Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie e Rendiconti di Chimica, Fisica,
Matematica e Scienze Naturali
138° (2020), Vol. I, fasc. 2, pp. 141-149
ISSN 0392-4130 • ISBN 978-88-98075-40-9

Contributi italiani al linguaggio della matematica

ALESSANDRA FIOCCA[1]

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara, 44121 Ferrara. E.mail: fio@unife.it

Abstract – *Italian contributions to the language of mathematics*. If in general, language and content are not independent entities, this is all the more true in mathematics where an appropriate language to write and communicate not only constitutes an integral part of the mathematical thought that is transmitted, but is also a tool for new developments in the discipline. Examples of this close relationship are the transition of algebraic notation from the rhetorical to the symbolic stage, the application of algebra to geometry and Leibniz's notations in calculus. As for the modern conception of mathematics as a conventional language based on strict syntactic rules, as opposed to its classic image, the figure of Giuseppe Peano and his projects for a universal language and mathematics expressed in purely ideographic form are introduced.

Keywords: mathematical language; symbols in algebra; Peano's *Formulaire de mathématiques*

Riassunto – Se in generale linguaggio e contenuto non sono entità indipendenti, questo è tanto più vero in matematica, dove un appropriato linguaggio per scriverla e comunicarla non solo costituisce parte integrante del pensiero matematico che viene trasmesso, ma è strumento per nuovi sviluppi della disciplina. Esempi di questo stretto rapporto sono la notazione algebrica passata dallo stadio retorico a quello simbolico, l'applicazione dell'algebra alla geometria, le notazioni introdotte da Leibniz nel calcolo differenziale e integrale. Quanto alla moderna concezione della matematica come linguaggio convenzionale basato su regole sintattiche rigide, in contrapposizione con la sua immagine classica, vengono introdotti la figura di Giuseppe Peano e i suoi progetti di una lingua universale e di una matematica espressa in forma puramente ideografica.

Parole chiave: linguaggio matematico; simboli in algebra; *Formulaire de mathématiques* di Peano

> La filosofia [della natura] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto dinanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto
>
> *Il Saggiatore* (1623), in Galileo Galilei, *Opere*, vol. VI, p. 232

A History of Mathematical Notations di Florian Cajori (1859-1930), uscita in due volumi negli anni 1928 e 1929,[2] è un'opera corposa, di circa settecento pagine, con cui l'autore intendeva dare conto della prima apparizione di un simbolo matematico, raccontarne l'origine, quando possibile, ma anche illustrare la competizione incontrata e la diffusione tra scrittori di differenti paesi, il periodo della sua popolarità, e dell'eventuale suo declino. Il tentativo era di rendere giustizia alle notazioni ormai obsolete, come anche a quelle che erano sopravvissute fino ai suoi tempi.

Se l'obbiettivo fosse stato solo di raccontare una serie di avvenimenti, più o meno interessanti per alcuni studenti di matematica, sarebbe discutibile lo sforzo fatto, scrive Cajori, ma la storia costituiva anche uno specchio delle passate e delle presenti condizioni della matematica, e avrebbe potuto soccorrere di fronte ai problemi notazionali con cui si stava confrontando la matematica ai sui tempi.

L'importanza della notazione matematica nello sviluppo della disciplina

Non solo i contenuti caratterizzano un testo di matematica, ma anche la sua forma, costituita più da un insieme di espressioni simboliche che da parole della lingua ordinaria. Un testo dunque per esperti, non per tutti. Un linguaggio è lo strumento con il quale comunichiamo un certo contenuto. Linguaggio e contenuto non sono entità indipendenti, al contrario tra loro intercorre una relazione complessa. Questo è tanto più vero in matematica dove un appropriato linguaggio per scriverla e comunicarla costituisce parte integrante del pensiero matematico che viene trasmesso. Certi progressi del linguaggio matematico hanno accompagnato i progressi nello sviluppo della disciplina.[3]

Il valore del simbolismo matematico trascende infatti l'aspetto meramente linguistico: attraverso un adeguato linguaggio simbolico il ragionamento matematico trova modo di svilupparsi e di ottenere risultati che altrimenti sarebbe stato difficile, se non impossibile, raggiungere.[4] L'esempio della geometria analitica è paradigmatico: l'applicazione dell'algebra alla geometria, ovvero la trascrizione di un problema geometrico in linguaggio algebrico, ha fornito un potente strumento nelle mani del matematico, tanto che alcuni risultati geometrici che si possono ottenere per via algebrica (analitica), talvolta resistono ad ogni tentativo di dimostrazione per via puramente geometrica (sintetica). Il linguaggio dunque fa la differenza!

L'importanza della simbologia matematica appare in tutta la sua portata nei simboli coniati da Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) per indicare alcuni concetti matematici come quello di differenziale (o differenza delle v, indicato come dv) e quello di integrale, (una esse allungata $\int$ che suggerisce il concetto di somma di elementi infinitesimi). Oltre a richiamare i concetti sottostanti, detti simboli si prestano a manipolazioni che traducono risultati teorici non banali, come ad esempio il teorema di derivazione della funzione composta espresso dalla formula $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dt}$ in cui i simboli di derivata $\frac{dv}{dt}$; $\frac{dv}{dw}$; $\frac{dw}{dt}$ si comportano come quozienti (senza esserlo), seguendo le stesse regole algebriche.

