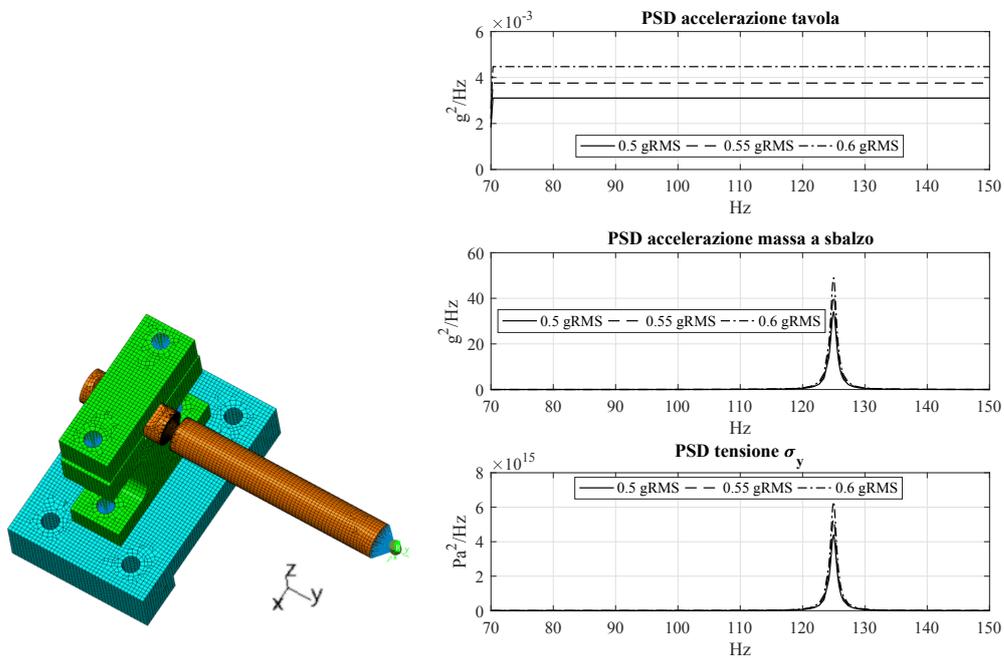


Figura 37: Eccitazioni e risposte dinamiche da simulazioni FEM

Tabella 4: Eccitazioni e durate stimate per i test monoassiali

RMS eccitazione verticale	RMS tensione nell'intaglio	Durata prevista
0.5 gRMS	102 MPa	1h 46min
0.55 gRMS	112 MPa	50 min
0.6 gRMS	122 MPa	25 min

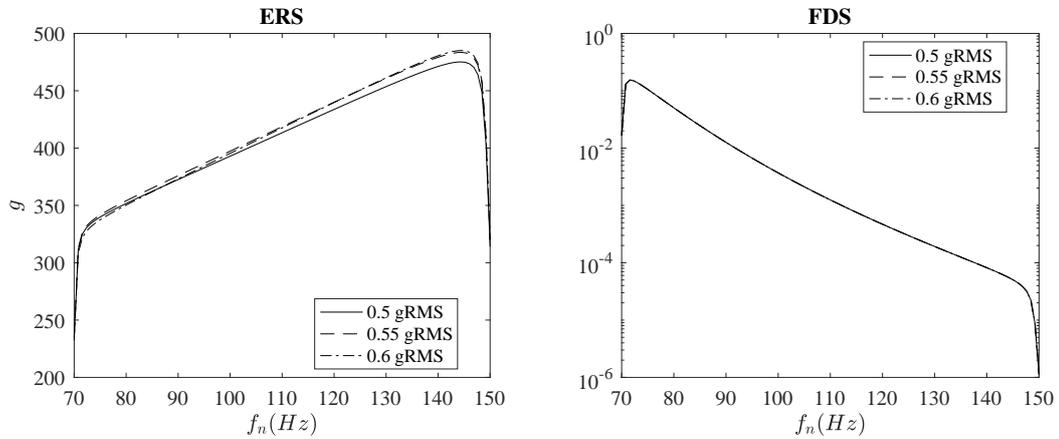


Figura 38: ERS/FDS per i test monoassiali pianificati. L'intervallo delle possibili frequenze naturali esplorato coincide con l'intervallo delle frequenze di eccitazione

CAMPAGNA SPERIMENTALE

La campagna sperimentale organizzata presso il laboratorio di Ingegneria dell'Università di Ferrara si è articolata fondamentalmente in due tipologie di test: test con eccitazione prettamente monoassiale e test multiassiali, con diversi livelli di coerenza fra le eccitazioni.

I test monoassiali sono stati condotti nelle condizioni di progetto illustrate nel capitolo precedente, usando come eccitazioni accelerazioni random gaussiane in direzione verticale con i valori RMS di 0.5g, 0.55g e 0.6g (tab.4). La scelta delle eccitazioni è stata dettata dalla durata prevista al FEM per ciascuna tipologia di test, in cui a fronte di un'esigua variazione del contenuto energetico in ingresso, la vita prevista varia notevolmente.

Tipicamente, quando si eseguono test vibrazionali accelerati, si rileva che le tempistiche di test sono in disaccordo con quelle previste dall'inverse power law. A contribuire all'errore vi è senza dubbio la pendenza della curva S-N che compare all'esponente dell'eq.55, come messo in evidenza anche da altri ricercatori [60]. Scopo principale dei test monoassiali è stato quello di verificare la bontà previsionale dell'inverse power law quando questa viene applicata nelle condizioni di test più aderenti possibile alla teoria illustrata.

Per contro la stessa legge è stata applicata anche a test con eccitazione multiassiale per verificare l'influenza di condizioni di eccitazione più simili a quelle riscontrabili in un reale ambiente operativo sulle tempistiche previste. I test multiassiali sono stati condotti eccitando le direzioni trasversali Z e X del provino (fig.39), dal momento che lungo i piani X-Y e Y-Z la geometria è identica, quindi tutte le differenze rispetto ai test monoassiali sono da imputare solamente alla diversa condizione di carico. I test multiassiali hanno permesso di quantificare l'influenza di più eccitazioni contemporanee sulla durata prevista. L'effetto della diversa correlazione fra le eccitazioni è stato indagato

prendendo in considerazione due casi estremi: il caso di eccitazioni altamente correlate e il caso con bassa correlazione. Per mantenere confrontabilità con i test monoassiali la forma dei profili di PSD non è stata alterata.

4.1 TEST MONOASSIALI

La tavola vibrante triassiale a disposizione dell'Università non permette il movimento di un singolo asse bloccando meccanicamente gli altri due pertanto in tutti i test monoassiali si è fatto ricorso alla strategia di controllare attivamente sempre tutti e tre gli assi coinvolti, avendo l'accortezza di usare le eccitazioni minime permesse dal controllo per i gradi di libertà che avrebbero dovuto rimanere fermi. Per i test monoassiali in particolare si è scelto di utilizzare l'asse Z come asse di eccitazione principale mantenendo quasi fermi gli altri due. In tutti i test realizzati, anche in quelli multiassiali, si è imposta un'eccitazione di 0.02 gRMS agli assi da mantenere fermi, la minima realizzabile con il set-up sperimentale costruito. In accordo alle considerazioni viste nel paragrafo 3.1.1, nei test monoassiali si è impostata alta coerenza e sfasamento nullo per tutti gli assi controllati al fine di ottenere un'eccitazione il più possibile orientata lungo l'asse Z.

La fig.40 riporta un esempio della matrice di controllo impostata per un test a 0.5 gRMS: la diagonale principale contiene le PSD desiderate per i tre assi della macchina, il triangolo superiore le ampiezze delle cross-PSD e il triangolo inferiore le corrispondenti fasi. La linea verde in ogni grafico rappresenta il profilo desiderato di PSD e cross-PSD che il controllore deve cercare di mantenere per tutta la durata del test, la linea blu sovrapposta il profilo che invece sta effettivamente realizzando nell'istante di acquisizione dell'immagine. Le bande arancioni e rosse indicano le soglie di alarm e abort e sono utili come indicatori di anomalie nel test quando la linea blu le oltrepassa ripetutamente (nella figura, ad esempio, si vede un comportamento anomalo delle fasi dei cross-spettri G_{xy} e G_{xz} perché l'immagine è stata presa nell'istante finale del test, quando il provino ormai era criccato).

I test su singolo asse, sono in realtà test triassiali, ma possono essere considerati come monoassiali in accordo alla normativa MIL-STD 810 che suggerisce di considerare un test come monoassiale se, per ogni linea spettrale, le PSD degli assi considerati fermi sono inferiori a 0.2 volte la PSD dell'asse di eccitazione principale. La fig.41 mostra, per un test preso come esempio, co-

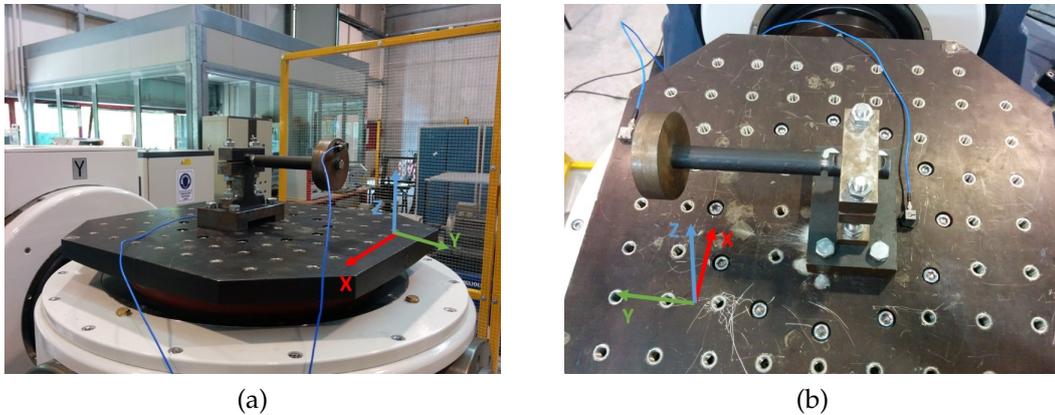


Figura 39: (a) Sistema di prova (b) Posizioni degli accelerometri

me il rapporto fra gli assi fermi e l'asse di maggiore eccitazione sia rispettato in tutto il range in frequenza considerato, anche laddove la presenza della risonanza del provino incide negativamente sulla qualità del controllo.

La fig.42 riporta in un unico grafico le componenti di accelerazione verticale e laterale della tavola nello stesso test a 0.5 gRMS precedente evidenziando la maggiore ampiezza della componente verticale rispetto quella laterale. La figura ellittica ottenuta è causata dalla non perfetta correlazione fra gli assi (la coerenza impostata è 0.98, non 1) e dal valore RMS di eccitazione impostato per l'asse X diverso da zero. L'asse maggiore dell'ellisse, corrispondente alla direzione di maggiore eccitazione, risulta leggermente inclinato rispetto la verticale tuttavia, ai fini dello stato tensionale, l'inclinazione non ha influenza sul danneggiamento ma solamente sulla posizione di innesco della cricca.

In tutti i test condotti si è fatto ricorso a una definizione operativa di danno corrispondente alla diminuzione del 20% della frequenza naturale iniziale. È una strategia utilizzata anche da altri autori, ad esempio per ottenere la curva S-N di un materiale [61]. Il calo della frequenza di risonanza è un fenomeno legato alla propagazione della cricca nell'intaglio durante il test che comporta una diminuzione localizzata della rigidità flessionale del provino.

La tabella 5 riassume tutti i test monoassiali effettuati con i relativi tempi impiegati per raggiungere l'80% della frequenza di risonanza iniziale.

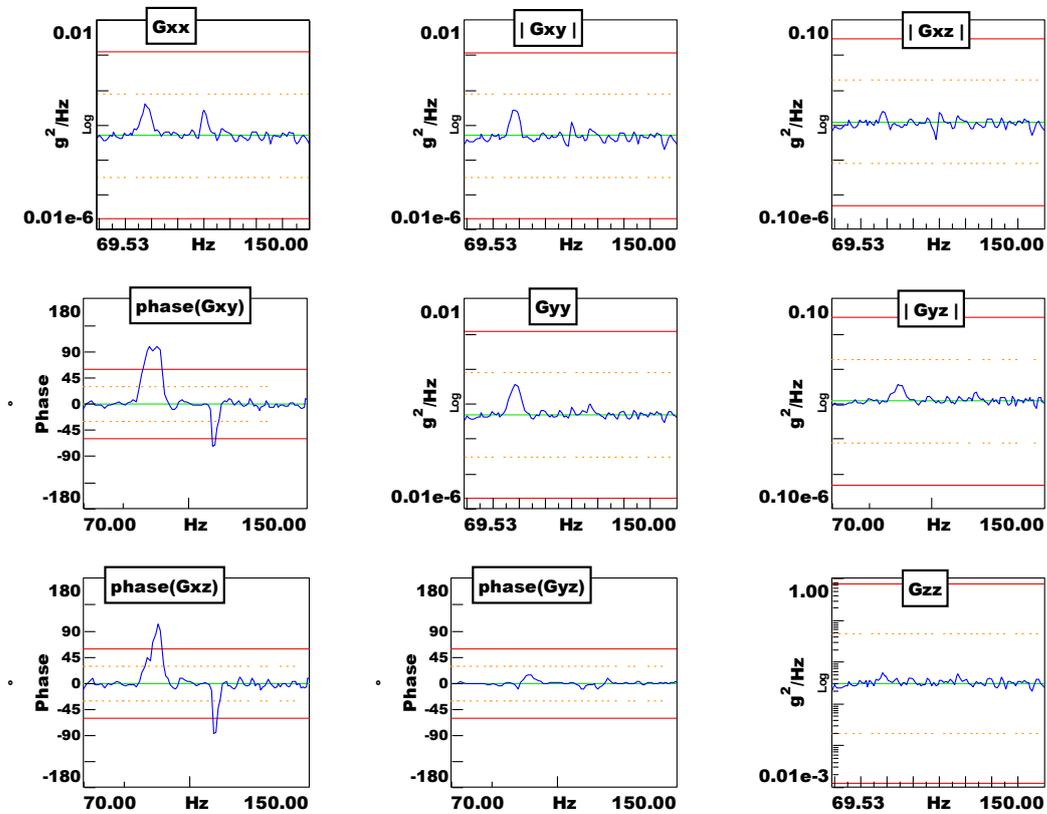


Figura 40: Matrice di controllo per test monoassiale a 0.5 gRMS. La PSD G_{zz} ha un valore RMS di 0.5 g, G_{xx} e G_{yy} di 0.02g. Le fasi delle cross-PSD sono impostate a 0° e le coerenze fra gli assi 0.98

Tabella 5: Elenco dei test monoassiali

Test #	f_n iniziale (Hz)	f_n finale (Hz)	Accelerazione Z (gRMS)	Durata (hh:mm:ss)
1	110	88	0.6	test di calibrazione
2	109	87.2	0.55	01:56:00
3	112	89.6	0.6	01:10:00
4	111.5	89.2	0.55	01:09:00
5	111	88.8	0.5	01:42:00

Tabella 5 : Elenco dei test monoassiali (continuazione)

Test #	f_n iniziale (Hz)	f_n finale (Hz)	Accelerazione Z (gRMS)	Durata (hh:mm:ss)
6	110	88	0.6	02:23:00
7	111	88.8	0.5	01:45:00
8	106	84.8	0.55	01:59:00
9	107.5	86	0.5	03:30:00
10	111	88.8	0.6	01:06:00
11	109	87.2	0.55	02:03:00
12	107	85.6	0.5	02:10:00
13	107.5	86	0.6	01:13:00
14	111	88.8	0.55	01:08:00
15	111	88.8	0.5	02:47:00
16	111	88.8	0.6	01:30:00
17	109	87.2	0.55	03:23:00
18	108	86.4	0.5	04:32:00
19	109.5	87.6	0.6	01:44:00
20	109.5	87.6	0.55	01:51:00
21	110	88	0.5	03:41:00
22	106	84.8	0.6	01:34:00
23	106	84.8	0.55	RUN OUT
24	110.5	88.4	0.5	04:10:00
25	111	88.8	0.55	01:37:00
26	109	87.2	0.6	00:56:00
27	109.5	87.6	0.5	RUN OUT
28	110	88	0.5	02:30:00
29	111.5	89.2	0.55	02:34:00
30	106	84.8	0.6	01:31:00
31	109.5	87.6	0.5	RUN OUT
32	111.5	89.2	0.55	RUN OUT

Tabella 5 : Elenco dei test monoassiali (continuazione)

Test #	f_n iniziale (Hz)	f_n finale (Hz)	Accelerazione Z (gRMS)	Durata (hh:mm:ss)
33	109	87.2	0.5	01:10:00
34	112	89.6	0.5	01:08:00
35	107	85.6	0.6	RUN OUT
36	113.5	90.8	0.6	00:54:00
37	110.5	88.4	0.55	02:00:00
38	112.5	90	0.55	01:32:00
39	112	89.6	0.5	01:00:00
40	112	89.6	0.5	01:00:00
41	108	86.4	0.55	01:34:00
42	112.5	90	0.55	01:28:00
43	104.7	83.8	0.6	01:25:00
44	111.7	89.4	0.6	00:40:00
45	112	89.6	0.6	00:55:00

Escludendo il primo test, servito per calibrare il set-up, i test monoassiali effettuati consistono in 13 ripetizioni per ogni livello di eccitazione. I test marcati come "run out" sono quelli in cui dopo 5 ore si è rilevata una modifica minima della frequenza naturale, indicando che la cricca non si era propagata. Il limite di 5 ore è stato stabilito come il tempo necessario a un provino che avesse mantenuto inalterata la propria frequenza di risonanza iniziale a raggiungere due milioni di cicli, limite a cui, convenzionalmente, si pone il ginocchio della vita infinita della curva S-N per un acciaio da costruzione.

