



Università degli Studi di Ferrara

DOTTORATO DI RICERCA IN  
SCIENZE DELL'INGEGNERIA

CICLO XXI

COORDINATORE Prof. Stefano Trillo

***CALCOLO DEL DANNEGGIAMENTO A  
FATICA SU COMPONENTI MECCANICI IN  
CONDIZIONI DI CARICO COMPLESSE***

Settore Scientifico Disciplinare ING-IND/14

**Dottorando**

Dott. Capetta Simone

**Tutore**

Prof. Tovo Roberto

---

*(firma)*

---

*(firma)*

Anni 2006/2008

*Titolo:* CALCOLO DEL DANNEGGIAMENTO A FATICA SU COMPONENTI MECCANICI IN CONDIZIONI DI CARICO COMPLESSE

*Autore:* Ing. Simone Capetta

*Dipartimento:* Dipartimento di Ingegneria  
*Università:* Università degli Studi di Ferrara  
*Indirizzo:* via Saragat, 1 – 44100, Ferrara

*Dottorato di ricerca:* Scienze dell'Ingegneria  
*Curriculum:* Ingegneria Industriale

Ciclo XXI

*Coordinatore del dottorato:* Prof. Stefano Trillo  
Università degli Studi di Ferrara

*Tutore del corso:* Prof. Roberto Tovo  
Università degli Studi di Ferrara

*Commissione esaminatrice:* Prof. Roberto Pompoli  
Università degli Studi di Ferrara  
Prof. Alberto Tiziani  
Università degli Studi di Padova  
Prof. Denis Benasciutti  
Università degli Studi di Udine

*Esame finale:* 27 Marzo 2009

# INDICE

Nomenclatura	1
<b>Capitolo 1:</b>	
Introduzione	5
<b>Capitolo 2: EFFETTI GEOMETRICI</b>	
2.1 Effetti d'intaglio in elasticità lineare	8
2.1.1 Definizione del coefficiente di concentrazione delle tensioni	8
2.1.2 Calcolo del coefficiente di concentrazione delle tensioni	11
2.2 Condizioni di innesco e propagazione delle microcricche in fatica	14
2.3 Criteri di progettazione a fatica nei componenti intagliati	17
2.3.1 Criteri locali di picco (meccanica classica dell'intaglio)	21
2.3.1.1 Criteri di Neuber e Peterson	21
2.3.1.2 Teoria delle distanze critiche	22
2.4 Modello non locale	24
2.4.1 Introduzione	24
2.4.2 Formulazione matematica del modello non locale	24
2.4.3 Modello a gradiente implicito	27
2.4.4 Previsione della resistenza a fatica	31
2.4.5 Soluzione numerica della tensione non locale per intagli a V	32
<b>Capitolo 3: VERIFICA A FATICA MULTIASSIALE</b>	
3.1 Introduzione	34
3.2 Definizione delle grandezze ingegneristiche correlate al tensore deviatorico	37
3.3 Un criterio agli invarianti per la verifica a fatica in presenza di multiassialità tensionali	39
3.3.1 Introduzione	39

3.3.2	Definizione del sistema di riferimento di massimo danneggiamento	42
3.3.3	Definizione dell'ampiezza deviatorica equivalente $\sigma_{d,a}$	47
3.3.4	Formulazione del criterio multiassiale	48
<b>Capitolo 4: SINTESI DELL'ATTIVITÀ SPERIMENTALE CONDOTTA</b>		
4.1	Introduzione	50
4.2	Analisi sperimentale del comportamento a fatica di provini caratterizzati da intagli complessi	51
4.2.1	Materiale impiegato e geometria dei provini	51
4.2.2	Procedura sperimentale	55
4.2.3	Analisi statistica dei risultati sperimentali	57
4.2.4	Modalità di cedimento osservate	69
<b>Capitolo 5: PROCEDURA DI CALCOLO</b>		
5.1	Introduzione	72
5.2	Definizione delle grandezze di calcolo	75
5.3	Sviluppo delle equazioni fondamentali	78
5.3.1	Stima del sistema di riferimento di massima varianza	78
5.3.2	Calcolo dell'ampiezza deviatorica nel sistema diagonalizzato	83
5.3.3	Calcolo del rapporto di carico multiassiale	87
<b>Capitolo 6: STRUMENTI DI CALCOLO</b>		
6.1	Procedura computazionale	90
6.2	Routine di estrazione dati FEM ed importazione campi scalari	94
6.2.1	Valutazione dell'errore di importazione-esportazione dei dati	95
6.3	Esempio applicativo	98
<b>Capitolo 7: ANALISI NUMERICHE E RISULTATI</b>		
7.1	Introduzione	104

7.2	Equazione del criterio multiassiale	105
7.3	Taratura del parametro diffusivo $c$	107
7.4	Risultati numerici	112
7.4.1	Sforzo assiale	113
7.4.2	Torsione pura	114
7.4.3	Carichi combinati $\delta=1, \varphi=0^\circ$	115
7.4.4	Carichi combinati $\delta=1, \varphi=90^\circ$	116
7.4.5	Carichi combinati $\delta=1.73, \varphi=0^\circ$	117
7.4.6	Carichi combinati $\delta=1.73, \varphi=90^\circ$	118
7.4.7	Sintesi dei risultati	119

## **Capitolo 8: CENNI SULLE APPLICAZIONI DEL GRADIENTE IMPLICITO IN CAMPO NON LINEARE**

8.1	Introduzione	121
8.2	Il campo di tensione in prossimità di un intaglio acuto realizzato in materiale non lineare	123
8.3	Calcolo della tensione efficace con il metodo del gradiente implicito per materiale non lineare	125
8.3.1	Soluzione analitico-numerica in un dominio circolare	125
8.3.2	Soluzione numerica applicata alle saldature	126
8.3.3	Soluzione numerica per provini con intagli laterali	131

## **Capitolo 9**

Considerazioni finali	134
-----------------------	-----

<b>Bibliografia</b>	136
---------------------	-----

## **Appendice**

A.1	Routine di estrazione delle tensioni nodali	148
A.2	Routine per il calcolo dell'ampiezza della componente deviatorica e della tensione idrostatica massima	149
A.3	Routine di importazione dei campi scalari nella fem structure	153









# NOMENCLATURA

$a_0$	parametro di El-Haddad
$\alpha(\bar{x}, \bar{y})$	funzione peso nel modello non locale
$c$	coefficiente diffusivo
$\bar{\bar{C}}_k$	matrice di covarianza del vettore $\bar{s}(t)$ nel nodo $k$
$C_{ij,k}$	elementi della matrice di covarianza nel nodo $k$
$\gamma$	coefficiente di sicurezza a fatica
$\Gamma$	percorso di carico descritto dal vettore $\bar{s}(t)$
$\delta$	rapporto di biassialità
$E(\%)$	indice di errore
$\zeta(\bar{x})$	scalare locale valutato nel punto $\bar{x}$
$\tilde{\zeta}(\bar{x})$	scalare non locale valutato nel punto $\bar{x}$
$\zeta_{\text{eff}}(\bar{x})$	grandezza scalare locale assunta come responsabile del cedimento a fatica valutata nel punto $\bar{x}$
$\tilde{\zeta}_{\text{eff}}(\bar{x})$	grandezza scalare non locale assunta come responsabile del cedimento a fatica valutata nel punto $\bar{x}$

$\sqrt{J_2(t)}$	radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico
$\sqrt{J_{2a}}$	ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico
$K_t$	coefficiente teorico di concentrazione delle tensioni
$K_f$	coefficiente di riduzione della vita a fatica
$K_i^N$	notch stress intensity factors
$K_{NP}$	notch stress intensity factors in campo elasto-plastico
$\Delta K_{th}$	valore di soglia del fattore di intensificazione delle tensioni
$\Delta K_I$	fattore di intensificazione delle tensioni per carichi di modo I
$\bar{n}_i^*$	direzione i-esima del sistema di massima varianza
$N$	componente normale della tensione di un criterio multiassiale
$R_p$	raggio plastico
$\rho_{FL}$	rapporto di carico multiassiale
$\bar{s}(t)$	vettore rappresentativo della componente deviatorica
$s_i(t)$	componente i-esima del vettore $\bar{s}(t)$
$\bar{s}'(t)$	vettore $\bar{s}(t)$ per la componente di carico “'”
$\bar{s}''(t)$	vettore $\bar{s}(t)$ per la componente di carico “''”

$\bar{s}(t) _{n_i^*}$	proiezione di $\bar{s}(t)$ lungo la direzione i-esima del sistema di massima varianza
$\left(\bar{s} _{n_i^*}\right)_a$	ampiezza della proiezione i-esima
$\sigma_a$	ampiezza di carico
$\sigma_A$	limite di fatica del materiale in termini di ampiezza
$\sigma_n$	componente normale di tensione nei criteri di piano critico
$\sigma'_{ij}(t)$	componenti di tensione per la condizione di carico “'”
$\sigma''_{ij}(t)$	componenti di tensione per la condizione di carico “''”
$\sigma_{\text{eff}}$	tensione locale assunta come responsabile del cedimento a fatica valutata nel punto $\bar{x}$
$\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$	tensione non locale assunta come responsabile del cedimento a fatica valutata nel punto $\bar{x}$
$\sigma_H(t)$	tensione idrostatica
$\sigma_{H,\text{max}}$	tensione idrostatica massima
$\tilde{\sigma}_{H,\text{max}}$	tensione idrostatica massima non locale
$\sigma_{d,a}$	ampiezza deviatorica equivalente
$\left(\sigma_{d,a}\right)_i$	ampiezza lungo la direzione i-esima del vettore rappresentativo della componente di carico deviatorica

$\tilde{\sigma}_{d,a}$	ampiezza deviatorica equivalente non locale
$\sigma_{d,A} _{\rho_{FL}}$	limite di fatica del materiale in termini della componente deviatorica per un fissato rapporto di carico multiassiale
$\overline{\overline{\sigma}}(t)$	tensore di Cauchy
$\overline{\overline{\sigma}}'(t, k)$	tensore di Cauchy, nel nodo $k$ , per la condizione di carico “’”
$\overline{\overline{\sigma}}''(t, k)$	tensore di Cauchy, nel nodo $k$ , per la condizione di carico “’’”
$\overline{\overline{\sigma}}_d(t)$	tensore deviatorico
$\overline{\overline{\sigma}}(\overline{x})$	tensore di Cauchy locale valutato nel punto $(\overline{x})$
$\overline{\cong\sigma}(\overline{x})$	tensore di Cauchy non locale valutato nel punto $(\overline{x})$
$T$	componente tangenziale della tensione di un criterio multiassiale
$T_\sigma$	componente tangenziale di tensione nei criteri integrali
$\tau_a$	componente tangenziale di tensione nei criteri di piano critico
$\varphi$	angolo di sfasamento tra le componenti di carico
$u_x, u_y, u_z$	spostamenti nodali
$V_r(\overline{x})$	volume di riferimento nel modello non locale

## **INTRODUZIONE**

Le esperienze di cedimenti avvenuti in esercizio dimostrano come l'evoluzione delle tecniche di progettazione a fatica debba essere accompagnata da una profonda conoscenza di tale fenomeno, considerato nell'ottica del materiale, in relazione a fattori microstrutturali come ad esempio la struttura e composizione, al processo produttivo con cui il componente è ottenuto, alla presenza di difetti o inclusioni, ecc.