Ma la matematica non è stata sempre scritta così. Il cammino per giungere a questo tipo di scrittura è stato lungo e complesso.

Il linguaggio dell'algebra: dall'algebra retorica all'algebra simbolica

L'esempio dell'algebra ci mostra come il linguaggio matematico non sia semplicemente una scrittura per tradurre certi concetti, ma sia parte integrante dei concetti stessi. Esso è il frutto di un lungo percorso che ha accompagnato via via i progressi compiuti nello sviluppo della disciplina. Risolvere un'equazione utilizzando la

[2] L'opera ha avuto una nuova edizione e i due volumi sono stati riuniti in un unico tomo, ma con la numerazione delle pagine indipendente e ciascun volume con la sua *Table of contents* (Cajori 1993). Le due tavole dei contenuti seguono, tuttavia, una numerazione diversa e continuativa, corrispondente alla prima edizione. I nostri riferimenti sono relativi alla edizione del 1993.

[3] Il rapporto tra il progresso delle idee matematiche e lo sviluppo di certi linguaggi matematici specifici, a partire da esempi tratti da argomenti di matematica scolastica, è discusso in Bramanti (2011).

[4] Si veda a riguardo Bartocci & Macrì (2002).

corrispondente formula risolutiva rappresenta un esercizio alla portata di tutti, ma solo perché il linguaggio dell'algebra utilizzato ha incorporato in sé tutte le difficoltà che si sono presentate al matematico del passato per risolvere il problema.

L'algebra ha le sue radici nei procedimenti di risoluzione di equazioni algebriche a una incognita di primo e secondo grado. Si tratta di equazioni rispettivamente del tipo: $ax + b = 0$; $ax^2 + bx + c = 0$ essendo x l'incognita, a, b, c i coefficienti assegnati. Questo modo di formulare il problema è una conquista del XVI secolo.

In questa formulazione vi sono:

1. L'idea di incognita e un simbolo per rappresentarla.
2. Un simbolo per indicare le operazioni aritmetiche e per l'uguaglianza tra i due membri dell'equazione.
3. L'introduzione dei numeri negativi che permettono di scrivere una sola tipologia di equazione. Precedentemente vi erano varie tipologie di equazioni con i termini in parte al primo e in parte a secondo membro, sempre con coefficienti positivi ($ax^2 + bx = c$; $ax^2 = bx + c$; $ax^2 + c = bx$).
4. Le lettere che sostituiscono i numeri per dare generalità ai procedimenti.

Si parla di un processo di trasformazione della scrittura dell'algebra, dallo stadio retorico (le equazioni e i passaggi algebrici sono descritti verbalmente) a quello simbolico, passando per una tappa intermedia di scrittura sincopata (col ricorso ad opportune abbreviazioni).[5]

Queste tre tappe non hanno seguito un percorso lineare. Infatti, mentre il matematico greco Diofanto (III secolo) nella sua opera di aritmetica utilizza una serie di simboli, nel primo trattato di algebra che ci è pervenuto, dell'autore arabo Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780 circa-850 circa) dal titolo *Al-jabr wa al-muqābala*, l'algebra è ancora nello stadio retorico.

L'incognita, che Diofanto chiama *arithmós*, è definita dal matematico alessandrino come contenente un numero non definito di unità. In tutti i manoscritti (Diophante d'Alexandrie 1959, pp. 2-3) si trova un simbolo per indicare l'incognita, molto simile all'ultima lettera della parola ἀριθμός. Per indicare i numeri determinati usa una M sormontata da un cerchietto (forse l'iniziale della parola μονάς). Usa simboli per le potenze dell'incognita come appare dalla figura sottostante e un simbolo per il segno – che è stato interpretato (Diophante d'Alexandrie 1959, p. 7) come un lambda completato con un iota inserito all'interno, forse un'abbreviazione della parola λεῖψις ("quello che manca"). Diofanto usa le lettere dell'alfabeto con un trattino sopra per indicare i numeri al modo degli antichi greci.

Fig. 1. La notazione di Diofanto per scrivere l'espressione algebrica $x^2 - 3$ (Ver Eecke 1956, p. XXI).

I primi autori Arabi non adottarono né le notazioni diofantee, né quelle degli Indiani, nonostante che nel 772 l'astronomia Indiana fosse nota agli studiosi Arabi. L'algebra di al-Khwārizmī fu pubblicata nell'originale arabo con traduzione inglese da Friedrich August Rosen nel 1831 sulla base di un manoscritto della Biblioteca Bodleiana di Oxford. L'esposizione è del tutto retorica cioè priva di ogni tipo si simbolismo. Anche i numeri sono espressi a parole e i simboli indo-arabici per i numeri compaiono solo in poche note marginali.

La scrittura matematica di Leonardo Pisano (XII-XIII secolo) è quasi totalmente retorica. Nel suo *Liber Abaci* (1202) usa i numerali Indo-Arabici, il termine per l'incognita è *res* o anche *radix*, per il quadrato dell'incognita usa *census*, per le potenze 3, 4, 6 dell'incognita usa rispettivamente *cubus*, *census census*, *cubus cubus* o anche *census census census* (usa quindi il principio additivo nella moltiplicazione delle potenze). Nella *Practica geometriae* (1220) Leonardo Pisano usa una abbreviazione, *R*, per radice quadrata.