La variazione di frequenza naturale è rilevabile facilmente dalla short-time Fourier transform (*STFT*) del segnale accelerometrico del sensore posto sulla massa a sbalzo. La fig.43 ne riporta un esempio, calcolato per il test numero 7 (in cui si è utilizzata una finestra di Hanning di 2^{12} punti con overlap del 75% e frequenza di campionamento $f_s = 400\text{Hz}$).

La fig.44 mostra una comparativa della diminuzione di frequenza di risonanza per tutti i test monoassiali effettuati raggruppati per livello di eccitazio-

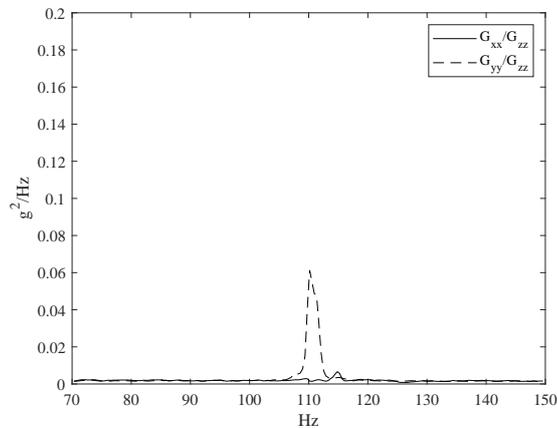


Figura 41: Rapporti fra le PSD di eccitazione degli assi mantenuti quasi fermi e l'asse maggiormente eccitato: i valori si mantengono abbondantemente sotto la soglia 0.2 suggerita dalla normativa MIL-STD 810 per ogni linea spettrale (test 7)

ne. Le curve sono state ottenute dalle corrispondenti short-time e mostrano la grande variabilità della velocità di danneggiamento rilevata sperimentalmente a parità di condizioni di test. Tale variabilità appare però congrua anche con le osservazioni sperimentali riportate da altri autori per test accelerati random, seppur con geometrie e materiali differenti [62].

Tutte le curve mostrano un andamento costante nella prima parte di test e poi iniziano a calare in modo più o meno repentino: al momento non esiste una legge in grado di descrivere la variazione di frequenza naturale per un test random. Whiteman, a seguito di una campagna sperimentale su provini cilindrici intagliati [59], ha proposto una relazione empirica che consente di approssimare agevolmente tale variazione

$$\left(\frac{x}{x_{\text{norm}}}\right)^{\gamma} + \left(\frac{y}{y_{\text{norm}}}\right)^{\gamma} = 1 \quad (74)$$

in cui x e y sono gli assi delle ascisse e ordinate della short-time, x_{norm} è la durata prevista del test per raggiungere $f_n = 0\text{Hz}$ (è un valore puramente teorico) e y_{norm} è la frequenza di risonanza del provino non danneggiato. γ è un esponente da determinarsi con un fitting ai minimi quadrati della STFT sperimentale e non è associato a un particolare significato fisico. In fig.45 è mostrato un esempio di grafico approssimato e il relativo errore percentuale

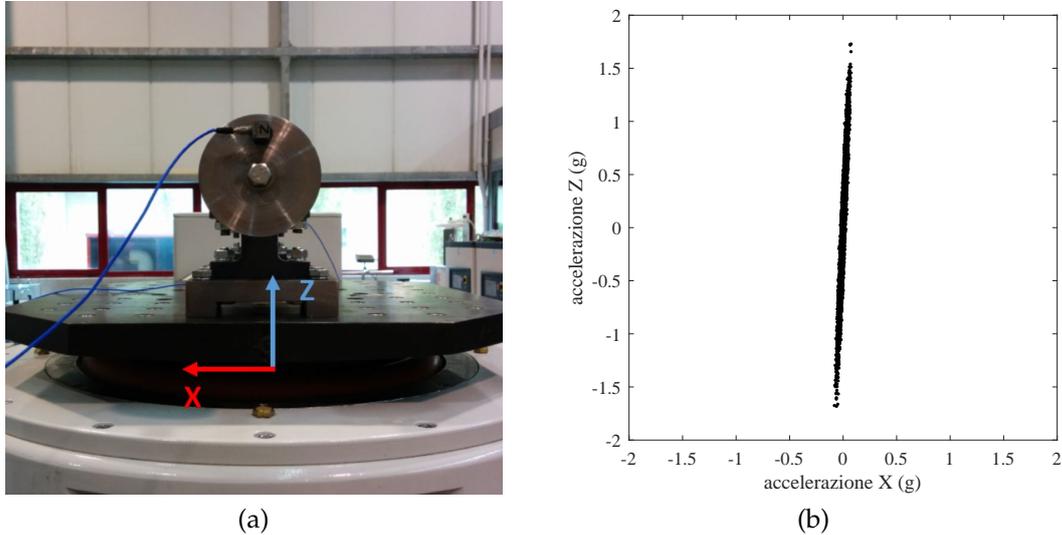


Figura 42: (a) Vista anteriore del sistema di prova (b) Scatter plot delle accelerazioni sugli assi X e Z in un test monoassiale

rispetto la curva sperimentale, in cui si vede che l'errore commesso è sempre molto contenuto. L'approssimazione risulta utile, ad esempio, per individuare l'istante di tempo in cui il danneggiamento ha raggiunto una soglia fissata e nel seguito verrà applicata per accorciare i segnali acquisiti fino al raggiungimento di un valore fissato di diminuzione di frequenza naturale.

Utilizzando lo stimatore H_1 è possibile risalire alla FRF che lega l'accelerazione misurata sull'estremo libero del provino all'accelerazione della base:

$$H_1(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} \quad (75)$$

in cui G_{xy} è la cross-PSD fra le accelerazioni punta e base e G_{xx} la PSD dell'eccitazione. Il calcolo ripetuto di H_1 a diversi istanti di tempo permette di risalire alla variazione dello smorzamento modale durante un test utilizzando, ad esempio, il metodo della banda di mezza potenza. In fig.46 è mostrato un esempio di calcolo dello stimatore H_1 a intervalli regolari per lo stesso test considerato precedentemente.

In fig.47 è mostrato un confronto grafico dei parametri modali dei 39 provini usati, calcolati con H_1 agli istanti iniziale e finale dei test monoassiali. La

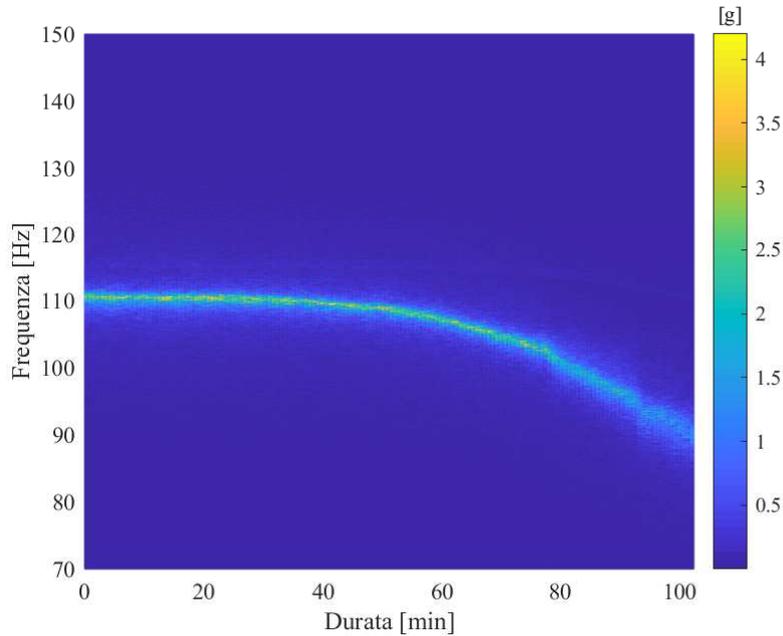


Figura 43: Variazione della frequenza di risonanza del test 7 misurata dal segnale dell'accelerometro sulla massa a sbalzo

frequenza naturale dei provini integri mediamente si attesta attorno i 110 Hz con una deviazione standard di ± 2 Hz. La variabilità osservata è imputabile a imprecisioni di fabbricazione e piccole variazioni della posizione di montaggio di ogni provino, ma anche questa osservazione appare compatibile con altri test simili da letteratura [62].

Lo smorzamento modale, mediamente prossimo allo 0.4%, è coerente con il dato rilevato nell'analisi modale sperimentale di un provino singolo. La grande dispersione di smorzamento osservabile fra inizio e fine test è verosimilmente imputabile alla diversa modalità di propagazione della cricca.

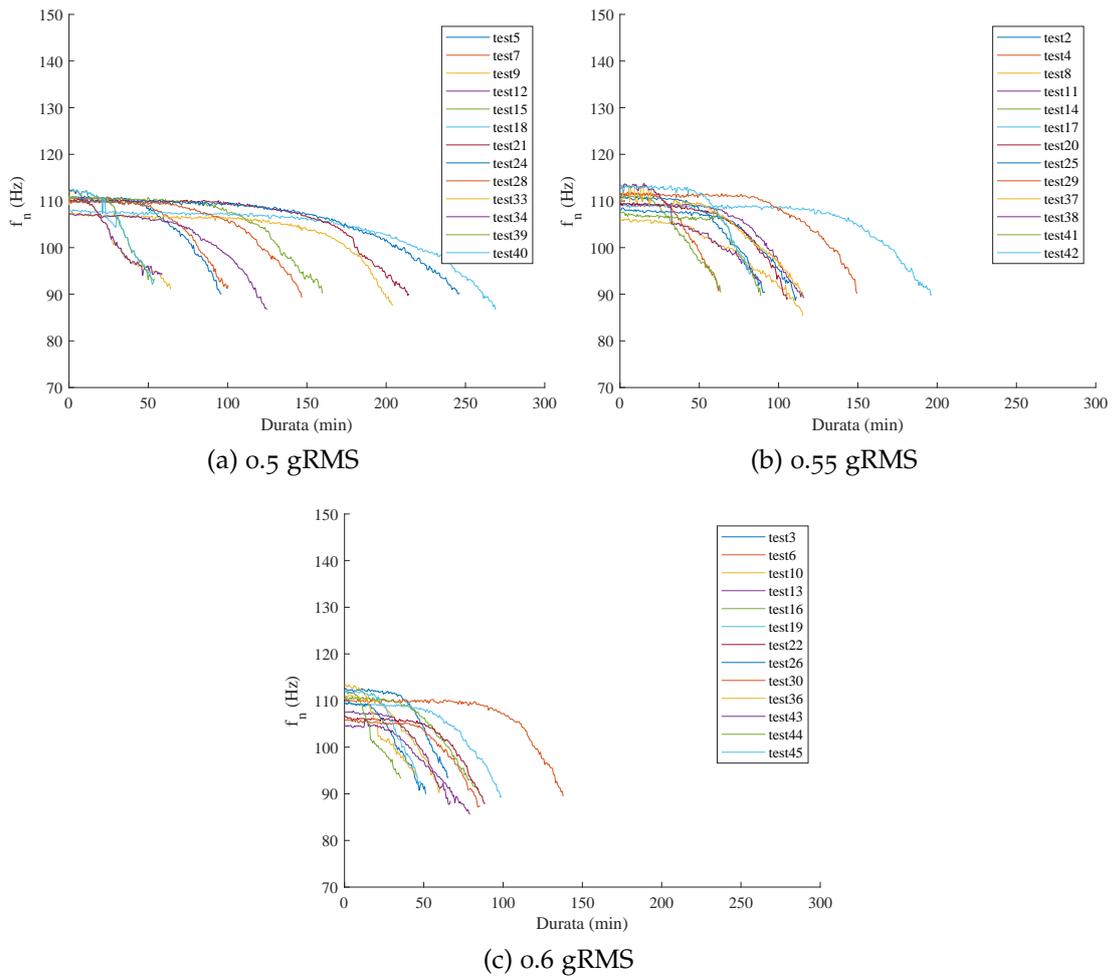


Figura 44: Confronto della variazione di frequenza naturale nel tempo per le diverse tipologie di eccitazione monoassiale

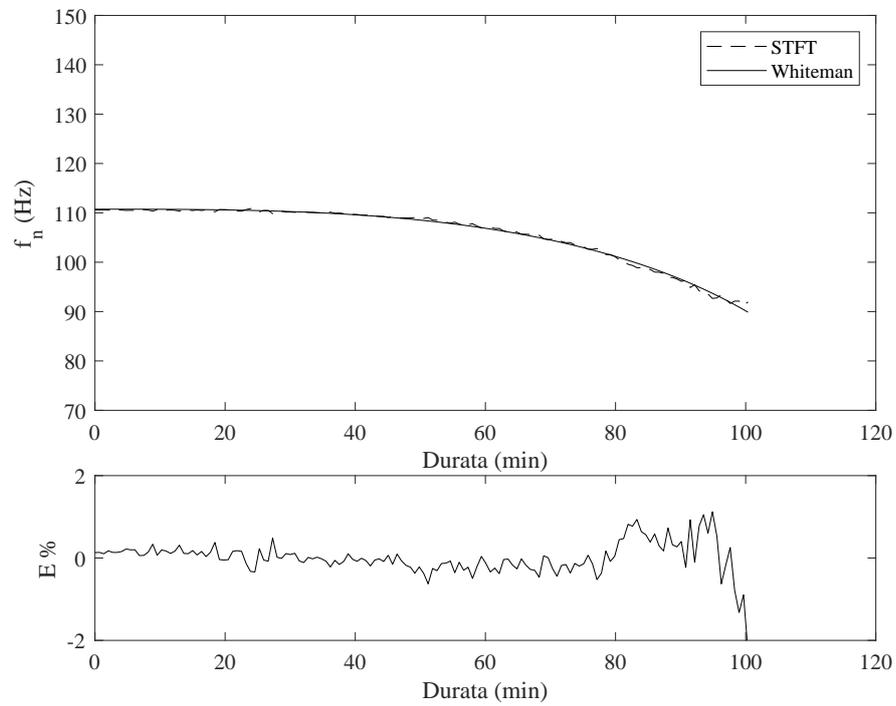


Figura 45: Confronto dell'approssimazione di Whiteman e la curva di variazione sperimentale per il test 7 e relativo errore percentuale. La curva utilizza come parametri $x_{norm} = 130min$, $y_{norm} = 110.7Hz$ e $\gamma = 2.97$

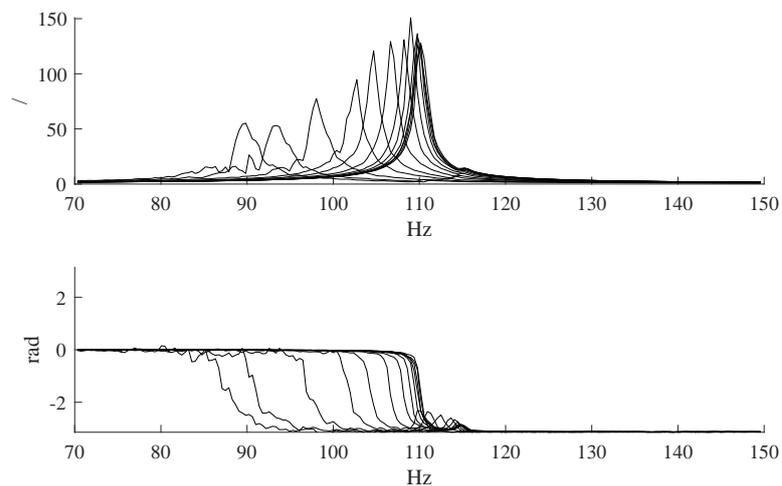


Figura 46: Evoluzione temporale della FRF fra accelerazione della base e risposta sull'estremo libero per il test numero 7 (ampiezza e fase)

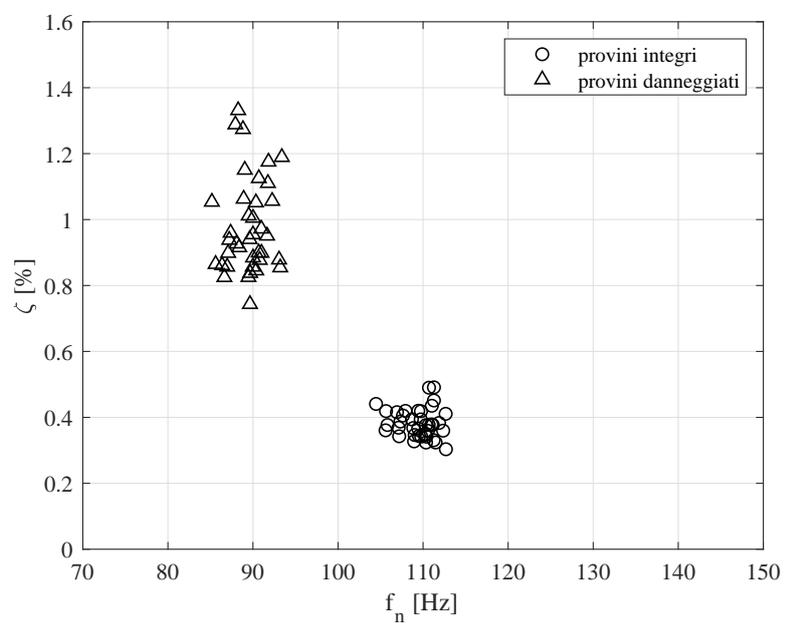


Figura 47: Variazione dei parametri modali fra inizio e fine dei test monoassiali

4.2 TEST BIASSIALI

Come accennato precedentemente, vista la simmetria cilindrica del provino in esame, i test biassiali sono stati realizzati eccitando gli assi X e Z con gli stessi profili di PSD usati per i test monoassiali, così da mantenere confrontabilità dei risultati. L'asse Y, corrispondente all'asse longitudinale del provino, è stato mantenuto quasi fermo impostando imponendo un'accelerazione con contenuto energetico di 0.02 gRMS.

Sono state prese in considerazione due diverse modalità di test: elevata coerenza fra le eccitazioni e bassa coerenza, intendendo come elevato il valore $\gamma_{xy}^2 = 0.98$ e come basso $\gamma_{xy}^2 = 0.05$.