Se da un lato tali fattori svolgono un ruolo fondamentale nella comprensione dei meccanismi di innesco e propagazione delle fessure per fatica, non meno importanti sono gli aspetti macrostrutturali come la geometria complessiva, le forze esterne, condizioni ambientali, ecc. È chiaro quindi che il cedimento a fatica di un componente meccanico è un fenomeno molto complesso nel quale giocano moltissime variabili il cui effetto non è ben distinto l'una dall'altra, nel senso che è difficile definire la condizione limite che determina la transizione tra l'influenza dei diversi parametri ed il loro eventuale sinergismo.

La progettazione affidabilistica di componenti con forme geometriche complesse e soggetti a carichi affaticanti è, a livello, industriale un tema di grande interesse. Il problema dell'affidabilità strutturale è fortemente sentito quando vengono realizzati intagli o discontinuità geometriche accentuate che, innalzando localmente lo stato di sforzo, costituiscono zone altamente preferenziali per l'innesco di fratture. La progettazione a fatica, in tale contesto, è spesso complicata dalla presenza di stato tensionale multiassiale dovuto agli effetti d'intaglio stessi o condizioni di carico complesse. In quest'ultimo caso inoltre, la presenza di sfasamento tra le componenti di carico esterne richiede modelli di previsione della resistenza a fatica

multiassiale in grado di considerare l'effetto della variazione nel tempo delle direzioni principali di tensione.

Nella realtà industriale è largamente consolidata la progettazione meccanica basata sulla modellazione solida dei componenti. Grazie allo sviluppo raggiunto nel corso degli ultimi anni dai software di modellazione tridimensionale, in genere viene fornito al progettista un ambiente completo nel quale poter eseguire sia la modellazione della geometria sia il calcolo dello stato tensionale, con tecniche agli elementi finiti, una volta definite le condizioni al contorno del problema. La ricerca applicata nella progettazione a fatica deve necessariamente seguire la via indicata dalle esigenze di carattere industriale e quindi gli strumenti di calcolo in tale contesto devono essere sviluppati per potersi integrare alla modellazione solida ed analisi FEM di componenti tridimensionali.

Il lavoro contenuto nella tesi si propone di fornire una metodologia di progettazione e verifica nell'ambito della fatica multiassiale di componenti meccanici, interessati da elevate concentrazioni tensionali dovute a intagli. In particolare si considereranno sollecitazioni cicliche di tipo monoassiale e biassiale, ad ampiezza costante, sia in fase che fuori fase.

L'ambito in cui si sviluppa il lavoro coinvolge aspetti tipici della progettazione a fatica legati all'*effetto gradiente* di tensione, dovuto alla presenza di concentratori con raggio di raccordo molto piccolo, ed all'*effetto multiassiale*, dovuto alla presenza sia dei concentratori geometrici 3D che condizioni di carico multiassiali.

Nel capitolo 2 verranno considerati gli effetti legati alla presenza di intagli, in termini di calcolo tensionale, comportamento microstrutturale del materiale soggetto a carichi affaticanti e criteri di progettazione. In particolare, sarà approfondito un metodo di progettazione alternativo ai classici criteri di picco, basato sul concetto di media della grandezza rappresentativa del cedimento a fatica su un volume di riferimento. In presenza infatti di raggi di raccordo ridotti e, quindi, di elevati effetti di concentrazione delle tensioni è ben noto come non sia più il fattore teorico di concentrazione delle tensioni a governare la resistenza a fatica di un componente, ma piuttosto un valore mediato delle tensioni in una zona di processo.

Nel capitolo 3, verrà analizzato il problema della valutazione della resistenza a fatica multiassiale con particolare riguardo agli approcci a vita infinita. L'analisi dello stato dell'arte ha evidenziato come i diversi criteri sviluppati dipendano fortemente dalla durata in termini di vita a fatica e siano perciò differenti per le previsioni di resistenza a basso numero di cicli

e ad alto numero di cicli. Le più consolidate tecniche per la stima di vita a fatica a basso numero di cicli sono basate su approcci in deformazione. Questi criteri sono talvolta estesi anche alla fatica ad alto numero di cicli, dove il contributo plastico alla deformazione diviene trascurabile. Tutti i criteri di resistenza a fatica multiassiale ad alto numero di cicli sono invece basati esclusivamente sulla valutazione delle componenti dello stato di tensione. In questo contesto ed in relazione agli obiettivi del lavoro prefissati, assumono un interesse notevole i metodi basati sugli invarianti del tensore degli sforzi. Tali approcci, da un lato garantiscono una elevata efficienza di calcolo, mentre dall'altro hanno evidenziato una buona sensibilità agli effetti dello sfasamento delle componenti di tensione.

Nel capitolo 4 sono riassunti i risultati sperimentali di test a fatica effettuati presso il Trinity College – Department of Mechanical & Manufacturing Engineering in collaborazione con il gruppo di ricerca diretto dal prof. David Taylor. Con lo scopo di applicare e validare una nuova metodologia di calcolo della resistenza a fatica multiassiale di componenti meccanici interessati da elevate concentrazioni tensionali, è stata condotta una campagna di prove su provini cilindrici in acciaio a basso tenore di carbonio con intagli 3D, caratterizzati da raggio di fondo intaglio ridotto, soggetti a carichi monoassiali, di torsione pura e combinati di trazione e torsione sia in fase che fuori fase.

Nel capitolo 5 viene proposto lo sviluppo delle equazioni fondamentali per l'implementazione in codici di calcolo agli elementi finiti della metodologia sviluppata, mentre gli aspetti di carattere computazionale saranno discussi nel capitolo 6.

I criteri di taratura adottati per il modello non locale ed il criterio multiassiale, nonché la sintesi dei risultati numerici ed il confronto con i dati sperimentali verrà proposta nel capitolo 7.

Infine nel capitolo 8 verranno presentati alcuni cenni sull'estensione del metodo del gradiente implicito al materiale avente comportamento di tipo elasto-plastico. L'impiego della non linearità del materiale è introdotta allo scopo di poter analizzare la vita a termine di componenti meccanici che mostrano una sensibile variazione della pendenza della curva di Woehler al variare della gravosità dell'intaglio o delle condizioni di carico. Verranno presi in esame intagli acuti a V, giunzioni saldate e provini piani indeboliti da intagli laterali ad U realizzati in acciaio basso resistenziale in cui l'effetto della plasticizzazione è rilevante anche a medio e alto numero di cicli.

# EFFETTI GEOMETRICI

## 2.1 Effetti d'intaglio in elasticità lineare

### 2.1.1 Definizione del coefficiente di concentrazione delle tensioni

I calcoli sulla resistenza meccanica di strutture sono generalmente basati sulla teoria dell'elasticità lineare. Se le condizioni di carico causano un campo tenso-deformativo con valori che eccedono le condizioni di snervamento allora devono essere adottate complesse teorie basate sulla plasticità. Tuttavia i fenomeni di fatica generalmente si verificano a livelli di tensione bassi e l'ipotesi di comportamento lineare è sufficientemente preciso per descrivere lo stato tensionale del componente. Il comportamento elastico macroscopico di un materiale isotropo è caratterizzato da tre costanti elastiche, il modulo elastico di Young (E), il modulo a taglio (G) ed il coefficiente di Poisson ( $\nu$ ).

In una struttura, le discontinuità geometriche, come ad esempio i fori, devono essere considerate ai fini del calcolo strutturale. Gli intagli possono generare disomogeneità nella distribuzione dello stress con un picco di concentrazione localizzato alla "radice dell'intaglio". Una parziale semplificazione della precedente condizione è data dal fatto che, in presenza di effetti di concentrazione e per stati tensionali prossimi al limite di fatica, il materiale rimane prevalentemente all'interno del comportamento lineare elastico, ad esclusione di una porzione limitata e ristretta in prossimità dell'apice dell'intaglio. Adottando la formalizzazione proposta in [Atzori 94], l'andamento tensionale e deformativo in prossimità dell'apice di un intaglio raccordato, può essere suddiviso in zone in base a caratterizzazioni analitiche lineari elastiche.



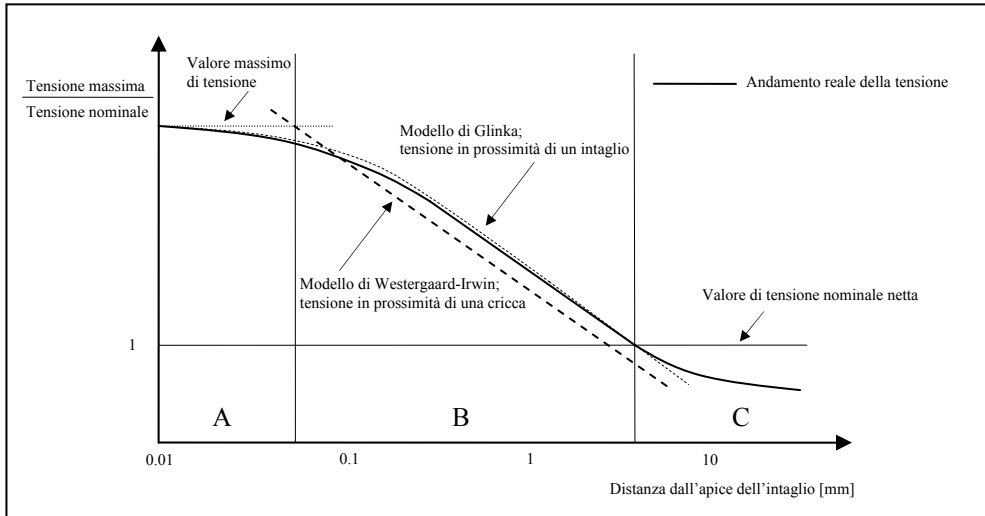


Fig. 2.1: Divisione in zone del campo tensionale in prossimità dell'apice di un intaglio

Il grafico precedente propone in ascissa la distanza dall'apice dell'intaglio ed in ordinata andamento della tensione normalizzato rispetto alla tensione nominale. Il campo tensionale è stato suddiviso in tre zone nelle quali la prima zona (A) è in genere molto piccola e caratterizzata all'apice e dalla zona immediatamente vicina dove lo stato tensionale è prossimo al valore massimo. Nella zona di transizione tra (A) e (B) è dominante l'effetto del gradiente che risulta approssimativamente simile a quello di una cricca di profondità pari o uguale a quella di un intaglio. Nella zona (C) l'effetto di concentrazione delle tensioni tende ad annullarsi portando lo stato tenso-deformativo a convergere verso l'andamento nominale.

Il punto di separazione tra le zone (A) e (B) è costituito dall'intersezione tra il modello della tensione della cricca simile all'intaglio in esame ed il valore massimo della tensione lineare elastica all'apice. Tra le zone (B) e (C) viene preso in considerazione il modello di distribuzione tensionale in prossimità dell'intaglio, così come formulato da Glinka [Glinka 87]; il punto in cui il valore di tensione assunto dal modello di Glinka eguaglia il valore della tensione nominale identifica il limite di separazione tra le zone (B) e (C). Nel seguito vedremo come, in base a tale suddivisione dello stato tensionale, possono essere suddivisi anche i criteri per la determinazione del limite di fatica.