Nel Rinascimento, anche nel linguaggio corrente la scrittura viene abbreviata; lo stesso avviene quando si scrive di matematica. Si parla in tal caso di algebra sincopata. Nella *Practica arithmeticae generalis* (1539) Girolamo Cardano (1501-1576) usa le seguenti abbreviazioni *nu.*, *co.*, *ce.*, *cu.*, rispettivamente per numero, *cosa* (ovvero l'incognita), *censo* (il quadrato dell'incognita), *cubo* (il cubo dell'incognita) e denota le successive potenze dell'incognita con *ce.ce.* (per la quarta potenza), *Rel. p.* ("relato primo" ovvero la quinta potenza), *cu.ce.* (per la sesta potenza), *Rel. 2* ("relato secondo" per la settima potenza), *ce.ce.ce.* (per l'ottava potenza), *cu.cu.* (per la potenza nove), *ce.Rel.* (per la potenza dieci).

Nella sua opera maggiore, che ha per titolo *Artis magnae* (1545), Cardano introduce delle abbreviazioni per le operazioni aritmetiche di addizione e sottrazione, rispettivamente le lettere *p* e *m* soprassegnate, e una *R* per la radice quadrata. Inoltre non usa più *co., ce., cu.,* per l'incognita e le prime sue potenze. Per l'incognita usa «rem incognitam, quam vocamus positionem» e l'equa-

[5] Sui progressi dell'algebra in Italia da Scipione del Ferro a Rafael Bombelli si veda Fiocca (2008).

zione $60 + 20x = 100$ è scritta «60 $\bar{p}$ 20 *positionibus aequalia* 100»; l'equazione $x^2 + 2x = 48$ è scritta «1. *quad.* $\bar{p}$ 2 *pos. aeq.* 48» (Cajori 1993, vol. I, p. 117).

Nel passaggio dell'algebra alla fase simbolica, l'opera *L'Algebra* di Rafael Bombelli da Bologna riveste un ruolo importante. Scritta molti anni prima e rivista successivamente, l'opera era composta di cinque libri, di cui solo tre vennero pubblicati nel 1572. Gli altri due furono rinvenuti in un manoscritto conservato nella Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna da Ettore Bortolotti e pubblicati nel 1929. Nel 1966 uscì l'edizione completa di tutti i cinque libri (Bombelli 1966). Di Bombelli si conosce molto poco; oltre a quanto si legge nella prefazione ai lettori premessa all'opera, disponiamo di qualche documento proveniente da archivi bolognesi e romani, tra i quali l'atto di battesimo in data 20 gennaio 1526. La morte deve essere avvenuta tra il 23 giugno 1572, data della lettera di dedica dell'opera, e il 5 maggio 1573, giorno in cui venne steso un atto notarile in cui sono citati i figli Antonio ed Ercole eredi «Domini Raffaelis de Bombellis Bononiensis». Le uniche notizie circa la formazione matematica di Bombelli provengono dalla dedica sopra ricordata in cui è citato Pier Francesco Clementi da Corinaldo come suo maestro. Corinaldi era un ingegnere idraulico che aveva lavorato durante il pontificato di Paolo III alla bonifica delle paludi di Foligno e nel 1579, durante il pontificato di Gregorio XIII, aveva partecipato alla visita idraulica per trovare una sistemazione al corso del torrente Reno nel Ferrarese (Fiocca 2002, p. 260). Anche Bombelli si occupò di ingegneria idraulica; lavorò alla bonifica della Val di Chiana e proprio durante l'interruzione dei lavori di bonifica, ritiratosi nella villa di monsignor Alessandro Rufini, a cui l'opera è dedicata, scrisse il suo trattato.

Si tratta di un classico della matematica su cui si formarono i matematici del Seicento, tra cui lo stesso Leibniz che apprezzò l'opera a tal punto da riconoscere all'autore l'appellativo di «Egregium certe artis analyticae magistrum». Vi sono trattate le equazioni algebriche dei primi quattro gradi e i metodi per risolverle. Ma non solo vi sono introdotti i numeri immaginari per risolvere un caso cosiddetto "irriducibile" che si presentava nella risoluzione di certe equazioni di terzo grado, ma di più questa opera per la prima volta fece conoscere in Occidente l'opera del matematico greco Diofanto. In data sconosciuta, ma successiva al 1567, l'originale terzo libro dell'opera fu sostituito da Bombelli con un nuovo testo che in gran parte rappresentava il frutto della lettura da lui fatta nella Biblioteca Vaticana di un codice contenente appunto l'Aritmetica di Diofanto.

Fu Antonio Maria Pazzi «pubblico lettore delle matematiche a Roma» a indicare a Bombelli il codice di Diofanto e insieme a Pazzi Bombelli ne intraprese la traduzione. Poiché Pazzi fu lettore dal 1567 al 1575 ne deriva che il terzo libro fu riscritto da Bombelli appunto successivamente al 1567. Si può anche ritenere che Bombelli abbia deciso dopo tanti anni di dare alle stampe la sua opera orgoglioso di poter dare notizia di questa opera, fino ad allora sconosciuta, del matematico greco (Fiocca & Leone 2017).