La fig.48 riporta come esempio la matrice di controllo di un test biassiale in alta coerenza, confrontabile con l'analogia fig.40 riferita invece al caso monoassiale. In analogia ai test monoassiali anche in questi test la fase è stata impostata a zero per tutte le frequenze dell'eccitazione.

L'influenza dei diversi livelli di coerenza è apprezzabile nel grafico delle orbite di accelerazione realizzate dal controllo (fig.49 per un esempio di test a 0.5 gRMS). L'inclinazione a 45° è dovuta allo stesso livello RMS di eccitazione per gli assi X e Z, mentre la differente larghezza della figura ellittica è causata dal diverso grado di correlazione. La figura indica che nei test ad alta coerenza è molto probabile realizzare la stessa accelerazione istantanea su entrambi gli assi contemporaneamente, mentre il contrario accade nei test a bassa coerenza, in cui la correlazione statistica fra le accelerazioni in X e in Z è molto bassa. È lecito assumere i test ad alta coerenza come molto simili a test monoassiali, in cui però l'asse di maggiore eccitazione si trova sulla bisettrice fra X e Z: il punto più sollecitato dell'intaglio quindi è probabile trovarlo in questa posizione. Nei test biassiali a bassa coerenza invece il provino è eccitato allo stesso modo in tutte le direzioni, quindi la cricca ha la stessa probabilità di nucleare in ogni punto della circonferenza dell'intaglio e tendenzialmente propagherà in modo diverso rispetto il caso ad alta coerenza.

Le tabelle 6 e 7 riportano le impostazioni dei test effettuati con i relativi tempi misurati. Anche per i test biassiali il criterio a cui fermare il test è stato la diminuzione del 20% della frequenza naturale iniziale.

I test biassiali eseguiti in totale sono 56, di cui 27 in bassa coerenza (tolti i 2 run out) e 27 in alta coerenza.

Le figure 50 e 51 riportano le variazioni di frequenza naturale calcolate dalla

Tabella 6: Elenco dei test biassiali in alta coerenza

(Nota: per i test biassiali la numerazione riparte da 1)

Test #	f_n iniziale (Hz)	f_n finale (Hz)	Accelerazioni X e Z (gRMS)	Durata (hh:mm:ss)
1	111.5	89.2	0.6	00:50:00
2	109	87.2	0.55	00:40:00
3	111.5	89.2	0.6	00:55:00
4	111	88.8	0.5	01:21:00
5	111.5	89.2	0.55	01:50:00
6	112.5	90	0.5	01:07:00
7	110	88	0.55	02:06:00
8	111	88.8	0.5	03:21:00
9	112	89.6	0.6	01:27:00
30	114	91.2	0.6	02:52:00
31	117.5	94	0.6	00:37:00
32	107	85.6	0.5	03:07:00
33	117.5	94	0.5	00:31:00
34	115.5	92.4	0.55	04:15:00
35	115	92	0.55	00:39:00
36	112.5	90	0.6	00:35:00
37	112.5	90	0.6	02:03:00
38	114	91.2	0.55	00:45:00
39	118	94.4	0.55	01:41:00
40	112	89.6	0.5	02:04:00
41	115	92	0.5	00:55:00
42	111	88.8	0.6	01:30:00
43	114	91.2	0.6	00:58:00
44	106	84.8	0.5	01:14:00
45	116	92.8	0.5	02:35:00
46	110	88	0.55	02:47:00
47	114.5	91.6	0.55	00:55:00

Tabella 7: Elenco dei test biassiali in bassa coerenza

Test #	f_n iniziale (Hz)	f_n finale (Hz)	Accelerazioni X e Z (gRMS)	Durata (hh:mm:ss)
10	113	90.4	0.6	01:55:00
12	109	87.2	0.5	01:59:00
13	110	88	0.55	01:07:00
14	110.5	88.4	0.6	01:53:00
15	111	88.8	0.5	RUN OUT
16	108.5	86.8	0.5	01:04:00
17	119.5	95.6	0.5	00:55:00
18	108	86.4	0.6	02:04:00
20	110	88	0.55	03:54:00
21	112	89.6	0.55	00:53:00
22	110.5	88.4	0.5	RUN OUT
23	114	91.2	0.5	01:28:00
24	107	85.6	0.6	01:31:00
25	110	88	0.6	00:37:00
26	115	92	0.55	01:47:00
27	120.5	96.4	0.55	01:14:00
28	107	85.6	0.5	02:40:00
29	115.5	92.4	0.5	01:25:00
48	105	84	0.5	03:03:00
50	112	89.6	0.55	01:21:00
51	112	89.6	0.55	02:29:00
52	104	83.2	0.6	03:11:00
53	115.5	92.4	0.6	00:45:00
54	107	85.6	0.5	03:30:00
55	116.5	93.2	0.5	01:15:00
56	112	89.6	0.55	01:08:00
57	116	92.8	0.55	01:13:00
58	111	88.8	0.6	00:57:00
59	108	86.4	0.6	01:14:00

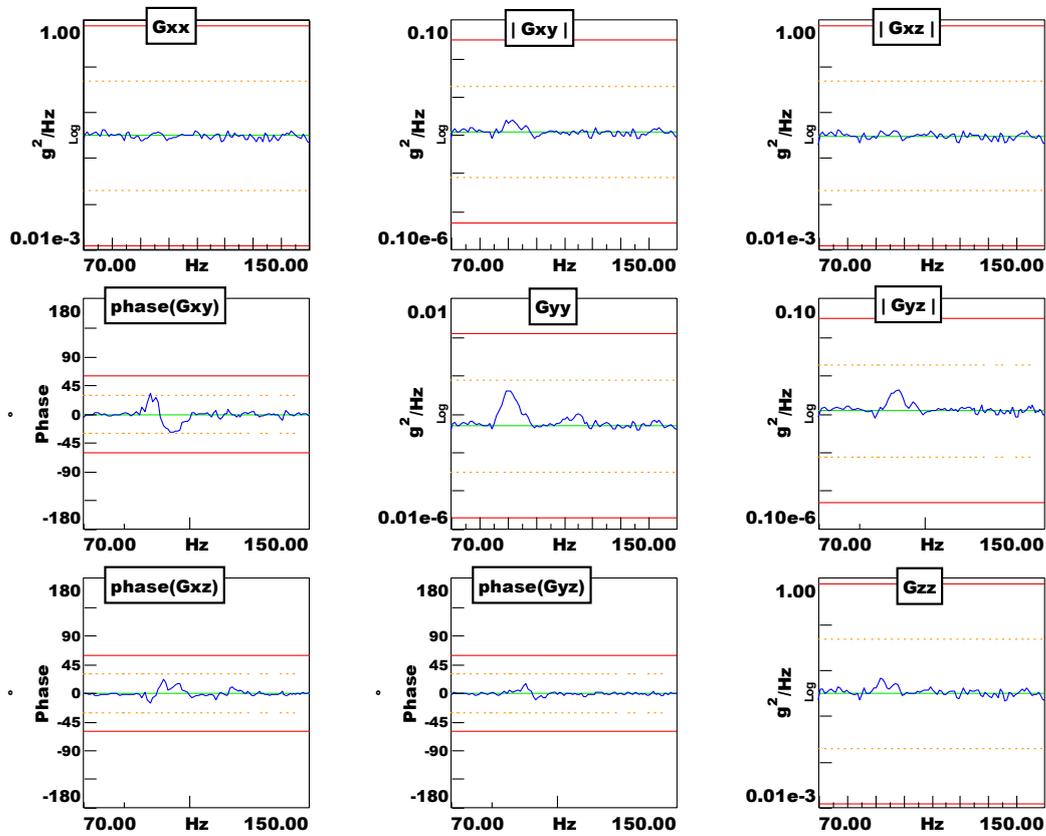


Figura 48: Matrice di controllo per test biassiale a 0.5 gRMS in alta coerenza. Le PSD G_{xx} e G_{zz} hanno un valore RMS di 0.5 g, G_{yy} di 0.02g. Le fasi delle cross-PSD sono impostate a 0° e le coerenze fra gli assi 0.98

short-time del segnale accelerometrico sulla massa a sbalzo, rispettivamente per i test in alta coerenza e per quelli in bassa coerenza. Il calo di frequenza naturale è stato monitorato sia in direzione X che in direzione Z dal momento che nei test biassiali ci si aspetta che la cricca, una volta nucleata, propaghi preferibilmente in una delle due direzioni di eccitazione. I test sono stati condotti monitorando contemporaneamente entrambe le direzioni e fermando il test al raggiungimento dell'80% di frequenza naturale iniziale di una delle due.

Dal confronto si nota come sia sempre la frequenza naturale misurata in direzione verticale a raggiungere prima la soglia dell'80% del valore iniziale rispetto la corrispondente misura in direzione orizzontale. È probabile che

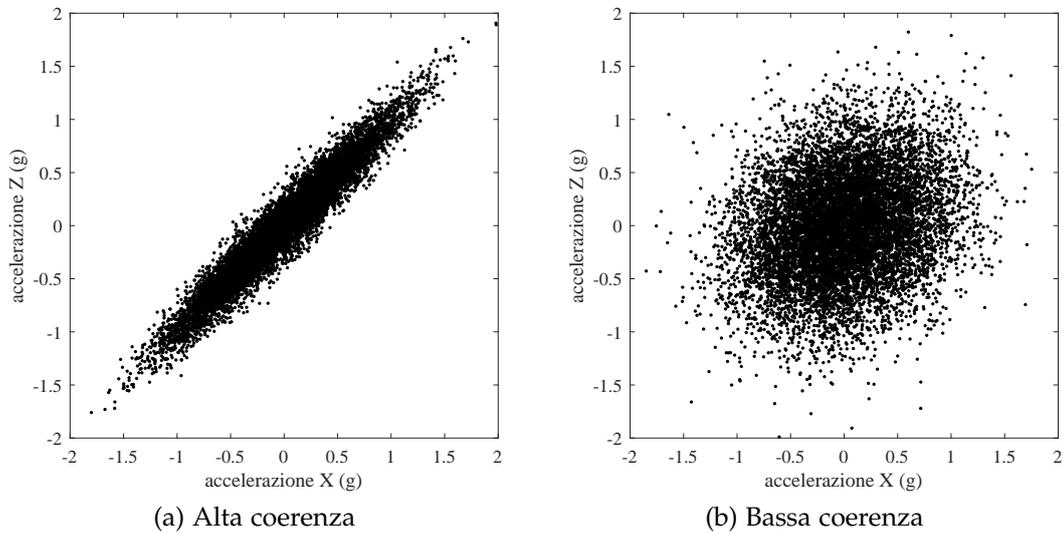
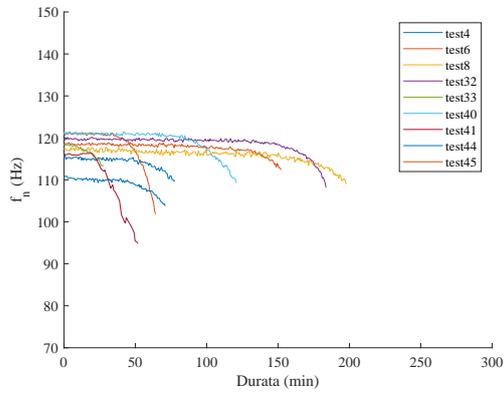
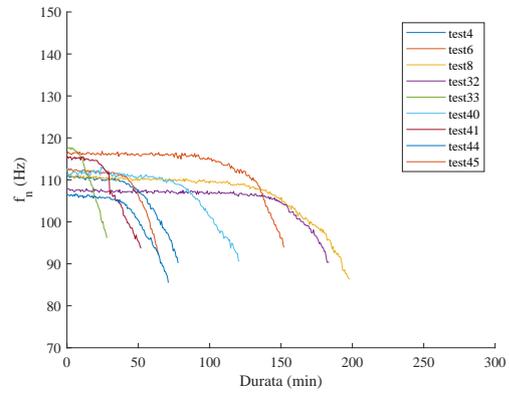


Figura 49: Scatter plot delle accelerazioni sugli assi X e Z in test biassiali a 0.5 gRMS

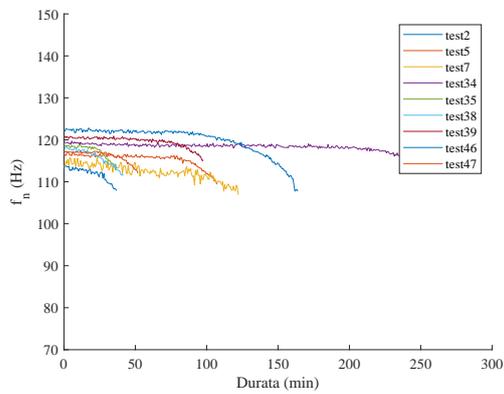
la causa del fenomeno sia da imputare all'effetto della forza di gravità che agisce proprio lungo la direzione Z. Per questo motivo si è scelto di applicare lo stimatore H_1 solo per le misure in direzione Z in entrambe le tipologie di test e tracciare i grafici di fig.52 che evidenziano la dispersione dei parametri modali fra inizio e fine test.



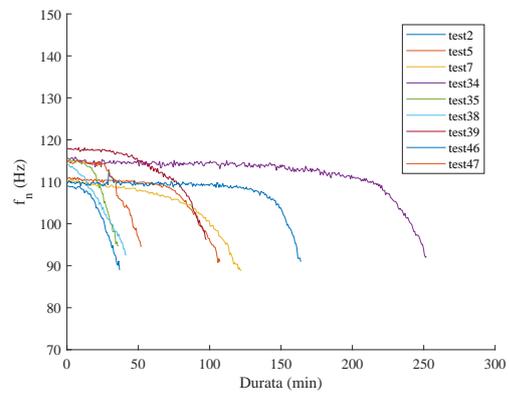
(a) 0.5g – Direzione X



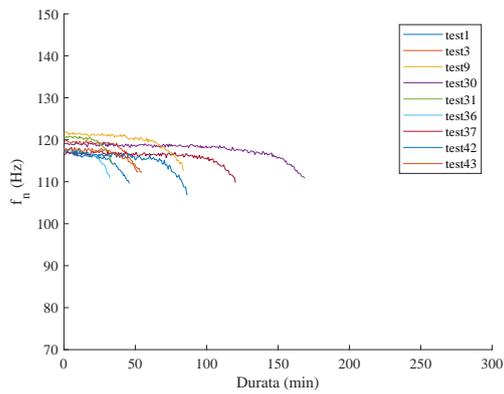
(b) 0.5g – Direzione Z



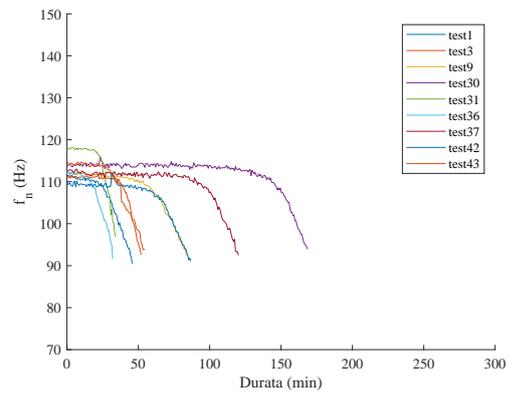
(c) 0.55g – Direzione X



(d) 0.55g – Direzione Z

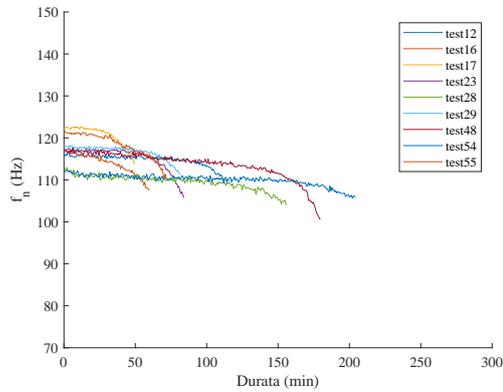


(e) 0.6g – Direzione X

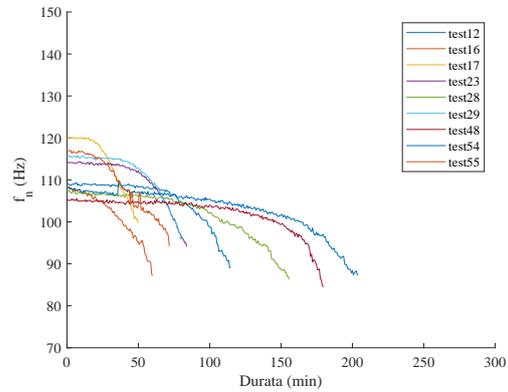


(f) 0.6g – Direzione Z

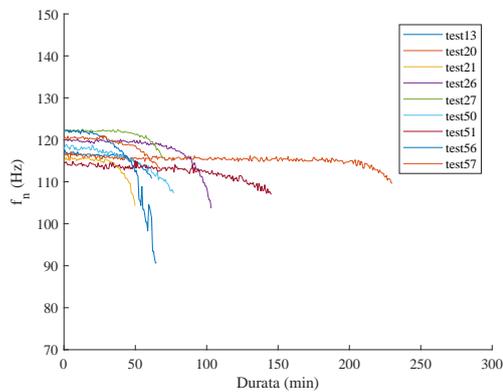
Figura 50: Variazione della frequenza naturale misurata in direzione X e Z per i test biassiali in alta coerenza