Per valutare agevolmente il picco di tensione in campo lineare elastico all'apice di un intaglio viene introdotto il coefficiente teorico di

concentrazione dello stress,  $K_t$ , definito come il rapporto tra la tensione di picco valutata alla radice dell'intaglio e la tensione nominale che si ottiene applicando semplicemente la teoria di De Saint Venant:

$$K_t = \frac{\sigma_{\text{picco}}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (2.1)$$

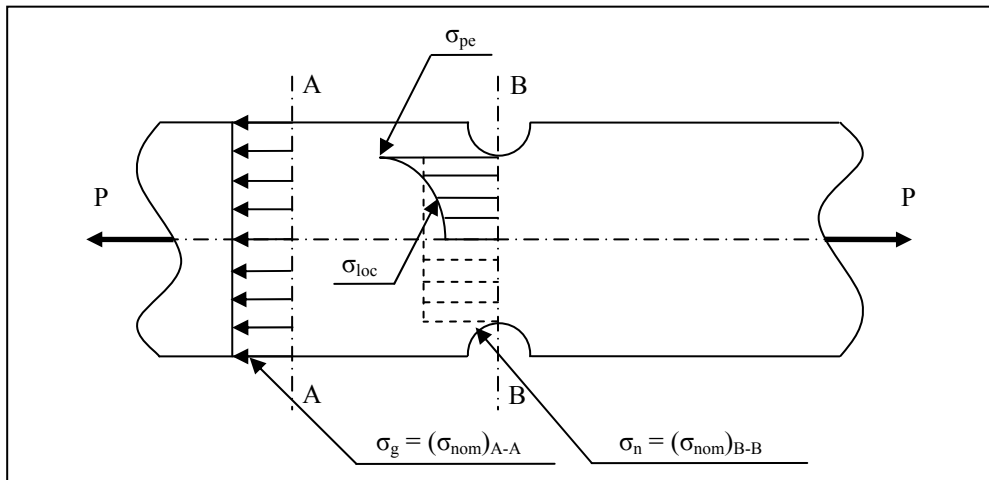


Fig. 2.2: Effetto d'intaglio in una piastra sollecitata a trazione

La severità della concentrazione di stress dipende dalla configurazione geometrica dell'intaglio, generalmente riferita come “forma dell'intaglio”. È importante evidenziare che date le ipotesi di linearità il valore di  $K_t$  non dipende né dal carico applicato né dalle dimensioni assolute del componente, ma solo dai rapporti dimensionali della geometria considerata. Tra gli obiettivi del progettista è di fondamentale importanza la riduzione degli effetti di concentrazione dello stress con lo scopo di evitare fenomeni affaticanti. Il valore di  $K_t$ , può essere stimato in diversi modi:

- numerico:
  - metodi analitici
  - metodi numerici (FEM)
- sperimentale:
  - misure foto-elastiche
  - misure estensimetriche

### 2.1.2 Calcolo del coefficiente di concentrazione delle tensioni

Nell'intraprendere l'analisi della concentrazione tensionale nelle strutture, è opportuno un cenno ai primi classici studi sull'argomento, che essenzialmente riguardarono situazioni estremamente semplici. Tra questi ricordiamo lo studio dell'effetto di disturbo di un foro sullo stato tensionale di una lastra piana illimitata, nel caso di foro circolare [Kirsch 98] o ellittico [Kolossoff 09] [Muskhelishvili 53].

Nel seguito si richiameranno brevemente i concetti di elasticità piana (stato piano di tensione e deformazione), per poi esaminare l'estensione a problemi tridimensionali nel caso in cui sia presente un concentratore tensionale.

Consideriamo un elemento sottile contenuto nel piano  $x,y$  e caricato da forze contenute nello stesso piano applicate al contorno dell'elemento. In questo caso le componenti di stress  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  possono essere assunte uguali a zero. Lo stato di tensione risultante è chiamato "stato piano di tensione" e le componenti dello stress  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  sono funzione solo del punto  $(x,y)$  considerato.

Se la dimensione nella direzione  $z$  di un corpo prismatico è molto maggiore rispetto alle altre dimensioni nel piano  $x,y$  e le forze applicate sono ortogonali alla direzione  $z$ , allora si può assumere che  $\varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  siano uguali a zero. In questo caso si parlerà di "stato piano di deformazione".

Generalmente questi due casi di problemi bidimensionali sono anche chiamati "problemi piani".

Considerando l'equilibrio di un elemento infinitesimo nel piano  $x,y$  ed indicando con  $X$  e  $Y$  le componenti delle forze di massa per unità di volume, si possono ricavare le equazioni differenziali di equilibrio per un problema piano:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \qquad (2.2)$$

Le equazioni differenziali precedentemente scritte devono essere soddisfatte in tutti i punti del dominio di integrazione. Inoltre le componenti di tensione sul bordo devono essere in equilibrio con le forze esterne applicate al contorno.

Tali condizioni di equilibrio si traducono nelle condizioni al contorno necessarie alla risoluzione delle (2.2):

$$\begin{aligned}\bar{X} &= l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m \cdot \sigma_y + l \cdot \tau_{xy}\end{aligned}\tag{2.3}$$

dove  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  sono le componenti, lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ , delle forze di superficie per unità di area, mentre  $l$  ed  $m$  sono i coseni direttori della normale del piano tangente al bordo.

Per la determinazione delle componenti di stress  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , dalle equazioni differenziali di equilibrio (2.2) è necessario considerare le deformazioni elastiche del corpo. Dalle componenti di deformazione elastica  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ , si ricava la seguente condizione di compatibilità:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}\tag{2.4}$$

Utilizzando la legge di Hooke, la condizione di compatibilità può essere riscritta in termini delle componenti di tensione [Pilkey 93]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -f(\nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{2.5}$$

dove  $f(\nu)$  è una funzione del coefficiente di Poisson:

$$f(\nu) = \begin{cases} 1 + \nu \Rightarrow \text{stato piano di tensione} \\ \frac{1}{1 - \nu} \Rightarrow \text{stato piano di deformazione} \end{cases}\tag{2.6}$$

Nel caso in cui le forze di volume siano costanti,  $\partial X / \partial x = \partial Y / \partial y = 0$ , dalla (2.5) si ottiene:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = 0\tag{2.7}$$

Le equazioni differenziali di equilibrio (2.2) insieme alle condizioni al contorno (2.3) e le equazioni di compatibilità (2.5) o (2.7), forniscono un sistema di equazioni sufficiente alla completa determinazione della distribuzione dello stato tensionale per un problema piano.

È possibile osservare che il sistema di equazioni così ottenuto, se le forze di volume sono costanti, non contiene le proprietà del materiale; per problemi bidimensionali quindi la distribuzione dello stress è funzione solo che della forma del corpo considerato e dei carichi esterni applicati al bordo e non dipende dal materiale.

Considerando casi tridimensionali non esistono semplici relazioni simili alla (2.7) ottenuta per i problemi piani. In generale inoltre, il fattore di concentrazione delle tensioni varierà in funzione del materiale considerato oltre che della forma e condizioni al contorno. Per esempio il coefficiente di Poisson  $\nu$  è di solito considerato in analisi su concentratori di tensione tridimensionali. In molti dei grafici di sintesi proposti in [Peterson 73] il fattore di concentrazione delle tensioni è riportato in funzione anche del coefficiente di Poisson. L'influenza di tale parametro sul coefficiente di concentrazione varia a seconda dei casi considerati. Ad esempio nel caso di una barra con intaglio circolare assialsimmetrico soggetta a carichi di torsione, la distribuzione delle tensioni e il fattore di concentrazione non dipendono da  $\nu$ . La deformazione di taglio dovuta alla torsione infatti non varia il volume dell'elemento cioè l'area della sezione trasversale rimane costante. Al contrario se l'intaglio ha forma iperbolica ed il carico è di trazione pura il coefficiente di concentrazione delle tensioni nella direzione assiale della barra diminuisce all'aumentare del coefficiente di Poisson.

I metodi classici di progettazione propongono di stimare la resistenza a fatica in presenza di effetti d'intaglio quando sia noto il coefficiente  $K_t$  di concentrazione delle tensioni calcolato in campo elastico. Tuttavia, specie per componenti complessi, attualmente viene direttamente calcolato l'intero stato tensionale in campo elastico mediante codici ad elementi finiti. È opportuno evidenziare comunque che il coefficiente  $K_t$  potrebbe non essere stimabile. Infatti, nel caso ad esempio di componenti di forma complessa, non è sempre possibile individuare una tensione nominale oppure, per componenti con concentratori che presentano raggio di fondo intaglio nullo, il picco di tensione calcolato in campo elastico risulta singolare e quindi il coefficiente di concentrazione delle tensioni tende ad infinito.

## 2.2 Condizioni di innesco e propagazione delle microcricche in fatica

La nucleazione di un danneggiamento permanente, così come il processo di fatica nel suo complesso, è controllato dalle deformazioni cicliche di tipo plastico. La rottura finale di un componente strutturale spesso deriva dalla progressiva crescita di un difetto, fino al raggiungimento di una dimensione critica per il componente stesso.

Qualora il difetto non sia inizialmente presente, il numero totale di cicli per giungere alla rottura finale è costituito da una frazione di cicli necessaria per la formazione della fessura (che solitamente ha origine nelle adiacenze di zone a forte concentrazione tensionale) e da un'altra frazione responsabile della propagazione fino a rottura. In elementi strutturali che contengano dei concentratori tensionali, la prima parte di cicli è di gran lunga inferiore alla seconda (“*short life fatigue*”). Viceversa, qualora la concentrazione tensionale sia molto bassa o addirittura assente (elementi privi di difetti macroscopici o concentratori, “*smooth specimens*”), la maggior parte di cicli è necessaria per la formazione di cricche, mentre il successivo accrescimento, fino alla rottura statica, avviene in un numero di cicli relativamente piccolo (“*long life fatigue*”).

È chiaro quindi che lo sviluppo di modelli di previsione della resistenza a fatica sono correlati all'assunzione adottata per descrivere il comportamento microstrutturale del materiale nella fase di innesco.

Innanzitutto è opportuno adottare un criterio per distinguere, in maniera quanto più rigorosa possibile, un difetto da una cricca e successivamente quando si ritiene innescata. Infatti, i meccanismi di propagazione risultano diversi ed in funzione della forma e dimensione che può assumere un difetto o una cricca.

Nel seguito della trattazione, non saranno valutati gli effetti della variazione dell'ampiezza di carico e del rapporto di sollecitazione nei fenomeni che verranno affrontati.

In tale contesto, il lavoro proposto da Miller [Miller 93] offre un criterio per la classificazione della forma che difetti o cricche possono assumere in relazione alla loro lunghezza. In tale lavoro viene evidenziata la presenza di due differenti condizioni limite, una legata al materiale ed una al comportamento meccanico, per descrivere il cedimento a fatica di provini caratterizzati da intagli a severità crescente.

In base al criterio di Miller la distinzione di cricche o difetti può essere formulata in tre diverse tipologie:

- *Microstructurally Short Cracks*: caratterizzate da una dimensione non superiore a quella di un grano cristallino, tensioni elevate e propagazione secondo la Microstructural Fracture Mechanics (MFM), cioè legata alla massima deformazione di taglio nel singolo grano con propagazione di modo II o III.
- *Physically Short Cracks*: caratterizzate da una dimensione inferiore a quella di 10 grani cristallini e meccanismo di propagazione secondo la Elasto-Plastic Fracture Mechanics (EPFM), con cricche che tendono a modo I.
- *Long Cracks*: per le quali la dimensione è molto maggiore a quella del grano, fino a 100 volte, caratterizzate dalla Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) con propagazione di modo I dominante.

In base alla classificazione riportata possono essere fatte alcune considerazioni relativamente al comportamento del materiale in condizioni di carico prossime al limite di fatica. Molte evidenze sperimentali hanno dimostrato che anche per carichi inferiori al limite di fatica vi è la nucleazione di microcricche (*Short Cracks*) che tuttavia non propagano durante l'applicazione del carico. Questa osservazione dà la possibilità di reinterpretare il limite di fatica, da un punto di vista microstrutturale, come un limite, in termini tensionali, al di sotto del quale le microcricche non propagano. Il fenomeno delle *Non-Propagating Cracks* (NPCs) è stato osservato inizialmente da Fenner [Fenner 51] su provini in acciaio basso legati e da Frost [Frost 57] sulle leghe d'alluminio, il quale evidenziò la possibilità di riscontrare tale fenomeno anche su provini lisci.