Rafael Bombelli usa una simbologia molto personale per le potenze intere positive dell'incognita che si evolverà per diventare il simbolismo moderno x, x^2, x^3, … I termini nell'equazione vengono indicati con un numero, che rappresenta il coefficiente, sul quale è posto un semicerchio al cui interno compare un altro numero che rappresenta la potenza dell'incognita di quel termine, quindi zero se si tratta del termine noto, 1 per il termine in x, 2 per il termine in x^2 eccetera.

Fig. 2. La notazione di Bombelli «Se si havesse ad agguagliare x^3 *a* $15x + 4$» (Bortolotti, 1966, p. XXXIII).

Altri simboli usati da Bombelli: per le parentesi I______I, m = meno; $p.$ = più; R, R^3 rispettivamente per le radici quadrata e cubica.

Nella *Géométrie* (1637) di René Descartes (1596-1650) troviamo già la scrittura algebrica moderna con qualche piccola variante, un simbolo di infinito aperto a sinistra per l'uguale, e quando la potenza è due, la lettera è ripetuta *bb* al posto di b^2.

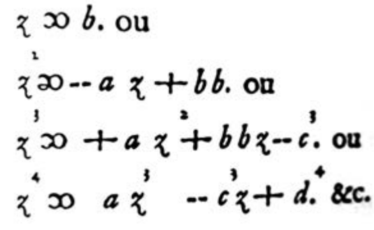

Fig. 3. La simbologia algebrica di Cartesio (Descartes 1637, p. 301).

La matematica moderna: un linguaggio convenzionale basato su regole sintattiche rigide

A differenza dalla fisica e dalle scienze sperimentali in genere, che possono mostrare gli oggetti del loro studio, la matematica ha come oggetti concetti astratti che, non potendo essere esibiti, necessitano quantomeno di essere definiti univocamente. I tentativi in questa direzione hanno dimostrato ben presto dei limiti sostanziali. Quando in aritmetica parliamo di numero e di quantità, o in geometria di spazio e forma, questi vocaboli evocano nella nostra mente idee precise, che tuttavia sfuggono a una definizione precisa. Occorre ricorrere ad altri concetti che a loro volta vanno definiti facendo nuovamente ricorso a nuovi concetti, finendo in un circolo vizioso.

Se non si riescono a definire in maniera soddisfacente gli oggetti a cui il linguaggio della matematica si riferisce, ci si chiede di cosa tratti questo linguaggio. La questione riguarda la crisi dei fondamenti della matematica. Sorta inizialmente nell'ambito della geometria all'inizio dell'Ottocento, la crisi ha in seguito convolto anche l'aritmetica, la teoria degli insiemi e le stesse basi logiche su cui la matematica è costruita e ha portato alla moderna concezione della disciplina che da scienza dei contenuti si è trasformata in scienza delle strutture.

Tutto ebbe inizio con la scoperta delle geometrie non euclidee da parte di János Bolyai (1802-1860) e Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856). Fu dal tentativo di trovare una dimostrazione del V postulato di Euclide, che afferma l'unicità della parallela a una retta data passante per un punto esterno, che ebbe origine la crisi. Non che i matematici dubitassero della verità dell'affermazione, ma poiché non sembrava loro così evidente da essere considerata un postulato, ne cercavano una dimostrazione basata su risultati già provati. La scoperta che si potevano costruire delle geometrie assumendo come verità sia l'unicità della parallela, sia una delle sue possibili negazioni, senza entrare in contraddizioni logiche, ha aperto la strada verso la moderna concezione della geometria e, più in generale, della matematica.

Superata l'immagine classica della geometria, in cui erano i suoi oggetti e le sue proposizioni a caratterizzarla, e che aveva a fondamento l'evidenza di una esperienza esterna, si è fatta strada l'idea della geometria come sistema ipotetico-deduttivo, specificata dalle sue procedure interne. Alla base della teoria geometrica vi sono gli assiomi, che devono rispettare un unico criterio, di essere non contradditori, e i cui oggetti sono definiti implicitamente dagli assiomi, i cosiddetti "elementi primitivi".

Anche l'aritmetica fu investita dalla stessa crisi dei fondamenti quando si tentò di definire in maniera precisa il concetto di numero intero che, fino alla metà dell'Ottocento, era dato come intuitivo. Due furono le strade intraprese dai matematici, la via implicita utilizzando un opportuno sistema di assiomi, e la via insiemistica, utilizzando cioè la nozione di insieme, ritenuta più primitiva. Il sistema di assiomi che definisce gli interi naturali fu introdotto nel 1889 da Giuseppe Peano (1858-1932). Peano non definisce cos'è un numero intero, ma fornisce le regole (gli assiomi) che un oggetto deve soddisfare per essere chiamato numero intero. A sua volta Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) intaprese la via insiemistica e tentò di costruire il concetto di numero intero naturale basandosi sulla nozione di equipollenza tra insiemi. Tale approccio ha tuttavia evidenziato delle problematicità, messe in evidenza da Bertrand Russell (1872-1970), e anche la teoria degli insiemi ha subito la stessa sorte, diventando anch'essa un sistema ipotetico-deduttivo, fondato su un sistema di assiomi.