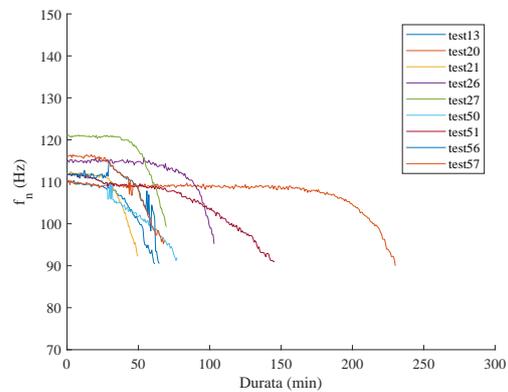
(a) 0.5g – Direzione X



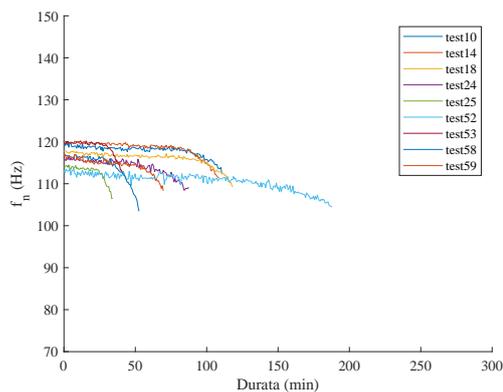
(b) 0.5g – Direzione Z



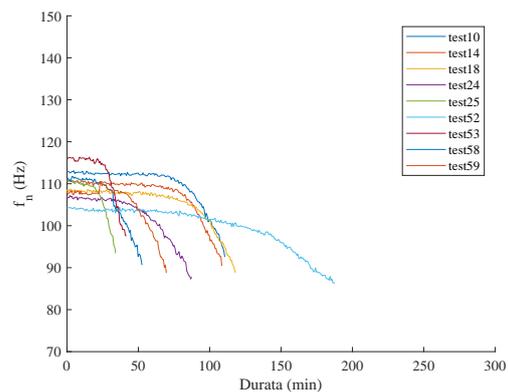
(c) 0.55g – Direzione X



(d) 0.55g – Direzione Z

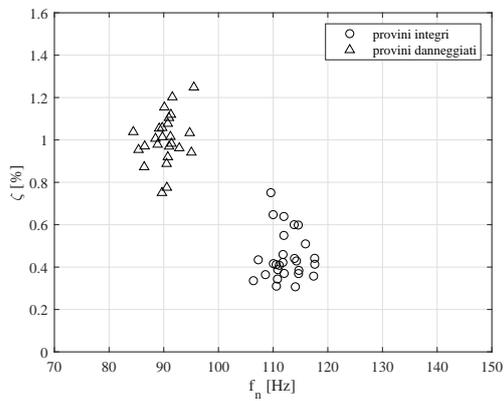


(e) 0.6g – Direzione X

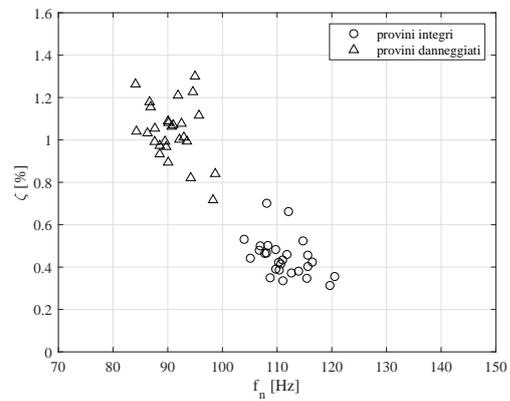


(f) 0.6g – Direzione Z

Figura 51: Variazione della frequenza naturale misurata in direzione X e Z per i test biassiali in bassa coerenza



(a) Alta coerenza



(b) Bassa coerenza

Figura 52: Variazione dei parametri modali fra inizio e fine dei test biassiali

ANALISI CRITICA DELL'INVERSE POWER LAW

Nel paragrafo 2.8 sono stati affrontati i passaggi teorici che hanno portato alla definizione della inverse power law:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\ddot{x}_{rms,2}}{\ddot{x}_{rms,1}} \right)^k \quad (76)$$

La dimostrazione si basa su ipotesi semplificative che nella pratica ingegneristica dei test vibrazionali risultano spesso troppo restrittive. Ad esempio il fatto di considerare il valore RMS dello spostamento relativo linearmente proporzionale al valore RMS di accelerazione imposto alla base del sistema è un'ipotesi che non tiene conto della reale dinamica del componente, ovvero del fatto che l'accelerazione della base è legata allo spostamento relativo da una funzione dipendente dalla frequenza. Inoltre la legge non tiene in considerazione la diminuzione di frequenza di risonanza al propagarsi del danneggiamento: un fenomeno che fa sì che la risposta dinamica non sia stazionaria per tutta la durata di un test accelerato.

Altri limiti, inoltre, possono essere ravvisati nella formulazione [23]:

- l'eq.53 è, a rigore, corretta solo per stati tensionali monoassiali. In realtà, durante un test accelerato con eccitazione monoassiale, lo stato tensionale nella zona più sollecitata può essere multiassiale, per via dei modi di vibrare del coinvolti
- strutture complesse possono essere composte di materiali differenti, ognuno con le proprie caratteristiche di resistenza a fatica
- quando la sollecitazione è stocastica, l'esponente k dipende dai parametri di banda (eq.14) dell'eccitazione e, in generale, la pendenza del-

la curva S-N è maggiore per test a fatica random rispetto al caso di sollecitazioni sinusoidali (vedi fig.53).

Le semplificazioni introdotte sono responsabili della differenza fra il tempo di test previsto e la durata reale e sono particolarmente penalizzanti quando l'accelerazione imposta alla tavola eccita risonanze del sistema.

Per ovviare a questi limiti è prassi impiegare una correzione dell'esponente k , di seguito indicato con b in accordo alla formulazione presentata nel capitolo 1.

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\ddot{x}_{rms,2}}{\ddot{x}_{rms,1}} \right)^b \tag{77}$$

Valori tipici di b oscillano fra 4 e 8 [4], a seconda dell'esperienza maturata dal progettista o dall'azienda che produce il componente: ad esempio è tipico nell'industria aeronautica mantenere un database interno con i valori più appropriati da utilizzare a seconda dell'impiego. Questo ha come conseguenza la perdita del significato fisico originale dell'esponente, che diventa un semplice fattore empirico utile per mitigare gli effetti che influenzano la resistenza a fatica di cui l'inverse power law non tiene in considerazione.

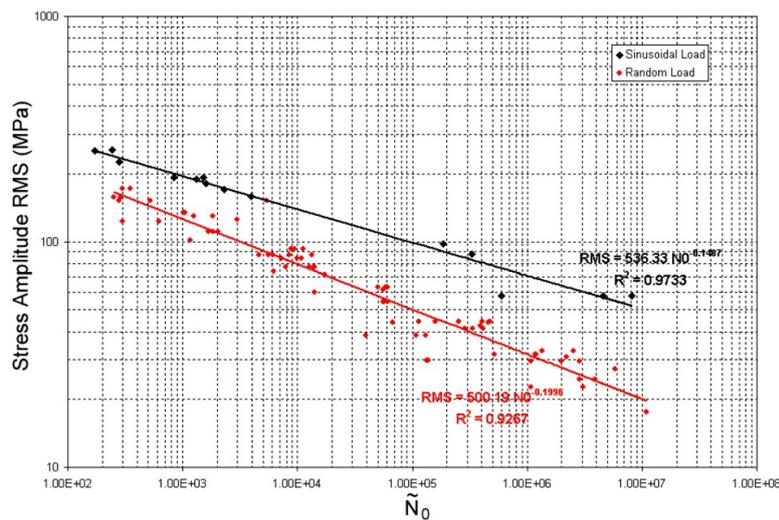


Figura 53: Pendenza della curva S-N per sollecitazioni sinusoidali e random (da [63])

Il fatto che la legge non consideri la risposta dinamica del componente e che discenda da considerazioni puramente monoassiali sono state le principali ragioni che hanno portato all'analisi critica affrontata in questo capitolo.

5.1 ANALISI DEI TEST MONOASSIALI

L'eq.77 se rappresentata in un grafico doppio logaritmico deve risultare in una retta con pendenza b . La prima verifica che si può fare alle misure sperimentali è verificare se effettivamente la distribuzione dei dati è approssimabile con una retta in tale grafico.

La normativa ASTM E739 [64] suggerisce di utilizzare il test statistico di Fisher (o *test F*) per verificare la bontà dell'approssimazione. Il test è applicabile a dati suddivisibili in gruppi (in questo caso i gruppi sono i 3 livelli di eccitazione considerati) e opera confrontando media e varianza di ogni gruppo con i valori assunti dalla retta ai minimi quadrati che approssima la serie di dati. Essendo un test di ipotesi dà in uscita il livello di confidenza con cui la serie di dati è effettivamente approssimabile con una retta. Il test va eseguito a posteriori del tracciamento della retta ai minimi quadrati e, in caso di fallimento, il suggerimento della normativa è quello di approssimare i dati con una legge diversa, ad esempio quadratica o cubica.

La fig.55 mostra la retta approssimante ai minimi quadrati sovrapposta ai dati sperimentali, in un grafico doppio logaritmico. Ai fini dell'indagine critica è necessario utilizzare i reali valori RMS di eccitazione verticale realizzati dallo shaker. La fig.54 ne riporta un confronto per ogni minuto di test dove si nota che il controllo della macchina non mantiene costante l'eccitazione desiderata e, anzi, questa tende sempre a essere leggermente superiore al valore impostato. In particolare si osserva che mediamente il valore RMS realizzato è 0.03g superiore a quello richiesto.

Le iperboli tratteggiate attorno alla retta sono le bande di confidenza tracciate in accordo alla normativa ASTM E739 e indicano la regione del piano in cui con il 95% di probabilità è possibile individuare la retta ai minimi quadrati. Le bande sono riferite alla retta approssimante e sono legate alla distribuzione dei dati solo indirettamente: non hanno il significato delle bande di previsione che invece individuano la regione di piano che comprende il 95% delle osservazioni sperimentali.

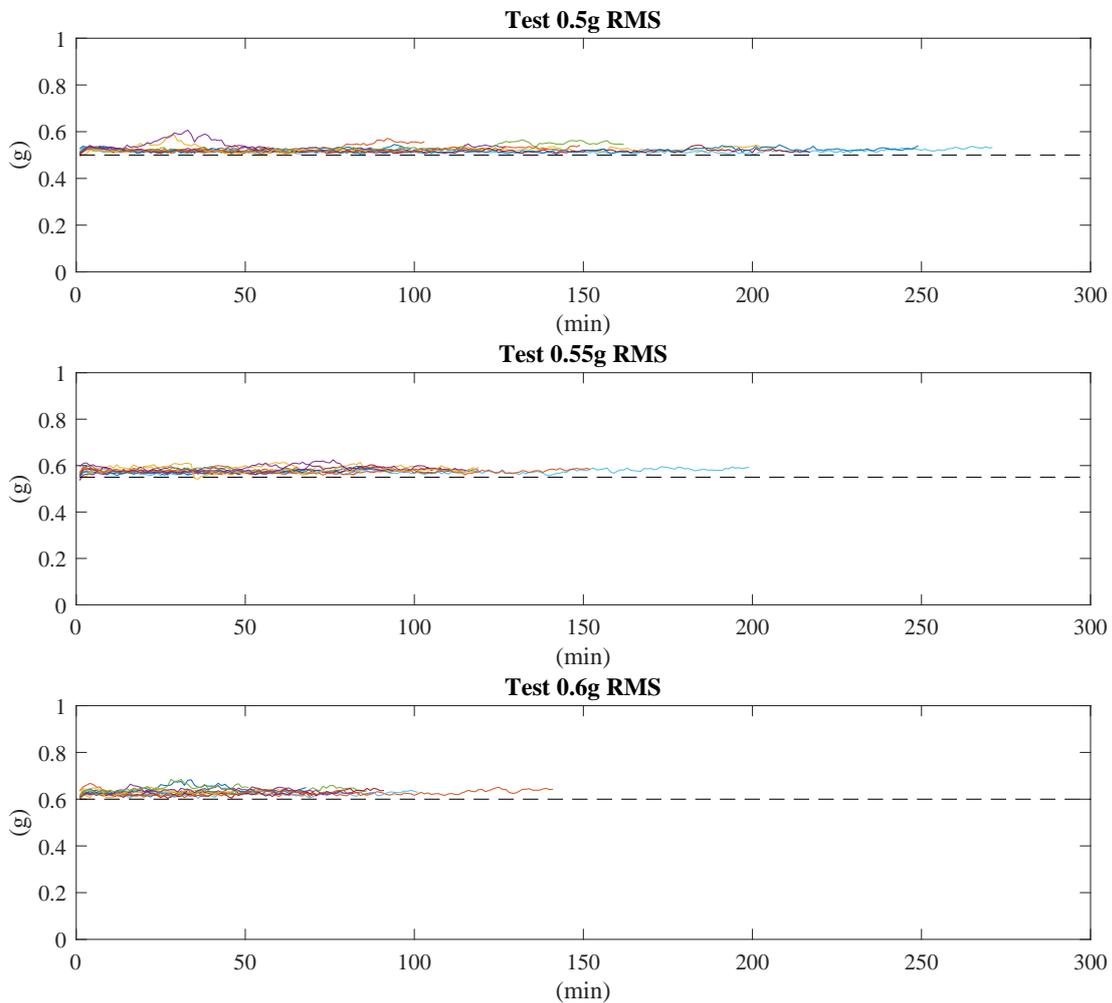


Figura 54: Variabilità dell'accelerazione imposta nei test monossiali

5.1.1 Influenza della non stazionarietà

Nell'introduzione al capitolo si è accennato al fatto che l'inverse power law non tiene conto della modifica di frequenza naturale che si ha come conseguenza della propagazione della cricca. Questo comporta che la risposta dinamica non sia stazionaria durante il test accelerato e quindi che anche la tensione che insiste sull'intaglio a sua volta sia un processo stocastico non stazionario.

Per indagare l'influenza della non stazionarietà si è applicata l'inverse po-

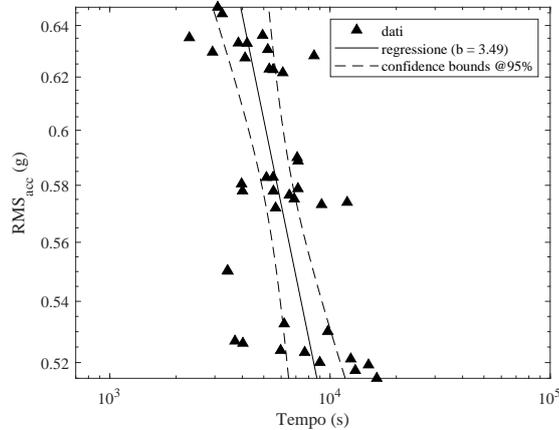


Figura 55: Retta di regressione per le misure dei test monoassiali fino alla diminuzione della frequenza naturale del 20%. Il valore calcolato per l'esponente dell'inverse power law è $b = 3.49$

wer law alle misure sperimentali già effettuate considerando solo la durata di test in cui la frequenza naturale può essere considerata costante, ovvero fino a una diminuzione massima del 3% della frequenza naturale iniziale. In questo modo la tensione può essere considerata stazionaria, in accordo alla teoria che sta alla base dell'inverse power law. Le durate dei test sono influenzate solo dall'istante di nucleazione della cricca ma non dalla sua velocità di propagazione, responsabile in parte della dispersione dei grafici di fig.44. Per la determinazione dell'istante in cui si raggiunge la diminuzione del 3% si è fatto ricorso alla legge approssimata di Whiteman illustrata in precedenza, così da evitare che le fluttuazioni di frequenza naturale rilevabili nei grafici delle short-time (vedi fig.44) potessero influenzare negativamente l'individuazione di tale istante.

La fig.56 mostra la nuova retta di regressione per i test monoassiali con tensione stazionaria. Anche per questi test accorciati il test di Fisher risulta soddisfatto e i dati sperimentali approssimabili con una retta.

In tab.8 sono riportate le statistiche di dispersione dei dati per i test monoassiali, sia considerati nella loro interezza, sia solo fino al calo del 3% della frequenza di risonanza. Risulta chiaro come le eccitazioni effettivamente imposte dalla tavola vibrante siano mediamente superiori al valore desiderato di 0.03g, e il fenomeno si riscontra in tutti i test dal momento che la deviazione standard dell'accelerazione è molto contenuta. Discorso diverso invece per la

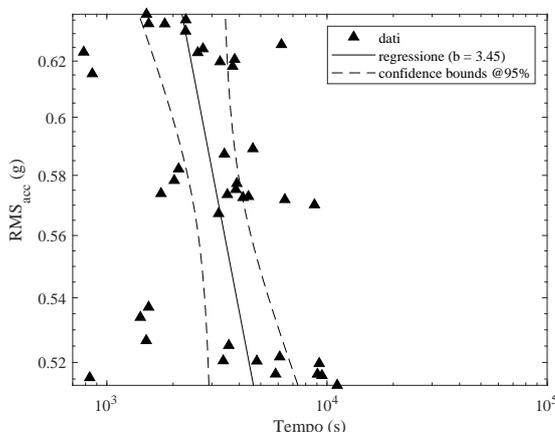


Figura 56: Retta di regressione per le misure dei test monoassiali fino a una diminuzione della f_n del 3%. Il valore calcolato per l'esponente dell'inverse power law è $b = 3.45$

durata media e relativa deviazione standard: sia nei test completi che in quelli accorciati la dispersione risulta elevata e comparabile sia negli esperimenti con diminuzione del 20% che in quelli con 3% della f_n . La motivazione è da ricercare nella natura statistica del fenomeno della fatica che fa sì che anche in presenza di tensione stazionaria l'istante di inizio propagazione della cricca può essere suscettibile di importanti fluttuazioni.