In particolare, nei lavori successivi di Frost [Frost 59], il comportamento delle *Non-Propagating Cracks* al variare dell'effetto d'intaglio viene riassunto come descritto dalla figura 2.3, dalla quale si può notare come il fenomeno delle NPCs sia più facilmente riscontrabile in provini intagliati caratterizzati da un forte gradiente di tensione.

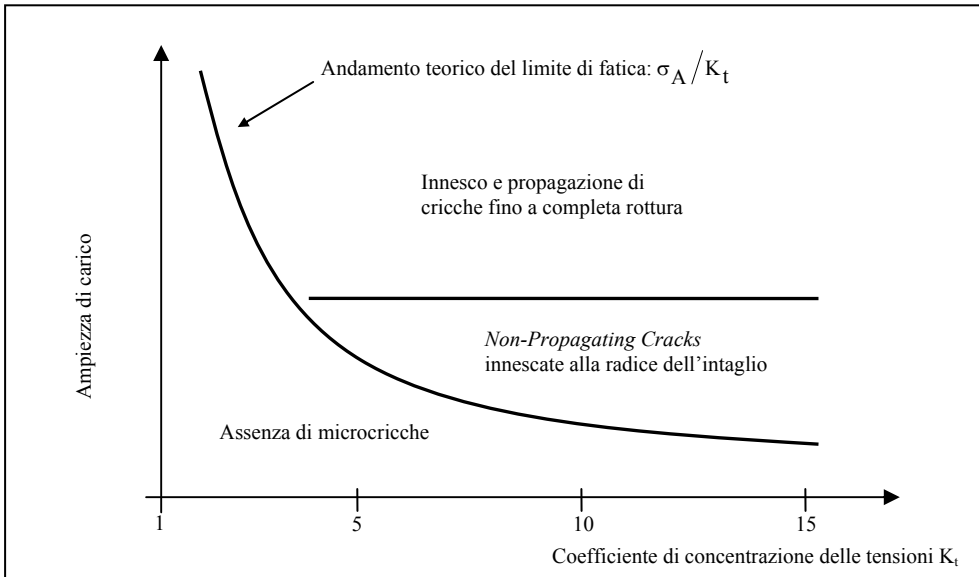


Fig. 2.3: Zona di nucleazione delle NPC [Frost 59]

Yates e Brown [Yates 87] suggerirono che la massima lunghezza delle NPCs risulta funzione del parametro di El Haddad  $a_0$ , corretto da un fattore di forma che tiene conto della geometria del componente quindi, in accordo con tale modello, la lunghezza delle NPCs dipende dalle proprietà a fatica del materiale e dalla geometria d'intaglio.

Al contrario, Taylor, applicando la *Teoria delle Distanze Critiche* (TCD) alle cricche corte, evidenzia come la lunghezza delle NPCs sia funzione delle sole proprietà a fatica del materiale, approssimando a  $2a_0$  la lunghezza di tali cricche [Taylor 01].

Lo studio delle *Non-Propagating Cracks* svolge un ruolo fondamentale nella comprensione dei fenomeni fisici che si svolgono all'interno della zona di processo, aiutando a sviluppare metodi adatti per la previsione di resistenza a fatica ad alto numero di cicli in componenti intagliati.



### 2.3 Criteri di progettazione a fatica nei componenti intagliati

Nella progettazione meccanica classica viene comunemente adottato l'approccio "safe-life" ossia, a partire da un tipico spettro di carico che rappresenta la condizione di carico del componente in servizio, viene stimata la vita a fatica in modo che raggiunto il limite di lavoro in termini di cicli il componente viene ritirato dal servizio. Tale approccio, quando applicato alla progettazione ad elevato numero di cicli, diviene in pratica una progettazione al di sotto del limite di fatica del materiale che equivale ad un approccio che cerca di evitare la nucleazione e propagazione di cricche significative nel componente. Di conseguenza, per elementi caratterizzati da effetti di concentrazione dello stress, la condizione di non innesco di una cricca coincide con la condizione di non propagazione di cricche corte all'apice dell'intaglio, come è stato evidenziato precedentemente nel caso delle *Non-Propagating Cracks*.

All'inizio del presente capitolo è stata proposta la formalizzazione adottata da Atzori et al. per descrivere l'andamento tensionale in prossimità della radice di un intaglio e in base a tale suddivisione possono essere suddivisi anche i criteri per la previsione della resistenza a fatica, in quanto questi criteri sono di fatto formulati su parametri tratti da ognuna una delle zone delineate.

Le metodologie classiche di progettazione a cui oggi si fa riferimento possono essere suddivise in:

- progettazione secondo la tensione nominale
- criteri locali di picco (meccanica classica dell'intaglio)
- criteri di campo lineare elastico (MFLE)

La progettazione basata sulla tensione nominale, anche se ricopre una ristretta casistica applicativa, viene generalmente adottata per particolari costruttivi che contengono, disomogeneità strutturali del materiale, tensioni residue, oltre che rilevanti effetti geometrici. Un classico esempio di progettazione secondo la tensione nominale è costituito dalle giunzioni saldate, per le quali, le varie geometrie di giunzione vengono suddivise in classi ed il comportamento a fatica di ciascuna classe viene caratterizzato sperimentalmente e riformulato in termini statistici in funzione della tensione nominale, che viene poi utilizzata per il dimensionamento.

I metodi di previsione a fatica basati su criteri di picco sono formulati in relazione al valore massimo dello stato tensionale, calcolato in campo elastico, in prossimità dell'intaglio e, come vedremo in seguito, applicabili in componenti che presentano effetti di concentrazione dello stress

contenuti. Al contrario, nel caso di elementi caratterizzati da intagli con raggio di raccordo molto piccolo o nullo, cricche o difetti, è necessario abbandonare il concetto locale di resistenza a fatica per adottare criteri basati sul calcolo di fattori in grado di descrivere completamente il campo tensionale nelle vicinanze di effetti geometrici singolari, nei quali si impone il non superamento del valore di soglia  $\Delta K_{th}$ , del fattore di intensificazione delle tensioni ( $\Delta K_I$  nel caso delle cricche sollecitate da carichi affaticanti).

La suddivisione proposta si basa dunque su caratterizzazioni analitiche lineari elastiche del campo tensionale in prossimità dell'apice di un intaglio raccordato. Tuttavia, una distinzione dei campi di applicabilità delle metodologie di progettazione, può essere ottenuta in relazione alla severità dell'intaglio considerato. Le tipologie a cui ancora oggi si fa riferimento in letteratura per gli intagli sono semplicemente intagli dolci e intagli acuti. In realtà esistono anche altri concentratori di tensione, che in genere non vengono classificati come intagli, pur avendo cause ed effetti del tutto simili, relativi al caso di raggio di fondo intaglio nullo. La figura 2.4 [Taylor 94] evidenzia in maniera schematica ma chiara il criterio oggi comunemente utilizzato per classificare gli intagli come dolci o acuti. In tale rappresentazione, introducendo i limiti più vincolanti della meccanica della frattura nei criteri della meccanica classica, è riportata la variazione del limite di fatica di un materiale, in termini di tensione nominale, al crescere del coefficiente di intensificazione delle tensioni, per intagli di profondità costante.

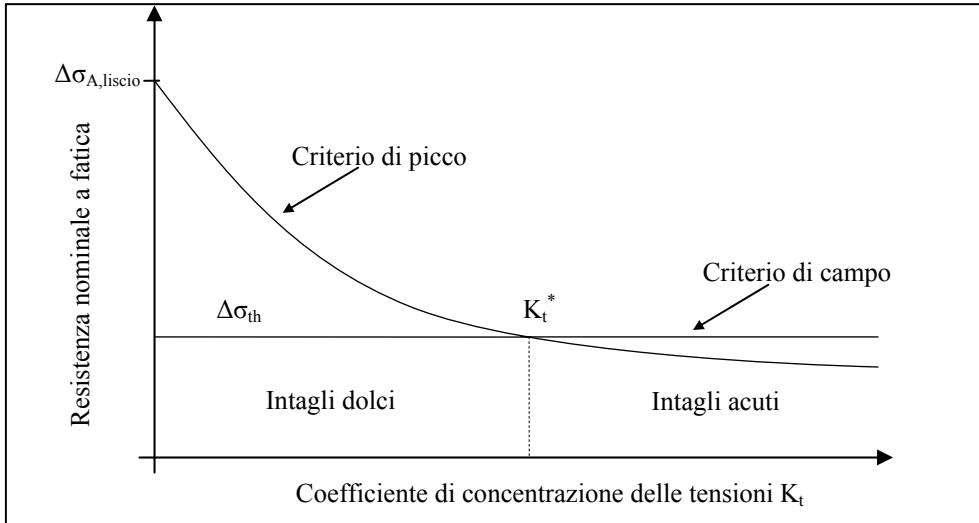


Fig. 2.4: Variazione del limite di fatica al crescere di  $K_t$  per intagli di profondità costante

Nella figura sono evidenziati i criteri di progettazione, precedentemente introdotti, della meccanica classica e della meccanica della frattura lineare elastica. Atzori et al. misero in evidenza [Atzori 00] come il valore di  $K_t^*$ , che separa i campi di applicazione dei due criteri, dipende, oltre che dal materiale, anche dalla geometria dell'intaglio, in particolare dalla sua profondità.

In letteratura è già stato ampiamente evidenziato, in relazione al limite di fatica di componenti criccati, come le previsioni fornite dai criteri della meccanica della frattura

$$\Delta K_{th} = \Delta \sigma_{th} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (2.8)$$

non possono portare ad un limite di fatica  $\Delta \sigma_{th}$  maggiore di  $\Delta \sigma_A$  mostrato dal materiale in assenza di cricche, come evidenziato dalla figura 2.5.

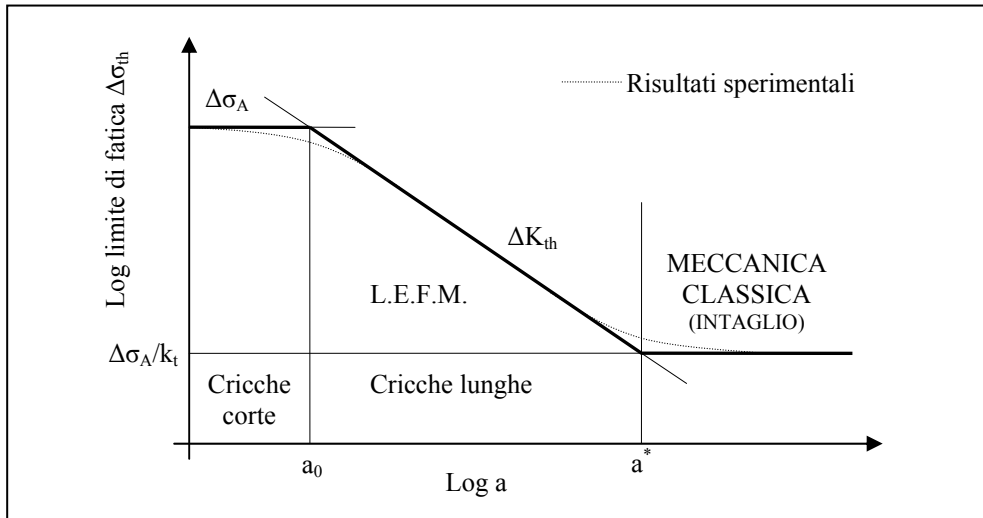


Fig. 2.5: Comportamento a fatica di un materiale in presenza di cricche e intagli

La intersezione delle due rette che rappresentano i due criteri individua una cricca di lunghezza  $a_0$  ('cricca intrinseca del materiale') che separa il campo di applicazione della meccanica classica da quello della meccanica della frattura per il materiale considerato. Imponendo che  $\Delta\sigma_{th} = \Delta\sigma_A$  è immediato ricavare il valore di  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_A} \right)^2 \quad (2.9)$$

Nel caso di intaglio dolce, con sensibilità a fatica unitaria, deve risultare  $\Delta\sigma_{pe} = K_t \cdot \Delta\sigma_{nom} = \Delta\sigma_A$ , perciò, per un dato valore di  $K_t$ , il comportamento a fatica sarà schematicamente quello indicato a tratto continuo in figura 2.5. Per elevati valori di  $a$  prevarrà il criterio di picco, mentre per valori inferiori ad  $a^*$  si passerà al criterio di campo, sino a giungere ad una trascurabile influenza non solo del picco ma anche del campo per  $a$  inferiori ad  $a_0$ . Sostituendo nella 2.8 il valore di picco di tensione in condizioni di limite di fatica, calcolato per mezzo della 2.1, è possibile ottenere il valore di  $a^*$ :

$$a^* = a_0 \cdot (K_t)^2 \quad (2.10)$$

Osserviamo inoltre che per  $K_t = \infty$  (caso della cricca) il valore di  $a^*$  tende ad infinito e non sarà mai possibile far ricorso ad un criterio di picco.