Per concludere, la matematica appare oggi come un linguaggio convenzionale basato su regole sintattiche rigide. I suoi contenuti non sono desunti dalla realtà sensibile e non hanno una natura oggettiva. Gli oggetti della matematica sono ridotti a puri termini primitivi a cui si chiede solo di soddisfare determinate regole di comportamento (gli assiomi della teoria il cui unico vincolo è di essere non contraddittori). La teoria si sviluppa poi deducendo le conseguenze logiche derivate dagli assiomi fondamentali, tramite le regole formali che si sono stabilite. I contenuti della matematica non sono quindi i suoi elementi primitivi ma le regole con cui si opera su di essi (Manara & Marchi 1986).

Giuseppe Peano e il *Formulaire de mathématiques*

Come già osservato, il sistema di assiomi che definisce gli interi naturali è dovuto al matematico piemontese Giuseppe Peano. Peano nacque a Spinetta (Cuneo) il 27 agosto 1858.[6] Iscritto al corso di laurea in matematica all'Università di Torino, ebbe come docenti Enrico D'Ovidio, Francesco Faà di Bruno, Angelo Genocchi e Francesco Siacci. Si laureò il 16 luglio 1880 con una tesi di geometria superiore. Assunto l'anno successivo come assistente alla cattedra di calcolo infinitesimale di Genocchi, vinse la suddetta cattedra nel 1890. Fin dal suo esordio come matematico, Peano dimostrò le sue doti di creatività e le capacità critiche, in grado di cogliere errori e imprecisioni, come nella definizione di J.A. Serret di area di una superficie come limite delle aree delle superfici poliedriche inscritte, critica che produsse una nuova definizione di area nota oggi con il nome di Peano-Schwarz e da cui trassero ispirazione matematici come Hermann Minkowski (1864-1909) e Henry Lebesgue (1875-1941). Nel 1884 uscì il trattato delle lezioni di Ge-

[6] Per una biografia del matematico si veda Roero (2015).

nocchi, col titolo *Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano*, che riscosse grande apprezzamento dalla comunità matematica ed ebbe diverse edizioni tra cui una in tedesco e due in russo. Le aggiunte di Peano furono sostanziali, fatte di controesempi per dimostrare la falsità di risultati accolti generalmente senza riserve, definizioni ed enunciati ripuliti da condizioni superflue o errate, ma anche nuovi risultati teorici e i contributi della scuola tedesca ai fondamenti della matematica tra cui l'assiomatica dei numeri reali e i concetti di limite superiore e inferiore.

Negli anni 1888-1890, Peano diede importanti contributi alla geometria (semplificò ed estese i metodi di Hermann Grasmann, trasformandoli in un elegante calcolo coi vettori e fornendo per la prima volta una teoria assiomatica degli spazi vettoriali), all'aritmetica, alla logica matematica, alla critica fondazionale.

La trattazione dei fondamenti dell'aritmetica è svolta nell'opera scritta in latino dal titolo *Arithmetices Principia nova methodo exposita* (1889) in cui, assunti i concetti primitivi di zero, numero e successore, sono enunciati gli assiomi dell'aritmetica, ancor oggi noti col suo nome.[7] La trattazione dei fondamenti della geometria di posizione e della geometria metrica è presentata nel saggio *I principii di geometria logicamente esposti* (1889). Nell'opera *Calcolo geometrico* (1888) Peano introduce un sistema di simboli per rappresentare gli enti della geometria e le loro relazioni, e crea una sintassi di questi simboli in modo che la risoluzione dei problemi geometrici proceda come accadeva in algebra, applicando rigorosamente le regole di sintassi dei simboli scelti (Manara 1994, p. 289).

Terminato nel 1891 un primo ciclo di studi di logica matematica, che avevano prodotto diverse pubblicazioni a partire dal 1888 (tra cui, oltre quelle già ricordate, *Principi di logica matematica* e *Formole di logica matematica*, 1891), Peano passò ad occuparsi dell'applicazione della sua ideografia logica allo studio dei principi della matematica, sviluppando un'ideografia matematica per dare forma ideografica completa ad ogni proposizione matematica.

Si propose così di scrivere un «Formulario», in cui raccogliere «tutte le proposizioni matematiche, dimostrazioni e teorie, man mano che esse sono espresse coi simboli della Logica matematica, come pure le indicazioni storiche relative» (Cassina 1955, p. 257). Scrisse a riguardo (supplemento di marzo 1892 della *Rivista di matematica*): «Sarebbe cosa della più grande utilità il pubblicare delle raccolte di tutti i teoremi ora noti riferentesi a dati rami delle scienze matematiche». Ed inoltre «Una siffatta raccolta, difficilissima e lunga con il linguaggio comune, è notevolmente facilitata servendosi delle notazioni della logica matematica» (Cassina 1955, p. 247).