Tabella 8: Statistiche descrittive della dispersione delle misure sperimentali nei test monoassiali

	Riduzione del 20% della f_n			Riduzione del 3% della f_n		
	0.5g	0.55g	0.6g	0.5g	0.55g	0.6g
Durata media (s)	8453	6598	4557	5223	4013	2572
Dev. std. durata (s)	4540	2146	1638	3560	1890	1461
Accelerazione media (g)	0.53	0.58	0.63	0.52	0.58	0.63
Dev. std. accelerazione (g)	0.011	0.006	0.009	0.007	0.007	0.008

5.1.2 Individuazione di outlier statistici

Nell'ottica di migliorare l'attendibilità delle misure è utile cercare e eliminare dal campione statistico eventuali outlier. Per l'individuazione si è fatto ricorso alla rappresentazione boxplot introdotta da Tukey [65], poiché è un metodo che, al contrario di altri, non necessita della conoscenza a priori della distribuzione statistica dei dati. Nella rappresentazione boxplot i dati vengono suddivisi in quartili: nell'ordine viene tracciato per primo il secondo quartile, corrispondente alla mediana dei dati, poi il primo quartile, corrispondente alla mediana della prima metà dei dati e infine il terzo quartile, cioè la mediana della seconda metà di dati (fig.57). Il primo e il terzo quartile vengono uniti tracciando una scatola stilizzata e la larghezza della scatola prende il nome di *Interquartile Range (IQR)*. Le linee stilizzate che partono dagli estremi della scatola si estendono ad abbracciare i dati che distano fino a una lunghezza massima di 1.5 volte l'IQR: i dati che invece superano il limite sono da considerarsi outlier statistici [66].

In fig.58 sono mostrati gli outlier per i test monoassiali, rispettivamente per i test completi in cui la frequenza naturale è calata del 20% e per i test accorciati alla diminuzione del 3%. È interessante notare come per il livello di eccitazione 0.55 gRMS il test numero 17 figura come outlier sia quando il danno ha appena nucleato, sia quando è propagato fino a ridurre la frequenza di risonanza del 20%. Invece nell'eccitazione a 0.6 gRMS il test numero 6 viene rilevato come outlier solo se si considera la durata di test necessaria a innescare la cricca, poi la velocità di propagazione è tale da far raggiungere al provino la soglia del 20% di diminuzione di frequenza naturale in un tempo comparabile a quello degli altri test.

Per coerenza il campione statistico è stato epurato di entrambi i test in tutte e due le casistiche di riduzione di frequenza naturale, portando la penden-

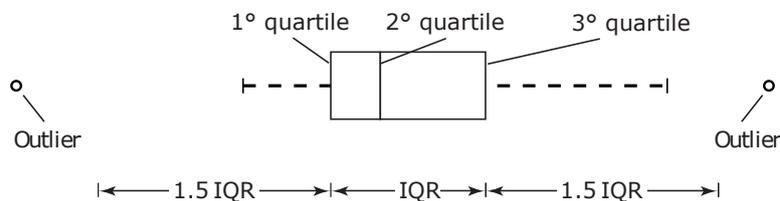


Figura 57: Schema della rappresentazione boxplot

za della retta di regressione da 3.49 a 3.74 per i test considerati nella loro interezza, e da 3.45 a 3.85 nei test accorciati.

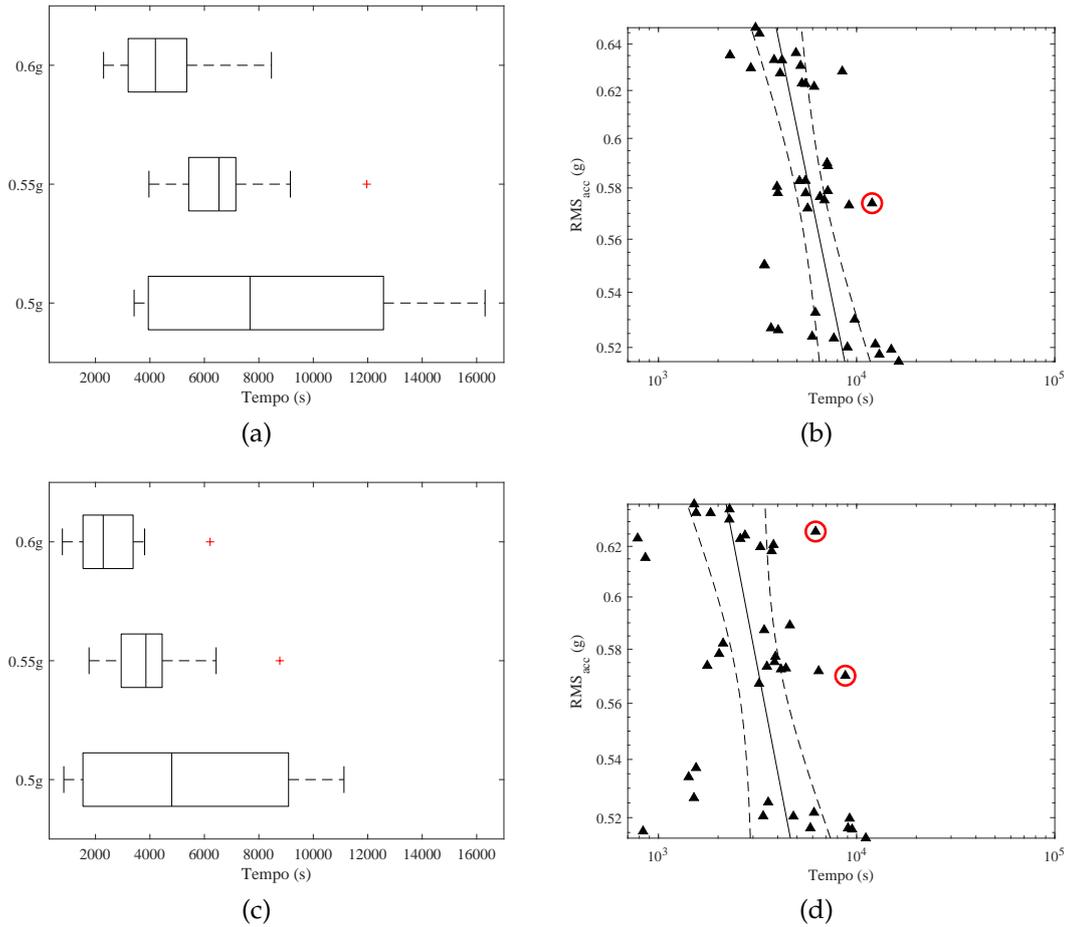


Figura 58: Outlier individuati dai grafici boxplot nei test monoassiali: a) boxplot relativo ai test con riduzione della f_n del 20% b) outlier corrispondente nei test interi c) boxplot relativo ai test con riduzione della f_n del 3%, d) outlier corrispondenti nei test accorciati. Nota: i boxplot sono in scala lineare, le rette di regressione in scala logaritmica

5.1.3 Stima della tensione sull'intaglio

Nel paragrafo 2.8 si era dimostrato che l'inverse power law è corretta quando al posto del rapporto fra i valori RMS di accelerazione alla base del sistema SDOF si utilizza il rapporto fra i valori RMS di tensione nel punto più sollecitato. In questo caso la legge si ricava direttamente dalla legge di Basquin e l'esponente b diventa la pendenza della curva S-N del materiale (eq.53).

Purtroppo le dimensioni ridotte dell'intaglio non hanno permesso di strumentare i provini con estensimetri per misurare l'effettiva deformazione istantanea. In questo paragrafo tuttavia si illustrerà una procedura approssimata per poter ottenere una stima della tensione nell'intaglio causata dal momento flettente, utilizzando le accelerazioni misurate a monte e a valle del provino.

Si consideri la trave a mensola di fig.59 che schematizza un provino sotto test in cui con \ddot{x} si indica l'accelerazione agente alla base e \ddot{y} l'accelerazione misurata sull'estremo libero.

Dalla misura delle accelerazioni si risale agevolmente alle corrispondenti PSD $G_{\ddot{x}\ddot{x}}$ e $G_{\ddot{y}\ddot{y}}$ e anche alla cross-PSD $G_{\ddot{x}\ddot{y}}$, che contiene l'informazione sullo sfasamento delle accelerazioni fra ingresso e uscita del sistema SDOF. L'accelerazione relativa fra l'estremo libero e l'incastro è:

$$\ddot{z}(t) = \ddot{y}(t) - \ddot{x}(t) \quad (78)$$

Passando alla funzione di autocorrelazione e poi al dominio delle frequenze attraverso il teorema di Wiener-Khinchin (par.2.4):

$$\begin{aligned} R_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau) &= E\{\ddot{z}(t)\ddot{z}(t+\tau)\} \\ &= E\{(\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t))(\ddot{y}(t+\tau) - \ddot{x}(t+\tau))\} \\ &= R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) + R_{\ddot{y}\ddot{y}}(\tau) - R_{\ddot{x}\ddot{y}}(\tau) - R_{\ddot{y}\ddot{x}}(\tau) \end{aligned} \quad (79)$$

$$S_{\ddot{z}\ddot{z}}(f) = S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f) + S_{\ddot{y}\ddot{y}}(f) - S_{\ddot{x}\ddot{y}}(f) - S_{\ddot{y}\ddot{x}}(f) \quad (80)$$



Figura 59: Schematizzazione del sistema di prova come trave a sbalzo

si giunge a un'equazione che esprime la PSD di accelerazione relativa in funzione delle PSD e cross-PSD delle accelerazioni misurate sperimentalmente

$$\begin{aligned} G_{zz}(f) &= G_{\ddot{x}\ddot{x}}(f) + G_{\ddot{y}\ddot{y}}(f) - G_{\ddot{x}\ddot{y}}(f) - G_{\ddot{x}\ddot{y}}^*(f) = \\ &= G_{\ddot{x}\ddot{x}}(f) + G_{\ddot{y}\ddot{y}}(f) - 2\text{Re}[G_{\ddot{x}\ddot{y}}(f)] \end{aligned} \quad (81)$$

in cui con $G_{\ddot{x}\ddot{y}}^*$ si intende la funzione complessa coniugata di $G_{\ddot{x}\ddot{y}}$ e con $\text{Re}[\cdot]$ la sola parte reale.

La corrispondente PSD dello spostamento relativo z si calcola come:

$$G_{zz}(f) = \frac{G_{\ddot{z}\ddot{z}}(f)}{(2\pi f)^4} \quad (82)$$

A questo punto, facendo uso dell'ipotesi che la tensione causata dal momento flettente è proporzionale allo spostamento relativo degli estremi della trave, in accordo alla eq.32 si può risalire alla PSD di tensione:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\sigma}(\tau) &= E\{\sigma(t)\sigma(t+\tau)\} = \\ &= E\{\bar{C}z(t)\bar{C}z(t+\tau)\} = \\ &= \bar{C}^2 R_{zz}(\tau) \end{aligned} \quad (83)$$

$$S_{\sigma\sigma}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\sigma\sigma}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \bar{C}^2 S_{zz}(f) \quad (84)$$

o, equivalentemente, $G_{\sigma\sigma}(f) = \bar{C}^2 G_{zz}(f)$.

Infine si giunge alla formulazione del valore RMS di tensione che si stava cercando:

$$\sigma_{\text{rms}} = \sqrt{\int_0^{+\infty} G_{\sigma\sigma}(f) df} = \bar{C} \sqrt{\int_0^{+\infty} G_{zz}(f) df} = \bar{C} z_{\text{rms}} \quad (85)$$

Dalla precedente si vede che il valore RMS di tensione è legato dalla stessa costante \bar{C} al valore RMS di spostamento relativo, a sua volta calcolabile quando sono note le PSD di accelerazione agli estremi della trave.

Rimane da esplicitare la costante \bar{C} che si può ricavare dal modello strutturale di trave elastica come la costante che lega la freccia statica di una trave a mensola alla tensione nel punto di momento flettente massimo. Da [58] la costante si può valutare come:

$$\bar{C} = \frac{3Er}{L^2} K_t \quad (86)$$

dove E è il modulo elastico del materiale, r il raggio di fondo intaglio e L la distanza dal centro intaglio al baricentro della massa a sbalzo. K_t è il coefficiente statico di concentrazione delle tensioni e può essere considerato uguale al coefficiente di concentrazione dinamico K_f per le considerazioni fatte nel par.3.3.

La formulazione di eq.53 dell'inverse power law se rappresentata in un grafico logaritmico dà una curva funzionalmente equivalente alla curva S-N del materiale di cui è costituito il componente oggetto di test. Per ottenere a tutti gli effetti la curva S-N utilizzata normalmente nei test a fatica stocastica occorre rappresentare in ordinata il valore RMS di tensione e in ascissa il numero totale di cicli corrispondenti. Se è lecito considerare la risposta dinamica del sistema in banda stretta, il numero di cicli corrisponde al numero totale di attraversamenti dello zero con pendenza positiva del segnale di tensione. Anche questa è una grandezza che si può calcolare conoscendo la PSD di tensione: infatti, nota $G_{\sigma\sigma}$ il numero di attraversamenti per secondo si ottiene applicando la (eq.12). Dalla moltiplicazione per il numero di secondi totali T di un test si risale al numero di cicli totali N_0 cercato:

$$N_0 = n_0^+ T \quad (87)$$

La procedura descritta è applicabile quando il sistema in oggetto può essere schematizzato come un sistema a un grado di libertà eccitato alla base, in cui è lecito ritenere tensioni e spostamento relativo legate da una costante.

La curva S-N ottenibile risulta influenzata in particolar modo da due fattori:

1. la non stazionarietà del segnale di tensione, causato dal fatto che al propagare del danno la risposta dinamica del sistema cambia, modificando anche lo stato tensionale

- il passaggio dal tempo misurato al numero di cicli totali dal momento che n_0^+ cambia nel tempo essendo funzione della risposta dinamica.

La fig.60 mostra, per i test monoassiali, la rappresentazione di tensione RMS e numero di cicli ottenuta con le formule precedenti. Le curve sono assimilabili a curve S-N e la pendenza è l'esponente k , caratteristico del materiale, da usare nell'eq.76.

Anche in questo caso la curva ottenuta per i test fino alla riduzione della frequenza di risonanza del 20% è stata comparata con la corrispondente relativa alla riduzione del 3%. L'effetto della non stazionarietà è più evidente rispetto alle curve accelerazione-tempo delle fig.55 e 56 in cui la pendenza non veniva modificata sostanzialmente dalla velocità di propagazione del danneggiamento. Nei grafici tensione-cicli, il trascurare la parte di test in cui la tensione non è stazionaria fa passare il coefficiente k da 4.22 a 3.69, una differenza del 13%.

A rigore il valore più corretto da considerare dovrebbe essere quello relativo ai test con tensione stazionaria, anche se la procedura di calcolo illustrata è un'approssimazione del valore RMS di tensione reale che si sarebbe potuto calcolare solo strumentando i provini con estensimetri.

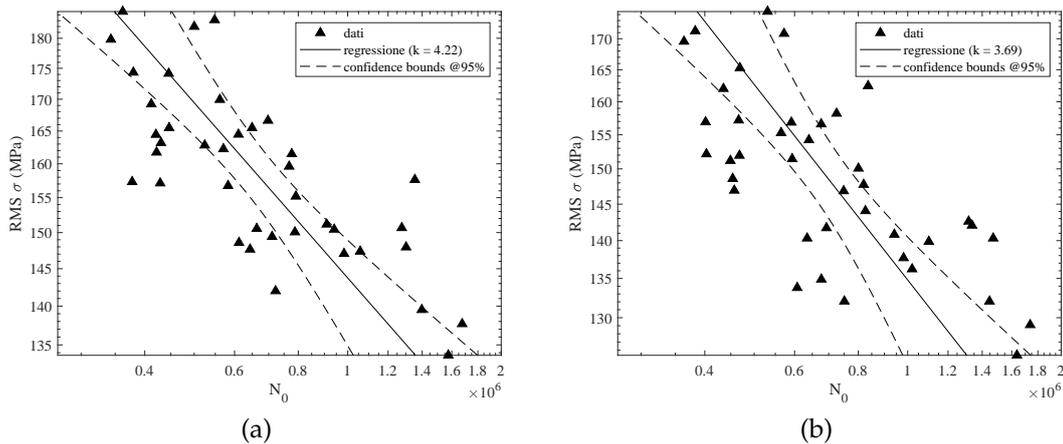


Figura 60: (a) Curva S-N per test monoassiali con riduzione della f_n del 20% (b) Curva S-N per test monoassiali con riduzione della f_n del 3%

5.1.4 *Analisi dell'esponente b*

Ai fini di una critica del valore più opportuno dell'esponente da inserire nell'inverse power law risulta utile indagare come è influenzato il valore b se, in una campagna sperimentale, si effettuano rilievi in due livelli di eccitazione anziché in tre o più. La fig.61 mostra il valore dell'esponente quando si considerano i test effettuati a coppie. Il confronto è fatto sulle misure epurate dagli outlier e confrontando sia il caso di riduzione della frequenza di risonanza del 20% sia del 3%.

In tab.9 e 10 è riportato un confronto delle pendenze calcolate con il valore ottenuto considerando tutti i test nella loro globalità. Come è facile intuire, indipendentemente dalla variazione di frequenza naturale considerata, il valore di b prendendo le coppie di livelli di eccitazione più estremi è intermedio al valore trovato se si considerano livelli di eccitazione vicini. Questo suggerisce di scegliere livelli di eccitazione ben separati fra loro se si intraprende una campagna sperimentale volta a definire una nuova specifica per test accelerati su un componente meccanico. Infatti il valore di b ottenuto dalla coppia di test a 0.6 – 0.55 gRMS è il valore che meno si discosta da quello ottenuto tracciando la retta di regressione da tutti i test che, verosimilmente, è il valore più corretto da considerare all'esponente dell'inverse power law.

Vista la geometria semplice del provino in esame e dei profili di eccitazione impiegati si può ritenere che l'osservazione rimanga valida anche per campagne sperimentali effettuate su componenti meccanici reali.