È bene comunque evidenziare la netta differenza del comportamento reale rispetto a quello schematico nell'intorno di  $a^*$  e nell'intorno di  $a_0$ . Nel primo caso tale differenza è imputabile alla “sensibilità all'intaglio” mentre nel secondo alla “sensibilità ai difetti”, caratteristiche che dipendono entrambe dal materiale considerato.

I diagrammi di figura 2.4 e 2.5 potrebbero sembrare equivalenti, tuttavia differiscono in relazione alle applicazioni nel campo della progettazione. Infatti il primo introduce in maniera corretta i limiti più vincolanti della meccanica della frattura nei criteri della meccanica classica, portando a previsioni sempre in vantaggio di sicurezza, mentre al contrario il secondo non introduce in maniera corretta i limiti più vincolanti della meccanica classica nei criteri della meccanica della frattura, limitandosi ad imporre il non superamento di un massimo assoluto, costituito dal comportamento del materiale liscio, e portando pertanto nella zona di transizione a previsioni sempre in svantaggio di sicurezza, quindi non accettabili dal progettista.

Nel seguito del lavoro verrà proposta una introduzione ai criteri locali di picco elastico dando particolare risalto sia a metodi classici sia a metodi recentemente sviluppati in elasticità lineare che si rifanno al concetto di “volume critico”.

### 2.3.1 Criteri locali di picco (meccanica classica dell'intaglio)

#### 2.3.1.1 Criteri di Neuber e Peterson

Il metodo più frequentemente adottato per semplicità applicativa e di calcolo nella progettazione a fatica di componenti intagliati si basa sulla valutazione del valore massimo di tensione in campo elastico. Tuttavia è ampiamente consolidata l'evidenza sperimentale secondo la quale, l'influenza di un intaglio acuto è molto meno gravosa di quella che si può prevedere utilizzando la tensione di picco elastica. Ne consegue che il fattore di riduzione della vita a fatica  $K_f$  risulta generalmente inferiore al coefficiente teorico di concentrazione delle tensioni  $K_t$ , valutato in campo elastico. Un tale comportamento può essere spiegato considerando che il danneggiamento a fatica è controllato sia dal valore massimo di tensione alla radice dell'intaglio, sia da una media della tensione in un volume di riferimento, in prossimità dell'intaglio, con dimensioni che dipendono dal materiale.

Sulla base di tale assunzione Neuber propose, usando il raggio di fondo intaglio per caratterizzare il campo tensionale nell'intorno del concentratore, una formula approssimata per la stima del coefficiente di riduzione della vita a fatica [Neuber 58]:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/\rho}} \quad (2.11)$$

dove  $a$  rappresenta una costante del materiale con dimensioni di una lunghezza che può essere in prima approssimazione correlata con il carico di rottura del materiale mentre  $\rho$  indica la dimensione del raggio di fondo intaglio. Nella precedente espressione il coefficiente  $1/(1 + \sqrt{a/\rho})$  rappresenta l'indice di sensibilità all'intaglio. Diverse espressioni sono state proposte per stimare la sensibilità all'intaglio tra le quali tuttavia si è consolidata l'espressione proposta da Peterson [Peterson 59], che considera la tensione in un punto ad una data profondità dall'intaglio ( $a_p$ ) come parametro rappresentativo della resistenza a fatica:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + (a_p/\rho)} \quad (2.12)$$

### 2.3.1.2 Teoria delle distanze critiche

Abbiamo precedentemente visto che Peterson fu tra i primi ricercatori ad ipotizzare che il fenomeno della rottura per fatica potesse dipendere dal livello di tensione lungo la bisettrice, ad una data distanza  $a_p$  dall'apice dell'intaglio. L'idea di "volume strutturale" proposta da Neuber è invece legata al concetto di media tensionale lungo una linea di una determinata lunghezza. I due approcci sono generalmente classificati come, rispettivamente, metodo di punto (PM) e metodo di linea (LM) che in maniera più generale rientrano nella *Teoria delle Distanze Critiche* (TCD). Recentemente Tanaka [Tanaka 83] e Taylor [Taylor 99] hanno proposto di estendere l'utilizzo della teoria delle distanze critiche per analizzare sia gli effetti di una cricca che di "blunt notches". In particolare Taylor [Taylor 99] propone di esprimere la distanza critica per questi metodi in termini di un parametro  $L$ , la lunghezza critica, che è unicamente funzione delle proprietà del materiale cioè, il limite di fatica ( $\Delta\sigma_A$ ) ed il valore di soglia del fattore di intensificazione delle tensioni ( $\Delta K_{th}$ ):

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_A} \right)^2 \quad (2.13)$$

Nel caso del metodo di punto (*Point Method-PM*) la distanza critica è  $L/2$ , mentre per il metodo di linea (*Line Method-LM*) è  $2L$ . Per meglio chiarire l'applicazione dei metodi è opportuno fare riferimento alla seguente figura:

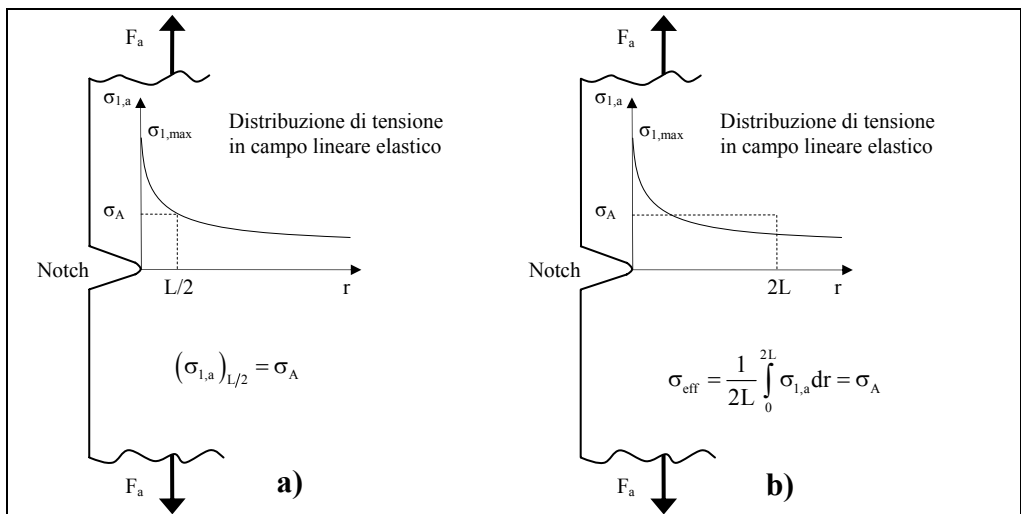


Fig. 2.6: Formalizzazione del metodo di punto a) e del metodo di linea b)

Come rappresentato in figura, nel caso del PM il componente è in condizioni di limite di fatica quando, lungo la bisettrice dell'intaglio la tensione, valutata alla distanza critica  $L/2$ , è pari al limite di fatica del materiale. Nel caso del LM invece, il limite di fatica del materiale va confrontato con una tensione efficace,  $\sigma_{\text{eff}}$ , calcolata mediando il campo tensionale lungo la bisettrice dell'intaglio per una distanza critica pari a  $2L$ . L'applicazione della teoria delle distanze critiche è stata di recente estesa da Taylor e coautori [Bellett 02] [Bellett 05] formulando i criteri di area (*Area Method-AM*) e volume (*Volume Method-VM*), con lo scopo di analizzare effetti d'intaglio tridimensionali o comunque concentratori 3D caratterizzati da stati tensionali assimilabili a problemi piani.

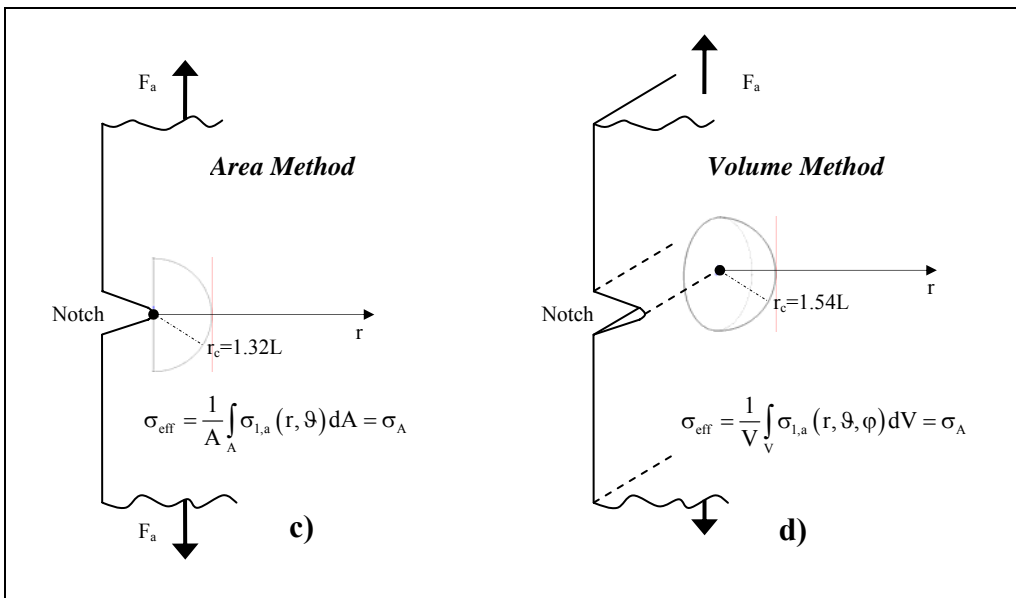


Fig. 2.7: Formalizzazione del metodo di area c) e del metodo di volume d)

In questo caso gli autori ottengono un valore di distanza critica pari ad  $1.32L$  per il metodo di area ed  $1.54L$  per il metodo di volume.

Tali metodi hanno mostrato una buona precisione nella previsione della resistenza a fatica ad alto numero di cicli sia di provini intagliati [Taylor 00] che di componenti reali [Taylor 00\_b]. Inoltre, è stato dimostrato che la teoria delle distanze critiche può essere applicata a componenti intagliati caricati a modo misto [Susmel 03] e nel caso di previsioni della resistenza a fatica nella regione a basso numero di cicli [Susmel 07] [Susmel 08].