Il Formulario completo di Peano si compone di cinque edizioni o tomi stampati tra il 1895 e il 1908, i primi quattro scritti in francese per quanto riguarda le spiegazioni e i commenti alle formule, il quinto in *latino sine flexione*, la lingua ausiliaria internazionale da lui promossa. Si tratta di un insieme di proposizioni di matematica scritte completamente in forma ideografica, nel simbolismo logico. L'opera vide la collaborazione di diversi matematici, docenti di matematica nella scuola e storici della matematica tra cui G. Vailati, F. Castellano, C. Burali-Forti, G. Vivanti, R. Bettazzi, F. Giudice, G. Fano.[8]

Nel primo volume annuncia la realizzazione di un progetto già formulato da Leibniz nel 1666, cioè la creazione di una scrittura universale in cui tutte le idee composte fossero espresse per mezzo di segni convenzionali delle idee semplici, secondo certe regole fisse.[9]

Per dare un'idea dell'estensione che ha avuto l'ideografia peaniana, nel settimo volume della *Revue de mathématiques* (1901) viene dato conto del fatto che i simboli appaiono in 67 memorie pubblicate in differenti paesi da 15 autori differenti (Cajori 1993, vol. II, p. 302).

Terminata la quarta edizione, nel 1903 Peano iniziò a occuparsi del problema di una lingua ausiliaria universale, che si concretizzò prima nel *latino sine flexione* e poi nell'interlingua, la quale si diffuse molto poco. Il *latino sine flexione* si ottiene dal latino classico sopprimendo ogni flessione grammaticale, in modo che ogni vocabolo viene ridotto al "tema" nominale o verbale. Che tale operazione desse luogo a testi comprensibili era stato provato da Peano in una nota del 1893. L'interlingua si poneva come obbiettivo l'internazionalità dei vocaboli e vennero poste delle regole quanto al vocabolario (vocaboli comuni ai vocabolari etimologici inglese, francese, spagnolo, italiano, portoghese, russo e 'teutico', cioè germanico; del vocabolario latino inglese e della nomenclatura in uso in botanica, zoologia, chimica ecc.), all'orto-

[7] Su Peano e i fondamenti dell'aritmetica si veda Lolli (2008).

[8] Sulla scuola di Peano collegata al suo *Formulario di Matematica* si veda Luciano (2017).

[9] Sull'influenza di Leibniz su Peano particolarmente per quanto riguarda i progetti del *Formulario* e di una lingua universale si veda Luciano (2012). Sul concetto di rigore nell'insegnamento della matematica in Peano e in Corrado Segre, si veda Luciano (2020).

grafia (ogni vocabolo internazionale che esiste in latino ha la forma latina), alla grammatica (s finale per il plurale e soppressione di ogni elemento grammaticale superfluo) e alla fonetica (dell'antico latino). La maggioranza del vocabolario era dunque latino essendo la civiltà occidentale di origine latina o greco-latina. Per quel che riguarda la matematica e la logica, tra il *latino sine flexione* e l'interlingua non vi è differenza sensibile.

Il *latino sine flexione* venne utilizzato da Peano nella redazione della quinta edizione del Formulario, che uscì col titolo *Formulario mathematico editio V* nel 1908. Tale volume è diviso in otto parti, rispettivamente dedicate a logica matematica, aritmetica, algebra, geometria, limiti, calcolo differenziale, calcolo integrale, teoria delle curve.

«Un'opera classica nella letteratura matematica di ogni secolo» e «una miniera inesauribile di ogni scienza» la definì Cassina (1955, p. 556). Peano è riuscito a sviluppare in un'opera di modeste proporzioni (463 pagine) una parte consistente delle conoscenze matematiche: logica matematica, aritmetica, algebra, teoria delle equazioni algebriche, geometria elementare, calcolo geometrico, vettoriale, omografico e dei quaternioni, calcolo delle differenze, calcolo differenziale e integrale, calcolo delle probabilità, calcolo delle variazioni, equazioni differenziali con applicazioni, geometria differenziale, baricentri, momento di inerzia, cinematica e meccanica razionale. In tutto 4200 proposizioni, molte con relative dimostrazioni e in più modi, con una grande quantità di informazioni circa le fonti, gli autori delle scoperte, con notizie biografiche e bibliografiche, la storia e una critica dei concetti fondamentali, un vocabolario di logica e matematica con l'etimologia e la forma in *latino sine flexione*, e nelle principali lingue europee, con considerazioni circa le leggi fonetiche. Tutto questo è stato possibile grazie alla forma ideografica utilizzata per la stesura, ovvero grazie alla trascrizione simbolica delle proposizioni e delle relative dimostrazioni mediante il simbolismo di logica matematica stabilito da Peano a partire dal 1888. Si tratta di una ventina di simboli di logica matematica che hanno permesso a Peano di ridurre anche il numero di simboli matematici necessari per scrivere le proposizioni, numero che ammonta a 209 (Cassina 1955, p. 557).

La via indicata da Peano e da Frege venne proseguita da Alfred North Whitehead (1861-1947) e da Russell. In *Principia Mathematica* (1910) i due autori indicano le ragioni della necessità di una estensione del simbolismo, oltre l'ambito corrente: l'astrattezza della matematica, la struttura grammaticale del linguaggio che, avendo un'ampia varietà di usi, non permette un'unicità nel rappresentare anche i più semplici processi e le idee che nascono nella catena deduttiva dei ragionamenti matematici; l'adozione di regole del simbolismo nei processi deduttivi aiuta l'intuizione, particolarmente nelle regioni troppo astratte per l'immaginazione, a presentare alla mente le vere relazioni tra le idee impiegate; infine, la concisione del simbolismo permette a una proposizione di essere rappresentata come un tutto o al più formata da due o tre parti.