Tabella 9: Confronto dei valori dell'esponente b calcolati considerando i livelli di eccitazione a coppie rispetto lo stesso valore ottenuto considerando tutti i test (riduzione della f_n del 20%)

	b considerando test a coppie	b considerando tutti i test	Errore %
test 0.6g – 0.55g	4.79		22%
test 0.55g – 0.5g	3.71	3.74	-0.6%
test 0.6g – 0.5g	3.79		1%

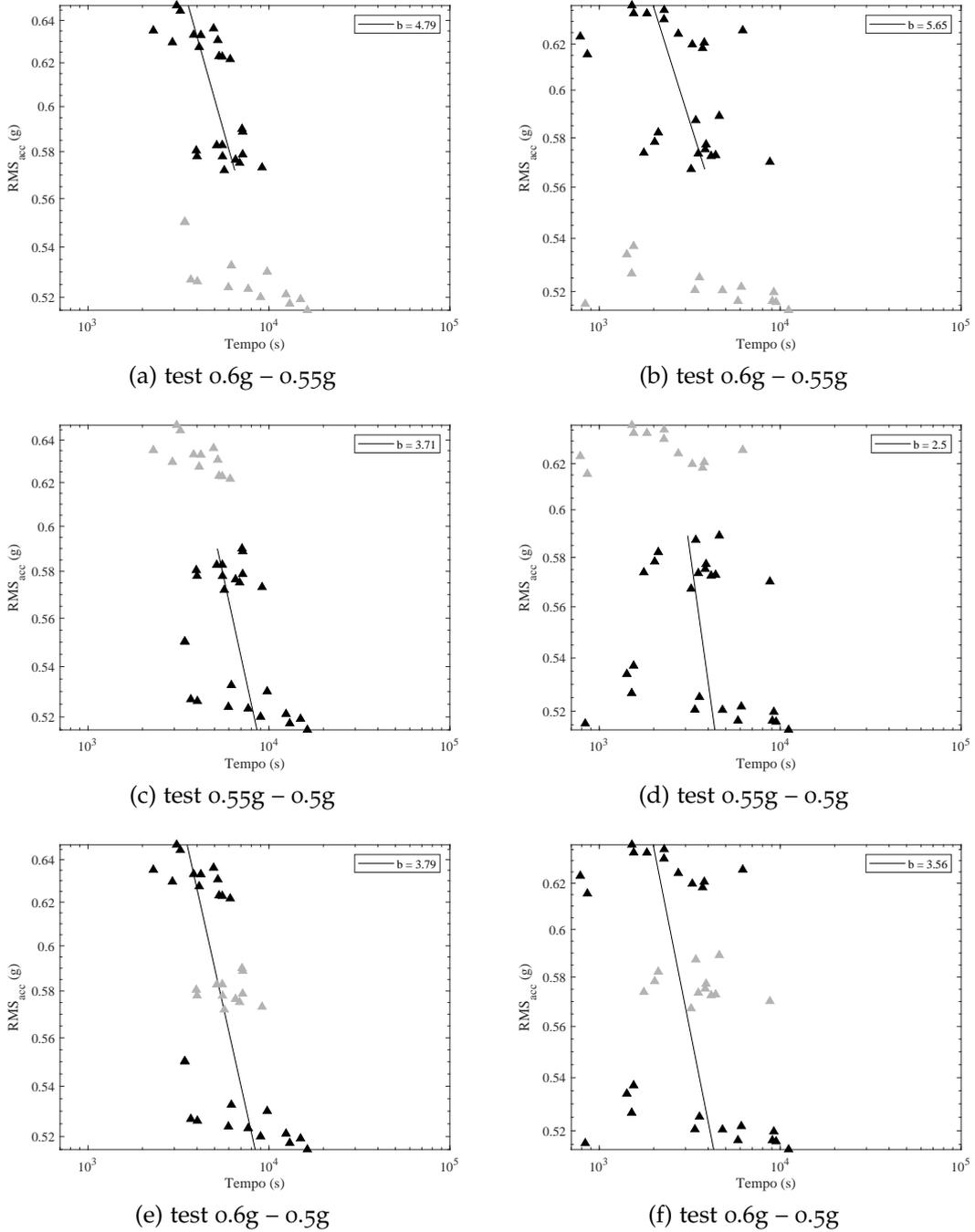


Figura 61: Confronto dell'esponente b secondo la coppia di livelli di eccitazione considerata: nella colonna di sinistra i test con riduzione della f_n del 20%, nella colonna di destra i test con riduzione del 3%. In grigio: il livello di eccitazione non considerato

Tabella 10: Confronto dei valori dell'esponente b calcolati considerando i livelli di eccitazione a coppie rispetto lo stesso valore ottenuto considerando tutti i test (riduzione della f_n del 3%)

	b considerando test a coppie	b considerando tutti i test	Errore %
test 0.6g – 0.55g	5.65		46.8%
test 0.55g – 0.5g	2.50	3.85	-35.1%
test 0.6g – 0.5g	3.56		-7.5%

5.2 ANALISI DEI TEST BIASSIALI

Come illustrato precedentemente l'inverse power law, a rigore, è valida solo per stati tensionali monoassiali. La particolare geometria del provino adottata fa sì che, anche a fronte di una eccitazione multiassiale, sia presente sempre uno stato tensionale monoassiale, causato dal momento flettente. Tuttavia la particolarità dei test multiassiali eseguiti sta nel fatto che la posizione della zona di maggior concentrazione di tensioni può variare continuamente lungo la circonferenza dell'intaglio a causa della composizione vettoriale delle componenti di eccitazione. In particolare l'effetto è maggiormente apprezzabile nei test in bassa coerenza, in cui la combinazione istantanea delle eccitazioni tende a risultare in direzioni che deviano molto dalla linea retta (vedi fig.49).

L'analisi dei test biassiali ha comportato gli stessi passaggi visti per i test monoassiali per epurare il campione di dati da outlier e studiare l'influenza della non stazionarietà. La stima delle tensioni sull'intaglio non è stata applicata con le formule viste nel paragrafo 5.1.3 perché il loro utilizzo non darebbe risultati affidabili in test in cui il volume di materiale interessato dalle tensioni massime cambia continuamente di posizione.

5.2.1 Test in alta coerenza

Nei test multiassiali è necessario tenere conto del reale livello di eccitazione che agisce sul sistema, data dalla composizione delle eccitazioni dello shaker. Si può dimostrare facilmente che per il valore RMS dell'eccitazione composta

vale la regola di composizione vettoriale. Si consideri infatti un segnale $R(t)$ dato dalla somma vettoriale delle componenti di accelerazione $x(t)$ e $z(t)$:

$$R(t) = \sqrt{x^2(t) + z^2(t)} \quad (88)$$

Se le componenti sono segnali di N punti, il valore RMS della risultante si scrive come:

$$\begin{aligned} \text{RMS}(R) &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + z_i^2)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i^2} = \\ &= \sqrt{\text{RMS}_x^2 + \text{RMS}_z^2} \end{aligned} \quad (89)$$

Poiché nei test effettuati i valori RMS di accelerazione erano uguali per gli assi X e Z , la formula precedente risulta semplificata

$$\text{RMS}(R) = \sqrt{2} \cdot \text{RMS}(x) \quad (90)$$

La fig.62 riporta un confronto fra le misure sperimentali nei test in alta coerenza con la corrispondente retta di regressione. Il confronto è stato fatto sia per le durate fino alla riduzione della frequenza di risonanza del 20% del valore iniziale, sia per le durate in cui la tensione sull'intaglio poteva essere considerata stazionaria.

Rispetto i test monoassiali è evidente il diverso valore di pendenza b , benché in prima approssimazione i test multiassiali possano essere considerati dei monoassiali lungo la bisettrice degli assi di eccitazione. La minore durata generale è da attribuire al maggiore contenuto energetico dell'eccitazione risultante. La diversa pendenza della retta ai minimi quadrati invece può essere giustificabile osservando la forma ellittica di fig.49a rispetto l'analogia dei

test monoassiali (42) in cui si vede come l'asse minore della prima figura sia più grande dell'asse minore della seconda. Ne consegue che la zona di materiale maggiormente stressato non è localizzata in due punti diametralmente opposti dell'intaglio ma distribuita in un volume più grande.

In tab.11 sono riportati i parametri statistici descrittivi della dispersione dei dati raccolti. La tabella evidenzia la grande dispersione delle tempistiche misurate in ogni livello di eccitazione indipendentemente dalla soglia di diminuzione di frequenza naturale, addirittura superiore alla dispersione osservata nei test monoassiali. La precedente considerazione sul volume di materiale coinvolto potrebbe spiegare anche la dispersione delle durate poiché influisce sul percorso di propagazione del danneggiamento.

In fig.63 sono mostrati gli outlier individuati con le rappresentazioni box-plot per i precedenti grafici. Si vede che solo un test può essere considerato outlier (test 30) e solo se considerato per la durata necessaria a innescare la cricca, poi la velocità di propagazione è tale da non farlo più rientrare negli outlier se si considera la durata fino al raggiungimento dell'80% della frequenza di risonanza. L'eliminazione dell'outlier ha un grosso effetto sull'esponente b , facendolo passare da 1.79 a 2.34 nei test considerati nella loro interezza, e da 1.51 a 2.26 nei test accorciati.

Come per i test monoassiali, si è proceduto all'analisi dell'esponente b prendendo in considerazione i livelli di eccitazione a coppie, già epurati dagli outlier. I grafici sono riportati in fig.64 e riassunti in tab.12 e 13 in cui è riportato

Tabella 11: Statistiche descrittive della dispersione delle misure sperimentali nei test biassiali in alta coerenza

	Riduzione del 20% della f_n			Riduzione del 3% della f_n		
	0.5g	0.55g	0.6g	0.5g	0.55g	0.6g
Durata media (s)	6500	6247	4707	4542	4275	3350
Dev. std. durata (s)	3653	4319	2715	3093	3740	2394
Accelerazione media (g)	0.72	0.80	0.87	0.72	0.79	0.86
Dev. std. accelerazione (g)	0.005	0.005	0.007	0.007	0.005	0.005

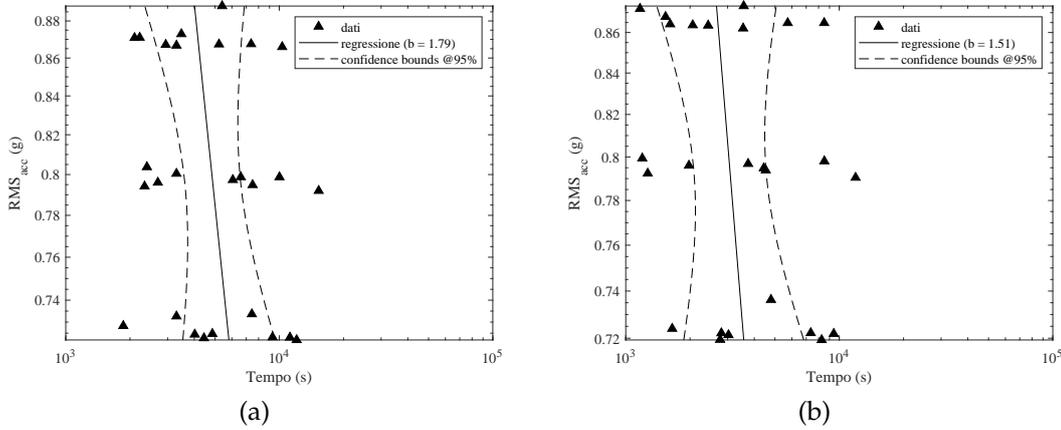


Figura 62: Rette di regressione per i test biassiali in alta coerenza: a) test con riduzione della f_n del 20%, b) test con riduzione della f_n del 3% del valore iniziale

anche un confronto con la pendenza della retta approssimante tutti i test.

Tabella 12: Confronto dei valori dell'esponente b calcolati considerando i livelli di eccitazione a coppie rispetto lo stesso valore ottenuto considerando tutti i test (riduzione della f_n del 20%)

	b considerando test a coppie	b considerando tutti i test	Errore %
test 0.6g – 0.55g	3.80		62.4%
test 0.55g – 0.5g	1.48	2.34	-36.8%
test 0.6g – 0.5g	2.31		-1.3%

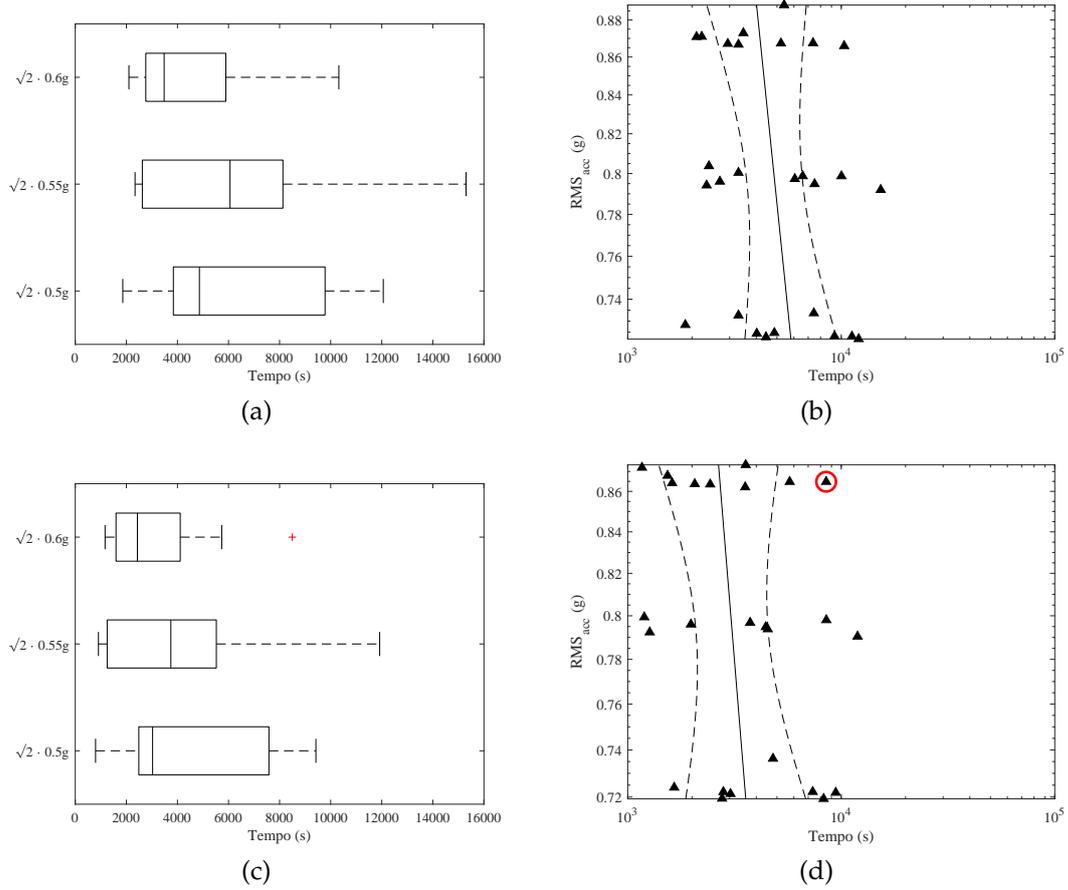


Figura 63: Outlier individuati dai grafici boxplot nei test biassiali in alta coerenza: a) boxplot relativo ai test con riduzione della f_n del 20% b) nei test considerati nella loro interezza non sono individuabili outlier c) boxplot relativo ai test con riduzione della f_n del 3%, d) outlier individuato dal boxplot di fig.c.

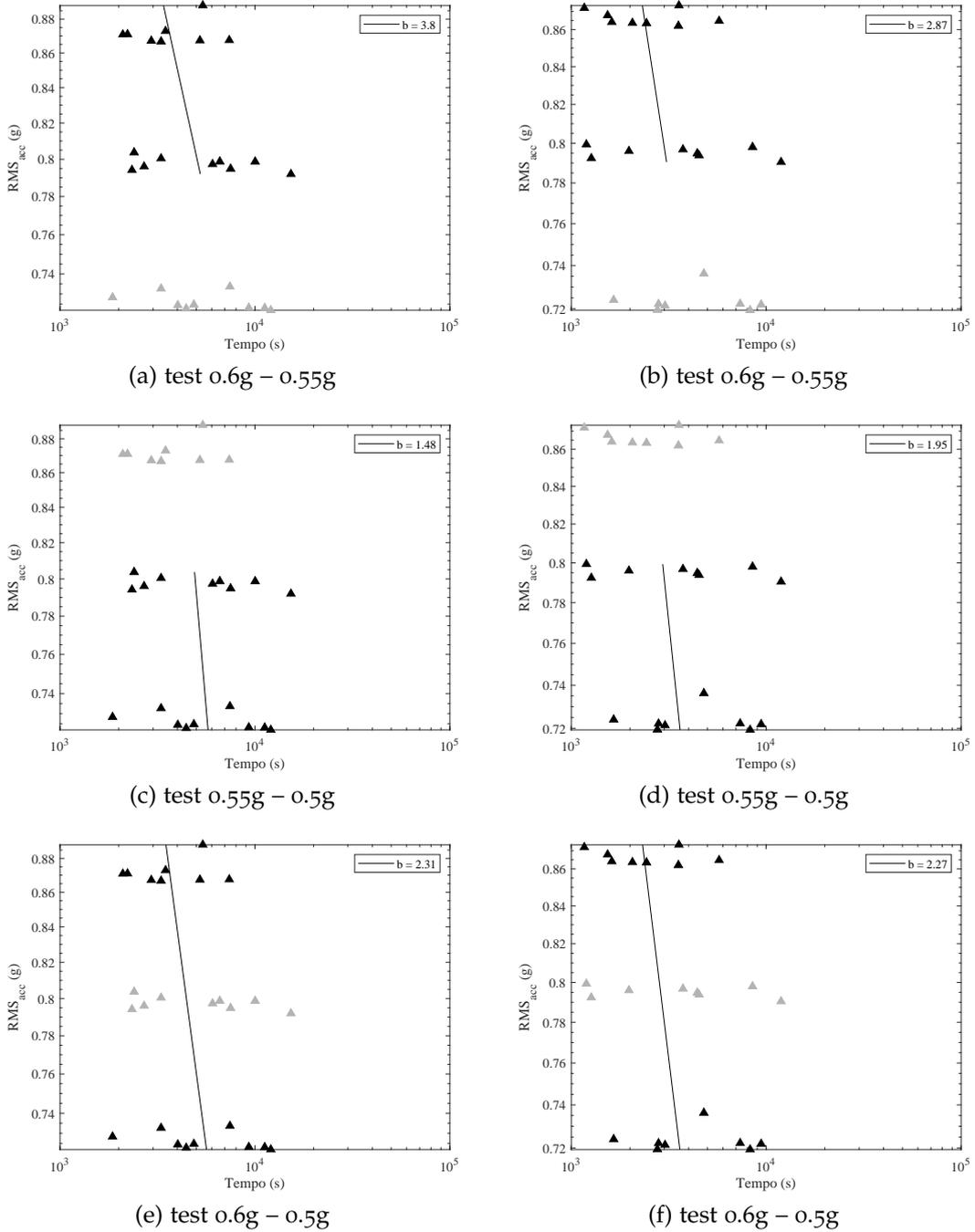


Figura 64: Confronto dell'esponente b secondo la coppia di livelli di eccitazione considerata: nella colonna di sinistra i test con riduzione della f_n del 20%, nella colonna di destra i test con riduzione del 3%

Tabella 13: Confronto dei valori dell'esponente b calcolati considerando i livelli di eccitazione a coppie rispetto lo stesso valore ottenuto considerando tutti i test (riduzione della f_n del 3%)

	b considerando test a coppie	b considerando tutti i test	Errore %
test 0.6g – 0.55g	2.87		27%
test 0.55g – 0.5g	1.95	2.26	-13.7%
test 0.6g – 0.5g	2.27		0.4%

5.2.2 Test in bassa coerenza

In bassa coerenza i test effettuati ricalcano le stesse procedure di analisi viste per i test in alta coerenza. Di seguito si riportano i grafici ottenuti per le rette di regressione calcolate da tutte le misure sperimentali. Le rette (fig.65) appaiono significativamente diverse rispetto gli analoghi test in alta coerenza avendo una pendenza molto pronunciata, sia quando si considerano i test nella loro interezza, sia quando si considerano solo nel tratto di risposta dinamica stazionaria. Il motivo è da attribuire interamente all'effetto della diversa coerenza fra gli assi di eccitazione poiché è l'unico parametro modificato dai test precedenti.