## 2.4 Modello non locale

### 2.4.1 Introduzione

In letteratura sono stati proposti metodi alternativi per stimare la resistenza a fatica utilizzando lo stato tensionale locale in campo elastico valutato con opportuni metodi numerici [Frost 74] [Smith 78] [Taylor 94]. Tuttavia il collegamento tra lo stato tensionale locale calcolato e la resistenza a fatica del componente presenta problematiche non completamente chiarite.

Se consideriamo ad esempio componenti caratterizzati da materiali fragili ed intagli acuti i modelli di picco, basati sulla valutazione di un valore tensionale locale massimo per la stima del danneggiamento a fatica, devono essere abbandonati ed adottati criteri di campo tipici della meccanica della frattura. In alternativa ai criteri di campo, possono essere utilizzati modelli basati su una media volumetrica della variabile scalare di tensione assunta come rappresentativa del criterio di rottura adottato. In tale ambito sono stati proposti diversi criteri ispirati al lavoro di Neuber [Neuber 68], tra i quali ricordiamo alcune referenze rappresentative: Novozhilov (1969) [Novozhilov 69], Seweryn e Mroz (1995) [Seweryn 95], Taylor (1999) [Taylor 99] e Lazzarin e Zambardi (2001) [Lazzarin 01-A].

Tali approcci di media volumetrica, possono essere interpretati come versioni semplificate dei modelli non locali sviluppati in elasticità a partire dagli anni 60.

Nelle sezioni seguenti verranno ripresi i concetti fondamentali dei modelli non locali evidenziando una variante alla formulazione integrale di tali criteri, definita come “Modello a Gradiente Implicito”, recentemente riproposta da Tovo et al. inizialmente per problemi statici [Tovo 06] e successivamente per la previsioni della resistenza a fatica di giunzioni saldate [Tovo 07].

### 2.4.2 Formulazione matematica del modello non locale

I primi sviluppi sui modelli non locali furono proposti da Eringen, Edelen e Kröner nel 1960 ed erano basati sull'assunzione che il principio di azione locale poteva essere violato. In particolare venne proposto che la tensione  $\bar{\sigma}$  dipende non solo dalla deformazione  $\bar{\varepsilon}$  nel punto  $\bar{x}$ , ma anche da una media pesata su un volume di riferimento con peso proporzionale alla distanza da  $\bar{x}$ . Quindi, in un corpo con volume  $V$  e superficie  $S$ , la tensione

non locale  $\bar{\bar{\sigma}}(\bar{x})$  nel punto  $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)$  di  $V$  può essere ottenuta dalla media pesata del tensore degli sforzi locale  $\bar{\sigma}(\bar{y})$  attraverso l'espressione:

$$\bar{\bar{\sigma}}(\bar{x}) = \frac{1}{V_r(\bar{x})} \int_V \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{\sigma}(\bar{y}) d\bar{y} \quad (2.14)$$

Nell'equazione (2.14) il simbolo  $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$  indica un valore scalare della funzione peso che dipende dalla distanza Euclidea  $\|\bar{x} - \bar{y}\|$  tra il punto  $\bar{x}$  ed ogni punto  $\bar{y}=(y_1, y_2, y_3)$  di  $V$ . Inoltre il volume di riferimento  $V_r(\bar{x})$  può essere calcolato per mezzo della condizione di normalizzazione della funzione peso sul dominio  $V$ :

$$V_r(\bar{x}) = \int_V \alpha(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \quad (2.15)$$

$V_r(\bar{x})$  è quindi l'integrale della funzione peso  $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$  esteso a tutto il volume del corpo, per cui il fattore  $1/V_r(\bar{x})$  fa in modo che, per stati di tensione omogenei, la tensione equivalente locale e la corrispondente tensione non-locale, coincidano. Per una estesa trattazione sugli aspetti legati alla condizione di normalizzazione può essere assunto come riferimento il lavoro proposto da Polizzotto [Polizzotto 01].

La scelta della funzione peso è chiaramente influenzata dal fenomeno fisico che deve essere modellato. Tuttavia, quando si tratta di fenomeni macroscopici, è possibile ottenere risultati con buona approssimazione adottando una funzione peso che:

- presenta il massimo assoluto nel punto  $\bar{x}$
- all'aumentare della distanza da  $\bar{x}$  tende a zero, in modo da trascurare l'effetto dei punti ad una distanza che dipende dalla funzione peso e da una lunghezza intrinseca  $l$ .

Tra le funzioni peso che soddisfano i precedenti requisiti, le più semplici sono la funzione a gradino:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq l \\ 0 & \text{se } \|\bar{x} - \bar{y}\| > l \end{cases} \quad (2.16)$$

e la distribuzione a campana:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2}{l^2}\right) & \text{se } \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq l \\ 0 & \text{se } \|\bar{x} - \bar{y}\| > l \end{cases} \quad (2.17)$$

Generalmente, per la sua semplicità, viene adottata [Pijaudier-Cabot 87],[Picu 02] la funzione di Gauss:

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = e^{-\frac{k^2 \|\bar{x} - \bar{y}\|^2}{l^2}} \quad (2.18)$$

In questo particolare caso il volume di riferimento calcolato in  $\mathbf{R}_n$  è uguale a  $(l \cdot \sqrt{\pi})^n$  quando  $n=1,2,3$ .

In lavori presentati recentemente fu proposta l'applicazione del modello non locale per alcuni problemi di interesse ingegneristico, come ad esempio il calcolo di valori non locali per massa, forze di volume, entropia e campo pensionale [Bažant 87] [Eringen 72].

Tuttavia tali modelli misero in evidenza alcuni punti deboli, come la complessità nel risolvere l'equazione di equilibrio integro-differenziale e l'impossibilità di dare un significato fisico al campo non locale calcolato sul bordo del dominio di integrazione.

### 2.4.3 Modello a gradiente implicito

Agli inizi degli anni 80 fu compiuto un notevole sforzo per sviluppare modelli non locali utilizzabili con materiali da costruzione come il calcestruzzo; per essi fu proposto di assumere una variabile scalare  $\tilde{\zeta}$  come grandezza non locale rappresentativa del danneggiamento, come per esempio la deformazione principale massima o l'energia di deformazione [Bažant 87] [Pijaudier-Cabot 87]. Perciò la variabile integrale non locale  $\tilde{\zeta}$  viene definita partendo da uno scalare locale  $\zeta$ :

$$\tilde{\zeta}(\bar{x}) = \frac{1}{V_r(\bar{x})} \int_V \alpha(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \zeta(\bar{y}) d\bar{y} \quad (2.19)$$

Il modello così formulato permette di conservare la formulazione delle equazioni di equilibrio perché il modello non locale è applicato ad una variabile scalare anziché al tensore degli sforzi.

Una variante del modello integrale non locale, definita come “modello a gradiente implicito” fu inizialmente proposta da Peerlings et al. [Peerlings 96]. Essi infatti osservarono che partendo dalla definizione in termini integrali del modello non locale (2.19), poteva essere ricavata una espansione a gradiente dello scalare non locale. Nel seguito verranno ripresi i passaggi fondamentali per la derivazione del modello a gradiente implicito, tuttavia per una esaustiva trattazione si rimanda a [Peerlings 96], [Peerlings 99].

Assumendo che le derivate di un definito campo scalare  $\zeta$  esistano, lo scalare rappresentativo del danneggiamento a fatica nel punto  $\bar{y} = \bar{x} + \bar{s}$ , può essere sviluppato in serie di Taylor in un intorno di  $\bar{x}$  di raggio  $\|\bar{s}\|$  con  $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$  [Ciarlet 88]:

$$\zeta(\bar{y}) = \sum_{|\mathbf{m}|=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{m}!} \zeta^{(\mathbf{m})}(\bar{x}) \mathbf{s}^{(\mathbf{m})} \quad (2.20)$$

Nell'equazione (2.20) per il caso  $R_n$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  è una sequenza di  $n$  numeri naturali per i quale il fattoriale è  $\mathbf{m}! = m_1! m_2! \dots m_n!$  e tale che

$|m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Il simbolo  $\zeta^{(m)}$  rappresenta l'insieme formato da tutte le derivate parziali di un dato ordine  $m$ , cioè:

$$\zeta^{(m)} = \frac{\partial^{|m|}\zeta}{\partial \mathbf{x}^{|m|}} = \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \dots \frac{\partial^{m_n}}{\partial x_n^{m_n}} \zeta \quad (2.21)$$

mentre  $s^{(m)} = s^{m_1} s^{m_2} \dots s^{m_n}$ .

Moltiplicando lo scalare  $\zeta(\bar{\mathbf{y}})$ , sviluppato in serie di Taylor (2.20), per la funzione peso espressa in funzione di  $\bar{\mathbf{s}}$  ed integrando in un dominio simmetrico  $V$  si ottiene:

$$\zeta(\bar{\mathbf{y}}) = \frac{1}{V_r(\bar{\mathbf{x}})} \int_V \alpha(\|\bar{\mathbf{s}}\|) \cdot \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \zeta^{(m)}(\bar{\mathbf{x}}) s^{(m)} ds \quad (2.22)$$

dove  $ds = ds_1 ds_2 ds_3$ . La (2.22) ci permette di osservare che il contributo dato dal prodotto di una funzione pari  $\alpha(\|\bar{\mathbf{s}}\|)$  per una funzione dispari integrato in un dominio simmetrico si elide; inoltre se si trascurano i termini del terzo ordine nello sviluppo in serie di Taylor di  $\zeta(\bar{\mathbf{y}})$ , lo scalare non locale può essere riscritto, utilizzando la condizione di normalizzazione (2.15), nella seguente espressione:

$$\tilde{\zeta}(\bar{\mathbf{x}}) \cong \zeta(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2V_r(\bar{\mathbf{x}})} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} c_1^2 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} c_2^2 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3^2} c_3^2 \right) \quad (2.23)$$

Nell'equazione ottenuta i coefficienti  $c_i^2 = \int_V \alpha(\|\bar{\mathbf{s}}\|) s_i^2 ds$ , con  $i=1, \dots, n$  risultano tutti uguali, perciò l'indice  $i$  può essere omissivo. In conclusione possiamo esprimere il campo non locale  $\tilde{\zeta}$  per mezzo dell'equazione differenziale approssimata:

$$\tilde{\zeta}(\bar{\mathbf{x}}) \cong \zeta(\bar{\mathbf{x}}) + c^2 \nabla^2 \zeta(\bar{\mathbf{x}}) \quad (2.24)$$

dove  $\nabla^2$  indica l'operatore differenziale Laplaciano, cioè  $\nabla^2 \zeta = \text{div grad } \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_n^2}$ , e la costante reale positiva  $c$

rappresenta una lunghezza diffusiva del modello a gradiente implicito.

Nella letteratura tecnica [Pijaudier-Cabot 87] la lunghezza diffusiva  $c$  è di solito legata alla lunghezza intrinseca  $l$  della funzione peso assunta inizialmente nella formulazione integrale del modello non locale (2.14). È chiaro quindi che il parametro diffusivo risulta dipendente dal modello scelto.