Conclusioni

In *A History of Mathematical Notations*, Cajori si dichiara allarmato dalla velocità con cui ai suoi tempi procedeva l'introduzione di nuovi simboli matematici: «The task of making a complete collection of signs occurring in mathematical writings from antiquity down to the present time trascends the endurance of a single investigator. If such a history were completed on the plan of the present work, it would greatly surpass this in volume. At the present time the designing of new symbols is proceeding with a speed that is truly alarming». (Cajori 1993, Introduzione al secondo volume)

La diversità di notazione era destinata a ritardare la diffusione della conoscenza dei nuovi risultati che si stavano ottenendo in matematica, osserva Cajori. Gli errori del passato, di cui l'opera dava ampia testimonianza, avrebbero dovuto convincere i matematici a concentrare i loro sforzi per assicurare quella uniformità di linguaggio che rappresentava l'unico rimedio al problema.

Il problema di notazioni efficienti e uniformi è forse, sempre secondo Cajori, il più serio che il pubblico matematico si trova di fronte. Tra gli argomenti presentati nel suo libro, nessuno si avvicina di più al tema di un linguaggio uniforme e universale in matematica di quanto non faccia il simbolismo logico. Fra i matematici che si sono impegnati a trovare una soluzione mediante la logica simbolica elenca Leibniz, Lambert, De Morgan, Boole, Peirce, Schröder, Peano, Moore, Whitehead, Russell. Con l'eccezione di Leibniz, il loro modo di procedere è stato individualista. Ciascuno ha proposto una lista di simboli con la speranza che i matematici li avrebbero adottati. Ma questo non è avvenuto.

Cajori, che scrive alla fine degli anni venti del Novecento, afferma che senza dubbio molti matematici del suo tempo si chiederanno quale sarà il destino dei famosi simbolismi di Peano e di Whitehead e Russell. E si sbilancia, affermando che alla luce dei passati eventi, quei sistemi di simboli si disintegreranno come era successo ad altri sistemi immaginati nei secoli precedenti. Ammette che, volendo raggiungere una assoluta accuratezza logica in situazioni complesse e astratte sorte nell'ambito dei fondamenti della matematica, sono risultati utili i sistemi di ideogrammi come quelli di Peano e, specialmente, quelli di Whitehead e Russell. Ma, aggiunge, questi simboli sono poi stati usati dai loro autori per esprimere tutta la matematica in forma puramente ideografica. Fino ad ora, conclude Cajori, tali sistemi intesi a prendere il posto del linguaggio ordinario quasi interamente, non sono stati accettati da chi fa matematica. E l'insegnamento della storia è di scoraggiare tentativi come questi.

Gli sforzi di Peano per fare accreditare dalla comunità scientifica la sua interlingua furono molteplici, con due riviste dedicate, rispettivamente *Academia pro interlingua. Discussiones* e *Schola e Vita*, l'una organo di stampa dell'Accademia con sede presso la casa di Peano a Cavoretto, l'altra scritta prevalentemente in *latino sine flexione* e alla quale collaborarono oltre allo stesso Peano, i suoi allievi tra cui Ugo Cassina, ma anche altri matematici italiani tra cui Oscar Chisini, Luigi Fantappié, Tullio Levi-Civita, Beniamino Segre e Michele Cipolla (Roero, 1999, p. 13). Il successo iniziale è attestato anche dalla circostanza che al Congresso Internazionale dei matematici che si tenne a Bologna dal 3 al 10 settembre 1928 il *latino sine flexione* fu tra le lingue ammesse. Tuttavia, a fronte di questi elementi che facevano ben sperare seguì, con la morte di Peano (1932), un lento ma definitivo declino, anche per la grave situazione politica alle soglie della seconda guerra mondiale. Un'influenza maggiore hanno invece avuto le notazioni di logica di Peano che ancora oggi si incontrano, anche se deformate, nella letteratura matematica. Un esempio è il simbolo di appartenenza di un elemento a un insieme. Peano utilizzò la lettera greca epsilon (ε) come iniziale della terza persona del tempo presente del verbo essere;[10] tale simbolo si trova ampiamente usato nei testi di matematica, deformato ($\in$) e senza che nessuno si occupi di ricordarne l'origine, il significato iniziale e il nome di colui che per primo lo introdusse (Manara 1994, p. 291).

BIBLIOGRAFIA

al-Khwārizmī (1831) *The Algebra of Mohammed ben Musa* edited and translated by F. Rosen, London, Oriental translation, 1831.

Bartocci U. & Macrì R.V. (2002) Il linguaggio della matematica, *Episteme*, N. 5, 2002.

Bombelli R. (1572) *L'Algebra parte maggiore dell'arimetica diuisa in tre libri di Rafael Bombelli da Bologna*, G. Rossi.

Bombelli R. (1966) *L'Algebra, prima edizione integrale*, prefazioni di E. Bortolotti e di U. Forti. Milano, Feltrinelli.