È verosimile che la modifica di tale parametro influisca in modo diverso sul modo di propagare della cricca, anche alla luce dei grafici di fig.49 in cui è evidente come la direzione istantanea dell'eccitazione risultante si discosti dalla linea retta molto più dei test con alta coerenza. L'effetto è tale che le durate dei test sono mediamente molto simili indipendentemente dal livello di eccitazione scelto: questa considerazione è ancora più evidente quando si considerano i test nella porzione stazionaria di risposta dinamica in cui la retta approssimante è praticamente verticale.

La tab.14 riporta i parametri descrittivi della dispersione statistica delle misure sperimentali, comparabili con le dispersioni osservate nei test in alta coerenza.

In fig.66 sono mostrate le rappresentazioni boxplot con i relativi outlier individuati. Solo un test (test 20) è classificabile come outlier, sia considerando la riduzione della frequenza di risonanza del 20%, sia considerando solo il 3%.

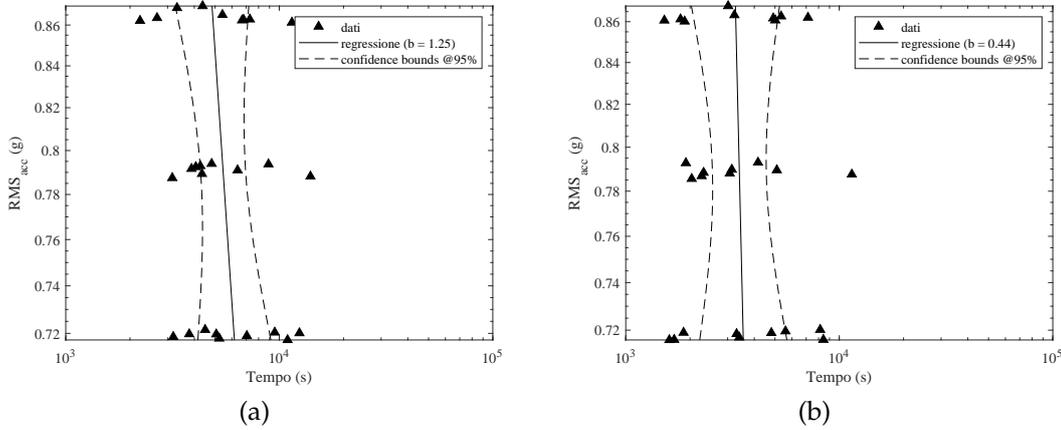


Figura 65: Rette di regressione per i test biassiali in bassa coerenza: a) test con riduzione della f_n del 20%, b) test con riduzione della f_n del 3% del valore iniziale

Tabella 14: Statistiche descrittive della dispersione delle misure sperimentali nei test biassiali in bassa coerenza

	Riduzione del 20% della f_n			Riduzione del 3% della f_n		
	0.5g	0.55g	0.6g	0.5g	0.55g	0.6g
Durata media (s)	6857	5979	5584	4315	3939	3762
Dev. std. durata (s)	3337	3464	2882	2636	3007	1937
Accelerazione media (g)	0.72	0.79	0.86	0.72	0.79	0.86
Dev. std. accelerazione (g)	0.001	0.003	0.003	0.002	0.003	0.002

È un test molto differente dagli altri e la sua eliminazione fa passare il valore dell'esponente b da 1.25 a 1.24 nei test interi, mentre non lo modifica nei test con tensione sull'intaglio stazionaria.

In analogia alle analisi precedenti, in fig.67 è riportato il confronto delle misure sperimentali prendendo i livelli di eccitazione a coppie. È interessante notare come la bassa coerenza porti ad avere una retta di regressione quasi verticale, tanto da risultare altamente influenzata da fluttuazioni statistiche

della dispersione dei dati. I grafici con pendenza negativa non hanno senso fisico perché significherebbe che aumentando il livello di eccitazione aumenta anche la resistenza del provino. Per eccitazioni scorrelate dunque il fatto di utilizzare livelli di eccitazione ben separati assume ancora più importanza rispetto il caso di alta correlazione, inoltre per mitigare l'effetto delle fluttuazioni statistiche è consigliabile adottare un elevato numero di campioni. Le tab.15 e 16 riassumono i valori di b dei grafici e mostrano la differenza di pendenza rispetto i valori ottenibili considerando la globalità dei test. L'elevata sensibilità alle fluttuazioni statistiche è evidenziata bene dalle differenze percentuali con questi ultimi valori.

Tabella 15: Confronto dei valori dell'esponente b calcolati considerando i livelli di eccitazione a coppie rispetto lo stesso valore ottenuto considerando tutti i test (riduzione della f_n del 20%)

	b considerando test a coppie	b considerando tutti i test	Errore %
test 0.6g – 0.55g	-0.46		-137.1%
test 0.55g – 0.5g	2.70	1.24	117.7%
test 0.6g – 0.5g	1.25		0.8%

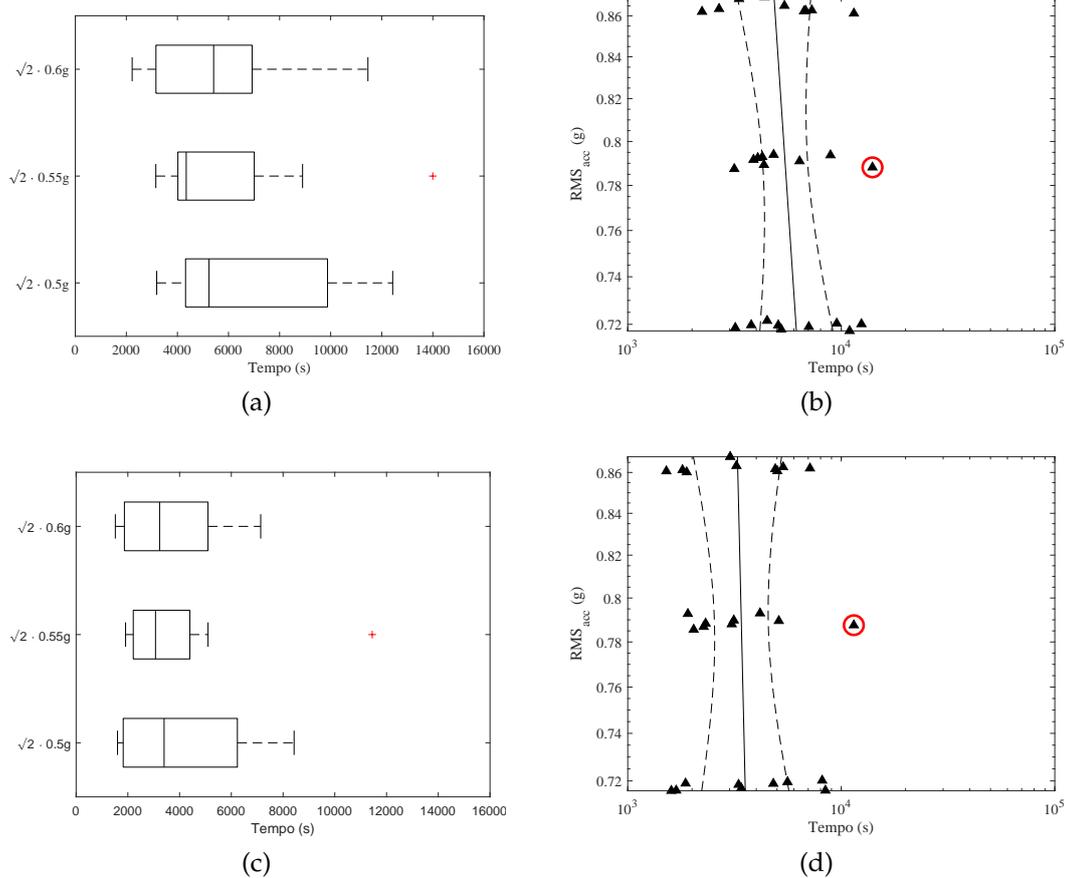
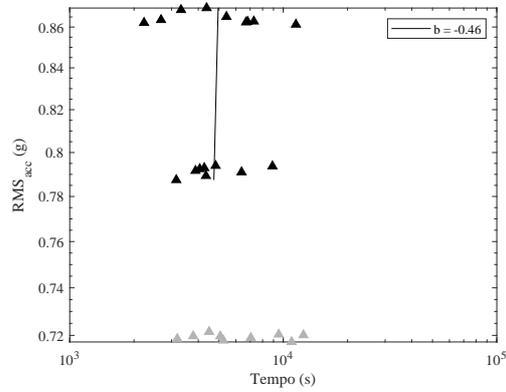
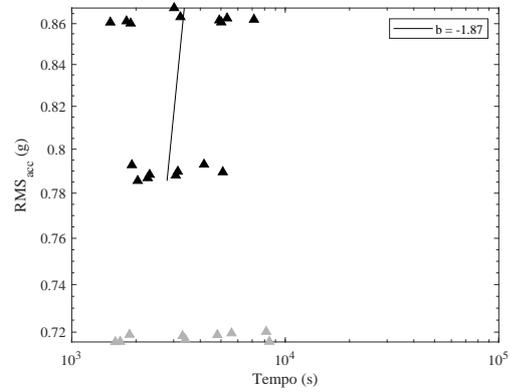


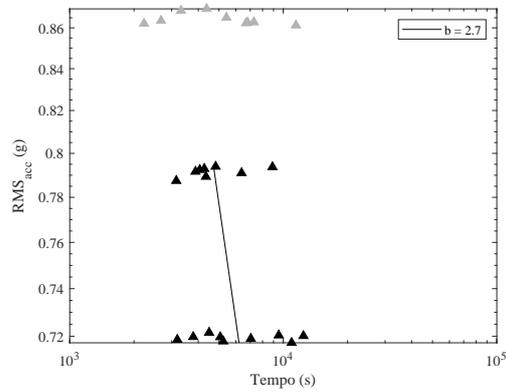
Figura 66: Outlier individuati dai grafici boxplot nei test biassiali in bassa coerenza:
 a) boxplot relativo ai test con riduzione della f_n del 20% b) outlier individuato dal boxplot di fig.a c) boxplot relativo ai test con riduzione della f_n del 3%, d) outlier individuato dal boxplot di fig.c.



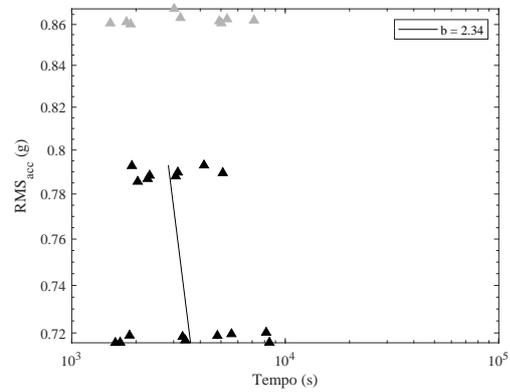
(a) test 0.6g - 0.55g



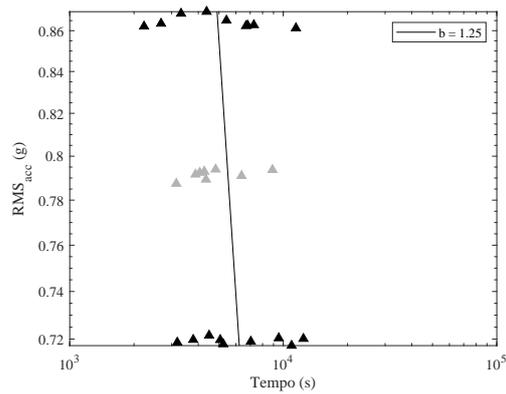
(b) test 0.6g - 0.55g



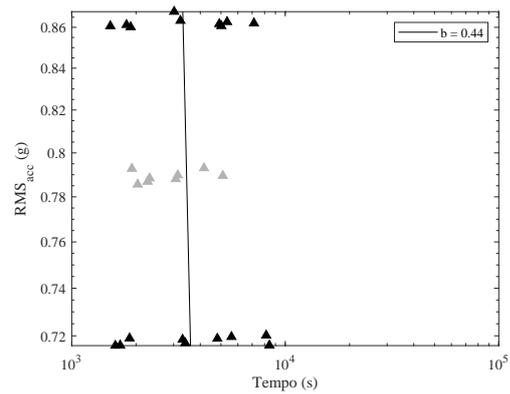
(c) test 0.55g - 0.5g



(d) test 0.55g - 0.5g



(e) test 0.6g - 0.5g



(f) test 0.6g - 0.5g

Figura 67: Confronto dell'esponente b secondo la coppia di livelli di eccitazione considerata: nella colonna di sinistra i test con riduzione della f_n del 20%, nella colonna di destra i test con riduzione del 3%

Tabella 16: Confronto dei valori dell'esponente b calcolati considerando i livelli di eccitazione a coppie rispetto lo stesso valore ottenuto considerando tutti i test (riduzione della f_n del 3%)

	b considerando test a coppie	b considerando tutti i test	Errore %
test 0.6g – 0.55g	-1.87		-525.0%
test 0.55g – 0.5g	2.34	0.44	431.8%
test 0.6g – 0.5g	0.44		0%

CONSIDERAZIONI FINALI

Nel presente lavoro è stato affrontato il tema della sintesi di test accelerati di vibrazione con particolare enfasi sull'analisi critica della validità delle attuali formulazioni.

La resistenza di componenti meccanici che devono operare in ambienti caratterizzati da forti vibrazioni deve necessariamente essere verificata prima della messa in produzione. Il processo di verifica normalmente viene condotto su prototipi, utilizzando strumenti quali gli shaker elettrodinamici, in grado di replicare fedelmente un profilo vibratorio definito dall'utente.

Per essere ritenuto significativo, un test accelerato deve essere in grado di arrecare al componente in esame lo stesso grado di affaticamento a cui sarebbe sottoposto nell'intera vita operativa però, per necessità di test, in un tempo molto più contenuto, accelerandone appunto la vita. Esistono diverse metodologie per sintetizzare in laboratorio una vibrazione con lo stesso potenziale danneggiante di una vibrazione reale e queste sono state analizzate in dettaglio in questo lavoro di tesi. Il principale limite delle formulazioni attuali però è legato alla multiassialità delle eccitazioni, una caratteristica normalmente riscontrabile negli organi meccanici ma difficilmente replicabile in laboratorio perché gli shaker con più gradi di libertà simultanei sono una rarità nel panorama mondiale. Le stesse normative vigenti in tema di test vibratorii sono pensate per essere messe in pratica su macchine che lavorano su un singolo asse e la multiassialità è simulata, replicando il test accelerato in tre direzioni ortogonali in modo sequenziale.

La possibilità di avere a disposizione presso il laboratorio del Dipartimento di Ingegneria dell'Università di Ferrara una di queste macchine multiassiali ha permesso di realizzare una campagna sperimentale su provini di acciaio per verificare i limiti delle attuali formulazioni. L'utilizzo di provini realiz-

zati ad hoc, anziché componenti meccanici reali, permette di avere il pieno controllo dello stato tensionale del punto più sollecitato, indispensabile per ottenere risultati attendibili. La semplicità della geometria e dei profili di eccitazione impiegati fanno sì che le osservazioni alle quali si è giunti siano di ampia generalità, e quindi rimangano valide anche per test accelerati su reali componenti meccanici, nelle effettive condizioni ambientali operative.

La campagna sperimentale è stata condotta in condizioni di eccitazione monoassiale e multiassiale, a tre diversi livelli di accelerazione. I test hanno permesso di gettare uno sguardo critico alla cosiddetta *inverse power law*, la legge di scalatura temporale comunemente adottata da tutte le metodologie di test accelerati. Tale formulazione è derivata dall'approssimazione di Basquin della curva S-N del materiale e, a rigore, è corretta solo nel caso di stato tensionale monoassiale in cui sia la posizione della zona più sollecitata che la risposta dinamica del componente non variano nel tempo.