Per esempio, assumendo la distribuzione gaussiana (2.18) come funzione peso, si imponga la condizione che l'integrale di  $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$  su un volume infinito sia uguale al volume di una iper-sfera di raggio  $l/2$ . Tale condizione equivale ad una linea di lunghezza  $l$  nel caso mono-dimensionale, all'area del cerchio  $\pi l^2/4$  nel caso bi-dimensionale, al volume della sfera  $\pi l^3/6$  nel caso tri-dimensionale. In particolare, si ottiene:

- Nel caso monodimensionale, assumendo  $k = \pi$ ,  $c^2 = l^2/4\pi$
- Nel caso bidimensionale, assumendo  $k = 2$ ,  $c^2 = l^2/16$
- Nel caso tridimensionale, assumendo  $k = \sqrt[3]{6\sqrt{\pi}}$ ,  $c = l^2 / 4\sqrt[3]{36\pi}$

Nell'equazione (2.24), il Laplaciano è applicato al campo locale  $\zeta$ , che si suppone essere noto, per il quale è richiesto un elevato ordine di regolarità. La tensione equivalente non locale  $\tilde{\zeta}$  è ottenuta risolvendo una equazione differenziale di tipo esplicito.

In accordo con quanto proposto in [Peerlings 96] differenziando due volte entrambi i membri dell'equazione (2.24), si ottiene:

$$\nabla^2 \tilde{\zeta}(\bar{x}) \cong \nabla^2 \zeta(\bar{x}) + c^2 \nabla^4 \zeta(\bar{x}) \quad (2.25)$$

Inoltre, sostituendo l'equazione (2.25) nell'equazione (2.24), e trascurando i termini di quarto ordine della tensione equivalente locale, si ottiene la seguente approssimazione:

$$\tilde{\zeta}(\bar{x}) \cong \zeta(\bar{x}) + c^2 \nabla^2 \tilde{\zeta}(\bar{x}) \quad (2.26)$$

Nell'equazione (2.26) il Laplaciano è applicato alla tensione equivalente non-locale, cosicché quest'ultima può essere ottenuta risolvendo una equazione differenziale di tipo implicito. Poiché nell'equazione (2.26) non è presente il Laplaciano della variabile locale, è richiesta la regolarità sulla variabile locale di ordine più basso.

In questo tipo di analisi, solitamente, come condizioni al bordo, vengono prese in esame le sole condizioni di Newmann, che esprimono l'ortogonalità del gradiente della soluzione cercata con la normale uscente al bordo del dominio di integrazione:

$$\nabla \tilde{\zeta} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.27)$$

dove  $\bar{\mathbf{n}}$  è la normale uscente dalla superficie del corpo di volume  $V$  [De Borst 92] [Peerlings 96].

In alternativa le condizioni al contorno assunte possono essere ricavate mediante principi variazionali [Benvenuti 04].

Dal punto di vista fisico, imporre questo tipo di condizioni al contorno, equivale ad imporre un flusso nullo della soluzione in direzione ortogonale al bordo.

Uno dei vantaggi del modello a gradiente implicito rispetto ai modelli integrali è quello che esso può essere più facilmente implementato in un software agli elementi finiti, poiché contiene quantità che vanno valutate in punti precisi.

### 2.4.4 Previsione della resistenza a fatica

Il comportamento a fatica di un materiale è univocamente descritto da due variabili, ad esempio ampiezza di sollecitazione  $\sigma_a$  e rapporto di carico  $R$ . Se consideriamo carichi ad  $R$  costante, la vita a fatica di un componente può essere semplicemente espressa in termini di ampiezza tensionale  $\sigma_a$ . Per mezzo dell'eq. (2.26) una  $\tilde{\sigma}_{a,eq}$ , rappresentativa della vita a fatica, può essere definita assumendo che  $\tilde{\sigma}_{a,eq} = \tilde{\zeta}$  ed assumendo come scalare locale una ampiezza tensionale equivalente  $\sigma_{a,eq} = \zeta$  ottenuta mediante una soluzione lineare elastica in  $V$ . Per mezzo di tali assunzioni le (2.26) e (2.27) possono essere riscritte:

$$\tilde{\sigma}_{a,eq}(\bar{x}) \cong \sigma_{a,eq}(\bar{x}) + c^2 \nabla^2 \tilde{\sigma}_{a,eq}(\bar{x}) \quad (2.28)$$

$$\nabla \tilde{\sigma}_{a,eq} \cdot \bar{n} = 0 \quad (2.29)$$

La formulazione proposta con le precedenti relazioni per problemi di fatica, ci permette di trattare separatamente l'effetto della multissialità tensionale del campo (connesso alla scelta dello scalare equivalente locale) e l'effetto legato al gradiente tensionale (considerato nel modello a gradiente implicito) sulla resistenza a fatica del componente.

Nel seguito del lavoro verrà proposto un criterio multiassiale basato sugli invarianti del tensore deviatorico che permette una efficiente implementazione in codici di calcolo agli elementi finiti al fine di considerare problemi indipendentemente dalla complessità del dominio e dello stato tensionale.

Nel caso di problemi statici una trattazione estensiva sull'influenza dello scalare non locale assunto per il modello a gradiente è data in [Tovo 06].

Infine è opportuno osservare che la scelta effettuata per lo scalare equivalente locale, a parità di materiale, influenzerà il valore della lunghezza diffusiva  $c$ .



### 2.4.5 Soluzione numerica della tensione non locale per intagli a V

In questa sezione ci si propone di risolvere l'equazione differenziale (2.26) in presenza di singolarità tensionali indotte da intagli ideali a V a spigolo vivo. La soluzione dell'equazione differenziale (2.26) in casi bidimensionali, può essere risolta con procedure di tipo numerico contenute all'interno di codici commerciali come Matlab (PDE tool). Noto il parametro  $c$  del materiale in esame e le condizioni al bordo, è possibile risolvere l'equazione ellittica (2.26) nell'intero di un volume  $V$  se è nota la tensione non locale  $\zeta$ . Questo problema può essere superato se si conoscono a priori i valori dei Notch Stress Intensity Factors (NSIF) nel punto in cui innesca la cricca per fatica. Pertanto, nella soluzione numerica è possibile introdurre  $\zeta$  utilizzando le equazioni lineari elastiche di Williams [Williams 52] nella formulazione proposta in [Lazzarin 96]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{r^{\lambda_1-1} K_1^N}{(1+\lambda_1) + \chi_1(1-\lambda_1)} \cdot \begin{Bmatrix} f_{\vartheta,1}(\vartheta) \\ f_{r,1}(\vartheta) \\ f_{r\vartheta,1}(\vartheta) \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\vartheta} \\ \sigma_r \\ \tau_{r\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{r^{\lambda_2-1} K_2^N}{(1+\lambda_2) + \chi_2(1-\lambda_2)} \cdot \begin{Bmatrix} f_{\vartheta,2}(\vartheta) \\ f_{r,2}(\vartheta) \\ f_{r\vartheta,2}(\vartheta) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

dove  $\chi_1$ ,  $\mu_1$  e  $\lambda_1$  sono dei parametri geometrici e  $K_1^N$  sono gli NSIF dell'intaglio a V in accordo con la definizione di Gross and Mendelson [Gross 72]. Come condizioni al bordo, vengono prese in esame le sole condizioni di Neumann che esprimono l'ortogonalità del gradiente della soluzione cercata con la normale uscente al bordo del dominio di integrazione (dal punto di vista fisico ciò equivale ad imporre un flusso nullo della soluzione in direzione ortogonale al bordo). Per comodità, la soluzione numerica è ottenuta su un dominio semicircolare di raggio  $R$  di dimensioni maggiori al parametro  $c$  del materiale ( $c \ll R$ ). La figura 2.8 mostra il dominio di integrazioni e le condizioni al bordo applicate.

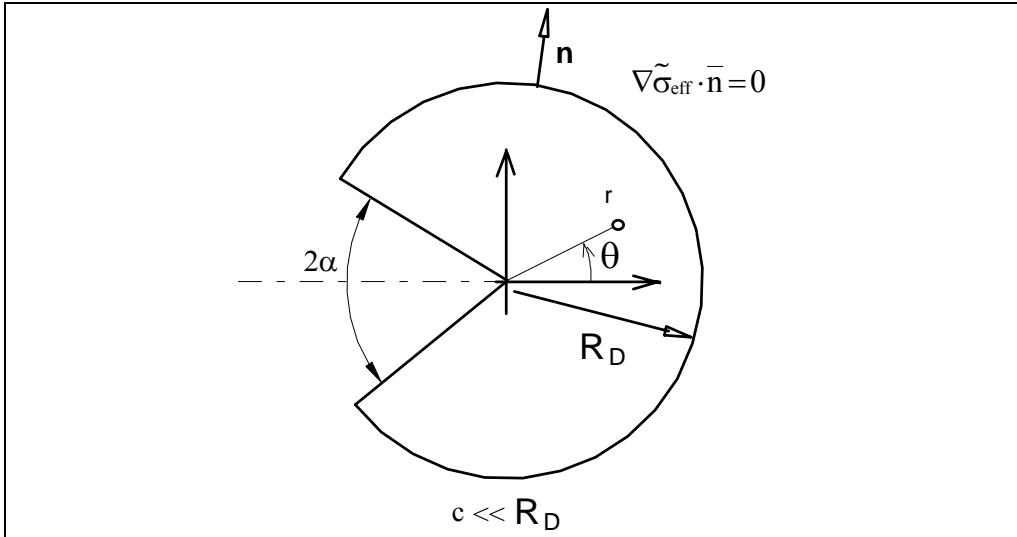


Fig. 2.8: Dominio circolare di integrazione per un intaglio acuto a  $V$

La figura 2.9, riporta una tipica soluzione di  $\zeta$  ottenuta a partire da un campo di tensione di modo I singolare in un dominio circolare di raggio  $R$  simile a quello riportato in figura 2.8. Come tensione non locale è stata assunta la tensione principale massima. Appare evidente che la singolarità del campo di tensione di partenza viene smussata, ottenendo un campo di tensione equivalente non locale di tipo continuo.

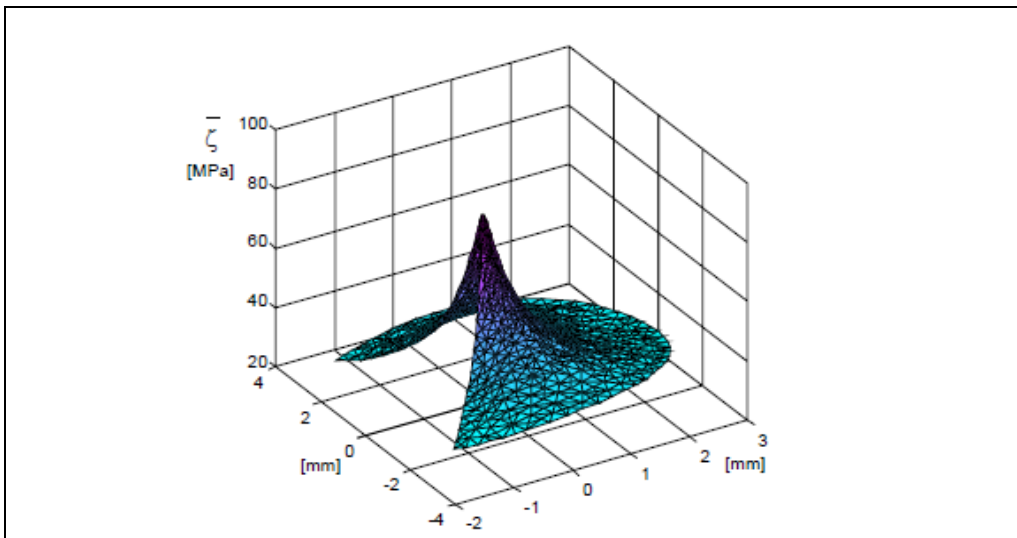


Fig. 2.9: Soluzione di modo I dell'equazione 2.30

# VERIFICA A FATICA MULTIASSIALE

## 3.1 Introduzione

La rottura in esercizio di elementi strutturali soggetti a carichi affaticanti coinvolge stati tensionali che nella maggior parte dei casi sono biassiali o più frequentemente multiassiali. La triassialità dello stato tensionale è spesso dovuta ad effetti geometrici o condizioni di carico complesse che generalmente si verificano in componenti meccanici. Per tali ragioni, il problema della resistenza a fatica per stati tensionali pluriassiali, è stato largamente affrontato e continua ad essere oggetto di studio per molti ricercatori. In tale contesto, i metodi proposti in letteratura possono essere distinti in “low cycle fatigue criteria”, dove il numero di cicli  $N$  a rottura è atteso per  $N < 10^3$ , “medium cycle fatigue criteria”, per  $N > 10^5$ , ed infine “high cycle fatigue criteria” per previsioni nella regione del limite di fatica.