Bortolotti E. (1966) *Prefazione*, in Rafael Bombelli, *L'Algebra*, Feltrinelli, pp.XXV-XLIV.

Bramanti M. (2011) *I linguaggi matematici. Idee e simboli*, giugno 2011, http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/testi/I%20linguaggi%20matematici.pdf.

Cajori F. (1993) *A History of Mathematical Notations*, Two volumes bound in one, Dover Edition (edizione conforme alla prima edizione, La Salle, The Open court Publishing Company, 2 voll. 1928 e 1929).

Cardano G. (1539) *Practica arithmetice, & mensurandi singularis. In quaque preter alias continentur, versa pagina demonstrabit*, Io. Antonius Castellioneus Mediolani imprimebat impensis Bernardini Calusci.

Cardano G. (1545) *Artis magnae, siue de regulis algebraicis, lib. unus*, Norimbergae : per Joh. Petreium excusum.

Cassina U. (1955) Storia ed analisi del "Formulario completo" di Peano, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, **10**: 244-265, 544-574.

Descartes R. (1637) *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences plus la Dioptrique. Les Météores et La Géométrie qui sont des essais de cete Méthode*, a Leyde, de l'imprimerie de Ian Maire.

Diophante d'Alexandrie (1959) *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke*. Paris, Librairie scientifique et technique A. Blanchard.

Fiocca A. & Leone E. (2017) *L'inedito terzo libro de L'Algebra di Rafael Bombelli*. Edizioni della Normale, Serie Mathematica n. 6.

Fiocca A. (2002) *Francesco Patrizi e la questione del Reno nella seconda metà del Cinquecento: tre lettere inedite*, in *Francesco Patrizi filosofo platonico nel crepuscolo del Rinascimento*, a cura di P. Castelli. Firenze, Olschki, pp. 253-285.

Fiocca A. (2008) *Da Scipione del Ferro a Rafael Bombelli: progressi dell'algebra in Italia nel XVI secolo*, in *Idee e proposte per un corso di aggiornamento in didattica della matematica per docenti di Scuola Secondaria*, Quaderni di didattica della Matematica II, a cura di G. Gnani e V. Roselli, Ferrara.

Galilei, G. (1896) *Il Saggiatore*, in *Le Opere di Galileo Galilei : edizione nazionale sotto gli auspici di sua maestà il Re d'Italia*, vol. VI, Firenze, Barbera.

Genocchi, A. (1884) *Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale*, pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano, Torino, Bocca.

Leonardo Pisano (1857) *Il Liber abbaci di Leonardo Pisano* pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano C. 1., 2616, Badia Fiorentina, n. 73 da Baldassarre Boncompagni, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Leonardo Pisano (1862) *Practica geometriae ed opuscoli*, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Lolli G. (2008) *Peano and the foundations of arithmetic*, in F. Skof, *Giuseppe Peano between Mathematics and Logic*, Springer.

Luciano E. (2012) *Peano and His School Between Leibniz and Couturat: The Influence in Mathematics and in International Language*, in *New Essays on Leibniz Reception*, *In Science and Philosophy of Science 1800-2000*, Ralf Krömer, Yannick Chin-Drian eds., Basel, Birkhäuser, 41-64.

[10] «Signum ε significat *est*. Ita $a \varepsilon b$ legitur *a est quoddam b*; $a \varepsilon K$ significat *a est quaedam classis*; $a \varepsilon P$ significat *a est quaedam propositio*». (Peano *Arithmetices Principia*, p. X).

Luciano E. (2017) Characterizing a Mathematical School: Shared Knowledge and Peano's Formulario, *Revue d'Histoire des mathématiques*, **23**: 1-49.

Luciano E. (2020) A Matter of Style and Praxis. Segre vs. Peano on the Concept of Rigour in Mathematics Education, *Rivista di Storia dell'Università di Torino*, **9**: 1-17.

Manara C.F. & Marchi M. (1986) Il Linguaggio matematico. *Scuola e Didattica*, **16**: 93-97.

Manara C.F. (1994) Giuseppe Peano e i fondamenti della geometria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, **178**: 284-295.

Peano G. (1888) *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino, Bocca.

Peano G. (1889) *Arithmetices Principia nova methodo exposita*. Torino, Bocca.

Peano G. (1889) *I principii di geometria logicamente esposti*. Torino, Bocca.

Peano G. (1891) Principii di logica matematica. *Rivista di Matematica*, **1**: 1-10.

Peano G. (1891) Formole di logica matematica. *Rivista di Matematica*, **1**: 24-31, 182-184.

Peano G. (1895-1903) *Formulaire de mathématiques* / publié par la Rivista di matematica di Giuseppe Peano, Torino.

Peano G. (1908) *Formulario mathematico editio V*, Torino.

Roero C.S. (1999) I matematici e la lingua internazionale, *La matematica nella società e nella cultura*, **2**: 159-182.

Roero C.S. (2015) Peano, Giuseppe, *Dizionario Biografico degli Italiani*, **82**: 29-33.

Ver Eecke P. (1959) *Introduction* in Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke*. Paris, A. Blanchard, pp. VII-XCI.

Whitehead A.N., Russell B. (1910) *Principia Mathematica.* Volume 1. Cambridge, Cambridge University Press.