I test monoassiali eseguiti invece, hanno messo in luce come la propagazione del danneggiamento modifichi la risposta dinamica del provino, variazione frequenza di risonanza e smorzamento modale. In questa situazione la tensione responsabile dell'insacco della cricca nel punto più sollecitato non può essere considerata stazionaria e l'*inverse power law* può portare a errate previsioni di durata. Per far fronte a ciò gli standard di test raccomandano di correggere la legge con opportuni coefficienti, spesso di natura empirica, la cui scelta è demandata all'esperienza di chi esegue i test. In questo lavoro l'effetto della non stazionarietà è stato indagato prendendo in considerazione durate diverse per gli stessi test, corrispondenti a livelli differenti di propagazione delle cricche, e osservando come questa influisce sulla pendenza della retta di regressione. Nei test monoassiali, i più vicini alle condizioni ideali di applicazione dell'*inverse power law*, l'effetto della non stazionarietà è tale da modificare la pendenza della retta approssimante tensioni e numero di cicli da $k = 4.22$ a $k = 3.69$, una variazione del 13%.

Gli stessi profili di eccitazione dei test su singolo asse sono stati impiegati anche nei test multiassiali, applicandoli a due assi contemporaneamente con alto e con basso grado di correlazione fra le eccitazioni. L'*inverse power law* è nata nell'ambito dei test monoassiali per cui risulta interessante, anche per le ricadute che può avere in ambito industriale, verificarne l'accuratezza previsionale in un ambiente più simile al reale ambiente operativo di un componente. I risultati mostrano come l'esponente della legge debba esse-

re sostanzialmente diminuito nel caso di eccitazioni multiassiali rispetto alle monoassiali. Infatti nei test con alta coerenza la pendenza della retta approssimante calcolata nella rappresentazione tempo–RMS accelerazione assume il valore $b = 2.34$. I test monoassiali, considerati nella loro interezza, per contro danno un valore $b = 3.74$, ovvero il 60% superiore. L'osservazione rimane valida anche considerando i test stazionari, in cui b vale 2.26 per i test biassiali e 3.85 per i corrispondenti monoassiali.

La diminuzione dell'esponente è più marcata quando si adotta bassa coerenza tanto che, negli esperimenti realizzati, la retta approssimante è quasi verticale e la durata appare addirittura non influenzata dal diverso valore RMS di eccitazione. Il grafico dei test con riduzione della frequenza di risonanza del 20% ha pendenza $b = 1.24$, il 47% inferiore ai corrispondenti test in alta coerenza. La differenza è ancora più marcata se si considera solo la durata in cui la tensione è considerabile stazionaria, in cui la retta approssimante assume $b = 0.44$, di gran lunga inferiore al corrispondente valore 3.85 dei test in alta coerenza. Il motivo di tale discrepanza sembra probabile sia da ricercarsi in un diverso meccanismo di innesco del danneggiamento legato alla variazione casuale della direzione della risultante di accelerazione.

Per ogni tipologia di test inoltre, è stata indagata anche l'influenza della scelta dei livelli RMS di eccitazione quando si progetta una campagna sperimentale volta a definire nuovi standard per test accelerati. È una problematica di interesse quando si decide di considerare solo due livelli RMS per ottenere una stima dell'esponente da usare nell'inverse power law. Indipendentemente dalla multiassialità o meno dei test, l'evidenza sperimentale porta a suggerire di adottare livelli RMS ben distanziati in valore. Infatti, scegliendo solo i due livelli 0.5g e 0.6g, in tutti i tipi di test effettuati la retta di regressione assume una pendenza confrontabile con quella della retta ai minimi quadrati approssimante tutti e tre i livelli di eccitazione, con un errore contenuto sempre sotto il 10%. La scelta dei livelli risulta in particolar modo critica nei test con bassa coerenza, in cui l'evidenza sperimentale mostra che è importante anche avere a disposizione una grande numerosità campionaria di oggetti da testare per poter tracciare una retta di regressione attendibile.

Il presente lavoro di tesi si inserisce in un contesto di ricerca che si presta a molteplici sviluppi futuri. La teoria alla base dell'inverse power law, illustrata nel secondo capitolo, ha messo in luce come la formulazione non tenga conto della dinamica che lega la tensione, responsabile del danneggiamento a fatica,

all'accelerazione della base del sistema a singolo grado di libertà, fondamento di tutta la trattazione. Un primo possibile sviluppo, peraltro già tentato da alcuni autori, riguarda la generalizzazione della legge per includere l'effettiva funzione di risposta in frequenza che lega le due grandezze: in questo modo si evita di ricorrere a coefficienti empirici per correggere le previsioni della legge. Per migliorare l'affidabilità delle previsioni può essere utile modellare la variazione di tale funzione di risposta in frequenza in funzione della propagazione del danno, aspetto che finora nella ricerca è stato affrontato per eccitazioni molto semplici. Infine, l'inclusione della multiassialità dello stato tensionale nell'inverse power law darebbe alla formulazione maggiore generalità, anche nell'ottica della diffusione futura di tecniche di test multiassiali con shaker elettrodinamici. In quest'ultimo campo esiste già in letteratura ampia disponibilità di criteri di resistenza che però, al momento, soffrono dello stesso problema dell'inverse power law, cioè non tenere in considerazione la modifica della risposta dinamica al propagare del danno.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Halfpenny e T. C. Walton. «New Techniques for Vibration Qualification of Vibrating Equipment on Aircraft». In: *Aircraft Airworthiness & Sustainment*. 2010, pp. 1–18.
- [2] USA Department of Defence. *Mil-Std-810G Test Method Standard Environmental Engineering Considerations and Laboratory Tests*. October. 2008.
- [3] D. G.p.l. F. Ministère de la Défense. *GAM-EG 13 - Essais généraux en environnement des matériaux*. Paris: Ministère de la Défense, 1986.
- [4] C. Lalanne. *Mechanical vibration and shock analysis - Specification Development*. 3^a ed. Vol. 5. Wiley-ISTE, 2014.
- [5] C. Lalanne e M. Bozio. «Writing a Mechanical Vibration Specification From E.R.S. and F.D.S.» In: *ESTECH 2002, IEST - 48th Annual Technical Meeting and Exposition*. 2002.
- [6] A. Halfpenny. «Accelerated vibration testing based on fatigue damage spectra». In: *White paper, nCode International, www.ncode.com* (2006).
- [7] A. Halfpenny e F. Kihm. «Environmental Accelerated Testing. Use of Virtual Test to Extend Physical Approach». In: *White paper, nCode International, www.ncode.com* (2008).
- [8] W. Chang, K. Lin, C. Hsueh e J. Chang. «Vibration Test Specification Design and Reliability Analysis». In: *SAE International 4.1* (2011), pp. 1–10. DOI: 10.4271/2011-01-0491.
- [9] M. Juntunen, K. Vehviläinen, K. Vakevainen e K. Ojala. «Development of shock and vibration test specifications for telecommunications equipment in automotive environments». In: *Confederation of European Environmental Engineering Societies Technical Advisory Board* (2001), pp. 1–14.
- [10] V. P. Kos, J. Slavič e M. Boltežar. «Fatigue Damage for Sweep-Sine and Random Accelerated Vibration Testing». In: *Advances in Mechanical Engineering* 7.1 (2015). DOI: 10.1155/2014/340545.

- [11] F. Cianetti, A. Alvino, A. Bolognini, M. Palmieri e C. Braccesi. «On field durability tests of mechanical systems. The use of the Fatigue Damage Spectrum». In: *Procedia Structural Integrity* 3 (2017), pp. 176–190. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.04.034.
- [12] A. Vertua, F. Kihm e A. Halfpenny. «Proving Ground Optimisation based on Fatigue Damage Spectra». In: *SF2M, Journées de Printemps*. 2011.
- [13] F. Marin, J. Golinval e C. Marville. «Accelerated Fatigue Testing Methodology of Luminaires on Electro-Dynamic Shaker». In: *Proceedings of the ACOMEN - International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*. 2002.
- [14] J. J. Wijker, M. H. M. Ellenbroek e A. de Boer. «Characterization and Synthesis of Random Acceleration Vibration Specifications». In: *4th EC-COMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*. National Technical University of Athens, giu. 2013, pp. 1–30.
- [15] C. E. Larsen e T. Irvine. «A review of spectral methods for variable amplitude fatigue prediction and new results». In: *Procedia Engineering* 101.C (2015), pp. 243–250. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.02.034.
- [16] D. Benasciutti. «Fatigue analysis of random loadings». Tesi di dott. Università degli Studi di Ferrara, 2005.
- [17] L. D. Lutes e C. E. Larsen. «Improved Spectral Method for Variable Amplitude Fatigue Prediction». In: *Journal of Structural Engineering* 116.4 (1990), pp. 1149–1164.
- [18] M. Mršnik, J. Slavič e M. Boltežar. «Frequency-domain methods for a vibration-fatigue-life estimation - Application to real data». In: *International Journal of Fatigue* 47 (2013), pp. 8–17. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.07.005.
- [19] D. Benasciutti e R. Tovo. «Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes». In: *International Journal of Fatigue* 27.8 (2005), pp. 867–877. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2004.10.007.

- [20] W. Zhao e M. J. Baker. «On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes ». In: *International Journal of Fatigue* 14.2 (1992), pp. 121–135.
- [21] T. Dirlik. «Application of Computers in Fatigue Analysis». Tesi di dott. University of Warwick, 1985.
- [22] M. Bennebach, H. Rognon e O. Bardou. «Fatigue of Structures in Mechanical Vibratory Environment. From Mission Profiling to Fatigue Life Prediction». In: *Procedia Engineering* 66 (2013), pp. 508–521. DOI: 10.1016/j.proeng.2013.12.103.
- [23] G. Allegri e X. Zhang. «On the inverse power laws for accelerated random fatigue testing». In: *International Journal of Fatigue* 30.6 (2008), pp. 967–977. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2007.08.023.
- [24] A. Pothula, A. Gupta e G. R. Kathawate. «Fatigue failure in random vibration and accelerated testing». In: *Journal of Vibration and Control* 18.8 (2012), pp. 1199–1206. DOI: 10.1177/1077546311419545.
- [25] Y. Jiang, G. J. Yun, L. Zhao e J. Tao. «Experimental Design and Validation of an Accelerated Random Vibration Fatigue Testing Methodology». In: *Shock and Vibration* 2015 (2015), pp. 1–13. DOI: 10.1155/2015/147871.
- [26] M. Troncossi e A. Rivola. «Response analysis of specimens excited with non-Gaussian acceleration profiles». In: *Proceedings of the 2014 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*. 2014, pp. 799–808.
- [27] A. Papoulis. «Narrow-band systems and Gaussianity». In: *IEEE Trans. on Information Theory* 18.1 (1972), pp. 20–27.
- [28] P. Wolfsteiner e W. Breuer. «Fatigue assessment of vibrating rail vehicle bogie components under non-Gaussian random excitations using power spectral densities». In: *Journal of Sound and Vibration* 332.22 (2013), pp. 5867–5882. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.06.012.
- [29] M. Palmieri, M. Česnik, J. Slavič, F. Cianetti e M. Boltežar. «Non-Gaussianity and non-stationarity in vibration fatigue». In: *International Journal of Fatigue* 97 (2017), pp. 9–19. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.12.017.

- [30] C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori e D. Pioli. «The frequency domain approach in virtual fatigue estimation of non-linear systems: The problem of non-Gaussian states of stress». In: *International Journal of Fatigue* 31.4 (2009), pp. 766–775.
- [31] W. E. Whiteman. «Multiaxial versus uniaxial vibration testing: A research plan for comparison». In: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC 1* (2001), pp. 445–449.
- [32] W. E. Whiteman e M. S. Berman. «Inadequacies in uniaxial stress screen vibration testing». In: *Journal of the IEST* 44.4 (2001), pp. 20–23.
- [33] T. Keller. «A Rationale for 3-Axis Hand/Arm & Whole Body Vibration Simulation». In: *14th Japan Conference on Human Responses to Vibration*. 2006.
- [34] R. French, R. Handy e H. Cooper. «A Comparison of Simultaneous and Sequential Single-Axis Durability Testing». In: *Experimental Techniques* 30.5 (2006), pp. 32–37. DOI: 10.1111/j.1747-1567.2006.00083.x.
- [35] D. Gregory, F. Bitsie e D. O. Smallwood. «Comparison of the response of a simple structure to single axis and multiple axis random vibration inputs». In: *Proceedings of the 79th Shock and Vibration Symposium*. 2008.
- [36] L. D. Jacobs, G. D. Nelson e J. H. Hofer. «Responses of Structures to SDoF vs. MDoF Vibration Testing». In: *Proceedings of the 34th IMAC*. Vol. 5. 2016, pp. 83–94. DOI: 10.1007/978-3-319-29859-7_9.
- [37] G. Nelson e L. Jacobs-O'Malley. «Comparison of Multi-Axis and Single Axis Testing on Plate Structures». In: *Proceedings of the 85th Shock and Vibration Symposium*. 2014.
- [38] M. A. Miner. «Cumulative damage in fatigue». In: *Journal of Applied Mechanics* 67 (1945), A159–A164.
- [39] A. Fatemi e L. Yang. «Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials». In: *International Journal of Fatigue* 20.1 (1998), pp. 9–34. DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00081-9.
- [40] B. Atzori e R. Tovo. «I metodi per il conteggio dei cicli di fatica: stato dell'arte, problemi e possibilità di sviluppo». In: *ATA* 47 (apr. 1994), pp. 175–183.

- [41] M. Matsuishi e T. Endo. «Fatigue of metals subjected to varying stress». In: *Japan Soc. Mech. Engineering* (1968).
- [42] N. E. Dowling. «Fatigue Failure Predictions for Complicated Stress-Strain Histories». In: *Journal of Materials, JMLSA* 7.1 (1972), pp. 71–87.
- [43] J. S. Bendat e A. G. Piersol. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. 2^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- [44] S. O. Rice. «Mathematical Analysis of Random Noise». In: *Bell System Technical Journal* 23.3 (1944), pp. 282–332. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1944.tb00874.x.
- [45] L. Lutes e S. Sarkani. *Random vibrations: analysis of structural and mechanical systems*. 2004.
- [46] H. O. Madsen, S. Krenk e N. C. Lind. *Methods of Structural Safety*. Dover Publications, 2006.
- [47] P. H. Wirsching e M. C. Light. «Fatigue under Wide Band Random Stresses». In: *Journal of the Structural Division ASCE* 106 (1980), pp. 1593–1607.
- [48] J. S. Bendat e A. G. Piersol. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [49] M. Paulus e A. Dasgupta. «Semi-empirical life model of a cantilevered beam subject to random vibration». In: *International Journal of Fatigue* 45 (2012), pp. 82–90. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.06.008.
- [50] A. Halfpenny. «Methods for Accelerating Dynamic Durability Tests». In: *9th International conference on recent advances in structural dynamics* (2006), pp. 1–19.
- [51] M. Troncossi, R. Cipollini e A. Rivola. «Experimental Evaluation of the Fds-Based Equivalence Approach for the Mission Synthesis in Accelerated Life Tests». In: *Proceedings of the ICSV20*. 2013.
- [52] B. Peeters e J. Debillé. «Multiple-input-multiple-output random vibration control: Theory and practice». In: *Proceedings of the 2002 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*. 2002, pp. 507–516.

- [53] M. Underwood, R. Ayres e T. Keller. «Filling in the MIMO Matrix Part 1 – Performing Random Tests Using Field Data». In: *Sound and Vibration* 45.3 (2011), pp. 8–14.
- [54] M. Underwood, R. Ayres e T. Keller. «Filling in the MIMO Matrix Part 2 – Time Waveform Replication Tests Using Field Data». In: *Sound and Vibration* 45.9 (2011), pp. 8–18.
- [55] D. Zanellati, D. Benasciutti e R. Tovo. «Vibration fatigue tests by tri-axis shaker: design of an innovative system for uncoupled bending/torsion loading». In: *Procedia Structural Integrity* 8 (2018), pp. 92–101. DOI: 10.1016/j.prostr.2017.12.011.
- [56] W. D. Pilkey e D. F. Pilkey. *Peterson's Stress Concentration Factors*. 3^a ed. Wiley, 2008.
- [57] A. Niesłony. «Comparison of some selected multiaxial fatigue failure criteria dedicated for spectral method». In: *Journal of theoretical and applied mechanics* 48.1 (2010), pp. 233–254.
- [58] R. G. Budynas e J. K. Nisbett. *Shigley's mechanical engineering design*. 9^a ed. McGraw-Hill, 2011.
- [59] W. E. Whiteman e M. S. Berman. «Fatigue failure results for multi-axial versus uniaxial stress screen vibration testing». In: *Shock and Vibration* 9 (2002), pp. 319–328.
- [60] R. Cipollini. «Qualifica a Vibrazioni di Componenti Meccanici: Studio e Verifica di una Procedura di Test Tailoring». Tesi di dott. Alma Mater Studiorum Università di Bologna, 2013.
- [61] L. Khalij, C. Gautrelet e A. Guillet. «Fatigue curves of a low carbon steel obtained from vibration experiments with an electrodynamic shaker». In: *Materials and Design* 86 (2015), pp. 640–648. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.07.153.
- [62] M. Česnik, J. Slavič e M. Boltežar. «Vibrational fatigue and structural dynamics for harmonic and random loads». In: *Journal of Mechanical Engineering* 60.5 (2014), pp. 339–348. DOI: 10.5545/sv-jme.2013.1831.
- [63] S. Clevenston e R. Steiner. *Fatigue life under random loading for several power spectral shapes*. NASA technical report. National Aeronautics e Space Administration, 1967.

- [64] ASTM. *Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) and Strain-Life (ϵ -N) Fatigue Data*. West Conshohocken, PA, 2015. DOI: 10.1520/E0739-10R15.
- [65] J. Tukey. *Exploratory Data Analysis*. Addison-Wesley, 1977.
- [66] D. C. Montgomery e G. C. Runger. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 6^a ed. John Wiley & Sons, Inc., 2014.