Nel primo caso sono stati proposti approcci basati sulle deformazioni, come ad esempio i criteri formulati da Socie et al. [Socie 87] [Fatemi 88], Brown e Miller [Brown 73], Wang e Brown [Wang 93], ed approcci di tipo energetico introdotti per primo da Ellyin [Ellyin 91] [Ellyin 93], nei quali si considera la somma del termine elastico e plastico dell'energia di deformazione per valutare il danneggiamento a fatica. In alcuni casi, tali criteri sono stati estesi a problemi di fatica ad alto numero di cicli per i quali il contributo dovuto a deformazione plastica diventa trascurabile.

Al contrario invece, tutti i criteri in origine formulati per indagini al limite di fatica, utilizzano un approccio di tipo tensionale, i quali, indipendentemente dalla formulazione, valutano se il componente soggetto a carichi affaticanti è in condizioni di rottura o sicurezza.

Il fattore comune di questi criteri è quello di ridurre un dato stato tensionale multiassiale in un valore di tensione equivalente che viene confrontato con un livello di riferimento per il materiale in oggetto. La forma generale è perciò esprimibile mediante la disequazione:

$$f(T, N) \leq \lambda \quad (3.1)$$

dove  $T$  rappresenta la componente a taglio, che in generale è assunta come fattore dominante nel processo di innesco,  $N$  la componente normale e  $\lambda$  è un valore di riferimento che caratterizza la condizione di limite di fatica. Infine  $f$  esprime una relazione tra la componente a taglio  $T$  e la componente normale  $N$ , che nei casi più semplici è di tipo lineare e può essere tarata mediante la conoscenza dei soli limiti di fatica del materiale a torsione pura e monoassiale semplice.

Tali criteri possono essere classificati a seconda dell'approccio utilizzato in criteri di piano critico, approcci integrali e approcci basati sugli invarianti tensionali.

Gli approcci di piano critico furono originariamente introdotti da Findley [Findley 59] e furono formulati sviluppando l'idea che la cricca di fatica innesca e propaga dal piano che sperimenta il massimo carico [Carpinteri 99-A] [Carpinteri 99-B] [Carpinteri 01] [Matake 77] [Susmel 02] o il valore di danneggiamento più elevato [Findley 59] [McDiarmid 87] [McDiarmid 91] [McDiarmid 94]. Il carico applicato al generico piano viene decomposto nella componente tangenziale  $\tau_a$  e normale  $\sigma_n$  assumendo che la cricca propaga sul piano sottoposto alla massima ampiezza della tensione tangenziale  $\tau_a$ , mentre la componente normale  $\sigma_n$  ha solo un contributo secondario, tuttavia indispensabile, favorendo il processo di danneggiamento della componente tangenziale.

Ciò nonostante gli approcci di piano critico hanno alcuni punti deboli non ancora completamente risolti; è stato dimostrato infatti come, sotto certe condizioni carico, è possibile definire un infinito numero di piani critici [Zenner00-B].

Nel corso dell'ultimo decennio, tra i vari criteri proposti in letteratura, è stata sviluppata l'idea che le componenti tensionali di piano  $T$  ed  $N$  o direttamente il danneggiamento, potrebbero essere integrate su tutti i piani esistenti di un determinato punto del dominio. Tale assunzione è alla base dei criteri integrali che adottando un approccio mesoscopico, cioè una scala di osservazione comparabile alla dimensione del grano cristallino, per

analizzare e prevedere il processo d'innesco di microcricche in condizioni di carico multiassiali [Zenner 00-A] [Zenner 00-B] [Dang Van 93] [Morel 98] [Papadopoulos 97-B]. Il processo d'innesco viene quindi trattato come un fenomeno mesoscopico che interessa un numero limitato di grani cristallini ed assumendo come variabile responsabile del meccanismo di danneggiamento, la deformazione plastica accumulata lungo piani di scorrimento preferenziali. La stima del massimo valore assunto dalla deformazione plastica richiede il passaggio dalla scala mesoscopica alla scala macroscopica sulla quale calcolare un valore mediato della tensione tangenziale di piano. È stato dimostrato che è possibile correlare la deformazione plastica accumulata lungo piani di scorrimento preferenziali con un valore opportunamente mediato della tensione tangenziale di piano, indicato con  $T_c$ , che viene utilizzato nella formulazione del criterio multiassiale [Papadopoulos 93].

Alcune analisi comparative hanno dimostrato come gli approcci integrali forniscono previsioni con buona approssimazione anche se applicanti a carichi random con ampia variazione delle direzioni principali, campo in cui gli altri criteri non sono sufficientemente precisi [Kenmeugne 96] [Papadopoulos 97-A]. È opportuno tuttavia evidenziare come l'utilizzo diffuso degli approcci integrali in campo applicativo risulta fortemente limitato per via della loro complessità e per l'elevato costo computazionale richiesto.

Spesso perciò, sia i criteri di piano critico che gli approcci integrali, sono rimasti confinati al settore della ricerca assumendo un ruolo marginale nell'ambito dei settori applicativi che, con l'affermarsi delle tecniche di analisi numerica (FEA), richiedono algoritmi di calcolo robusti ed efficienti. In questo contesto assumono un interesse notevole i metodi basati sugli invarianti del tensore degli sforzi che garantiscono una elevata efficienza di calcolo. Nel seguito verrà focalizzata l'attenzione su tali approcci, introducendo le grandezze ingegneristiche correlate al tensore deviatorico. Verrà inoltre proposto un criterio agli invarianti per la valutazione del danneggiamento in condizione di limite di fatica [Cristofori 07], efficiente dal punto di vista computazionale ed in grado di descrivere efficacemente gli effetti dello sfasamento.

### 3.2 Definizione delle grandezze ingegneristiche correlate al tensore deviatorico

I criteri basati sugli invarianti del tensore degli sforzi sono generalmente espressi in funzione della componente idrostatica della sollecitazione  $\sigma_{H,\max}$  e dell'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico  $\sqrt{J_{2a}}$ . Tali grandezze si ottengono suddividendo il tensore degli sforzi nelle componenti deviatorica ed idrostatica:

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \sigma_y(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \sigma_z(t) \end{bmatrix} = \bar{\sigma}_d(t) + \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\sigma}(t)) \cdot \bar{I} \quad (3.2)$$

Dalla precedente relazione è possibile ricavare il tensore deviatorico espresso per mezzo delle componenti di tensione riferite al sistema ( $Oxyz$ ):

$$\bar{\sigma}_d(t) = \begin{bmatrix} \sigma'_x(t) & \tau'_{xy}(t) & \tau'_{xz}(t) \\ \tau'_{yx}(t) & \sigma'_y(t) & \tau'_{yz}(t) \\ \tau'_{zx}(t) & \tau'_{zy}(t) & \sigma'_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yx}(t) & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{zx}(t) & \tau_{zy}(t) & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Nella (3.2)  $\bar{I}$  rappresenta la matrice identità,  $\text{tr}(\bar{\sigma}(t))$  è la traccia del tensore degli sforzi, legata alla componente idrostatica, e  $\bar{\sigma}_d(t)$  è il tensore deviatorico. Queste quantità sono utilizzate per ottenere la componente idrostatica  $\sigma_H(t)$  e la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico,  $\sqrt{J_2(t)}$ , dato uno stato tensionale descritto completamente dal tensore di Cauchy  $\bar{\sigma}(t)$ . La tensione idrostatica  $\sigma_H(t)$  è una funzione scalare ed è uguale alla parte sferica del tensore degli sforzi:

$$\sigma_H(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\sigma}(t)) \quad (3.4)$$

dove il suo massimo, in un periodo di tempo  $T$ , è dato da:

$$\sigma_{H,\max} = \max_T [\sigma_H(t)] \quad (3.5)$$

Utilizzando ora, la notazione adottata nel criterio agli invarianti proposta da Crossland [Crossland 56], il tensore deviatorico  $\bar{\sigma}_d(t)$  può essere totalmente descritto da un vettore  $\bar{s}(t)$  nello spazio Euclideo a 5-dimensioni:

$$\bar{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \\ s_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma'_x(t) \\ \frac{1}{2} (\sigma'_y(t) - \sigma'_y(t)) \\ \tau'_{xy}(t) \\ \tau'_{xz}(t) \\ \tau'_{yz}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} (2\sigma_x(t) - \sigma_y(t) - \sigma_z(t)) \\ \frac{1}{2} (\sigma_y(t) - \sigma_z(t)) \\ \tau_{xy}(t) \\ \tau_{xz}(t) \\ \tau_{yz}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Dalla (3.6) è possibile infine calcolare la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico  $\sqrt{J_2(t)}$ , come segue:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\bar{s}(t) \cdot \bar{s}(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (s_i(t))^2} \quad (3.7)$$

### 3.3 Un criterio agli invarianti per la verifica a fatica in presenza di multiassialità tensionali

#### 3.3.1 Introduzione

Il metodo presentato nel seguito utilizza la tensione idrostatica  $\sigma_H$  del tensore di Cauchy ed una definizione equivalente dell'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, che nel seguito della trattazione verrà indicata con  $\sigma_{d,a}$ , come grandezze rappresentative, rispettivamente, della componente normale N ed a taglio T per la formulazione del criterio multiassiale (3.1). L'approccio proposto costituisce l'estensione di un criterio agli invarianti recentemente sviluppato per lo studio delle sollecitazioni affaticanti multiassiali in condizioni di vita a termine [Cristofori 08]. Se consideriamo, per la componente deviatorica di  $\bar{\sigma}(t)$  la formalizzazione proposta da Crossland, il vertice del vettore  $\bar{s}(t)$  descrive nello spazio Euclideo associato un percorso di carico  $\Gamma$  che in generale può essere utilizzato, negli approcci basati sugli invarianti, per il calcolo dell'ampiezza equivalente della componente a taglio T da utilizzare nella formulazione del criterio multiassiale.

A differenza dei metodi classici che individuano i cicli affaticanti analizzando il percorso di carico descritto dalle componenti della sollecitazione, il metodo proposto individua i cicli sulle proiezioni del percorso di carico  $\Gamma$  in un sistema di riferimento opportunamente definito (approccio *PbP*).

L'approccio proposto nel seguito può essere inquadrato come una evoluzione degli approcci di Deperrois [Deperrois 91] e di Li-De Freitas [Li 02], ed è in grado di fornire una stima del danneggiamento analizzando il percorso di carico  $\Gamma$  descritto della componente tensionale proiettata nello spazio deviatorico Euclideo a 5 dimensioni. Lo studio dello stato di sollecitazione in condizione di limite di fatica è condotto impiegando il criterio delle curve di Wöhler modificate di Lazzarin-Susmel [Susmel 02] riformulato in termini di invarianti del tensore degli sforzi.

In Figura 3.1 sono riportati i tre casi generali della forma che può assumere il percorso di carico descritto da  $\bar{s}(t)$ .



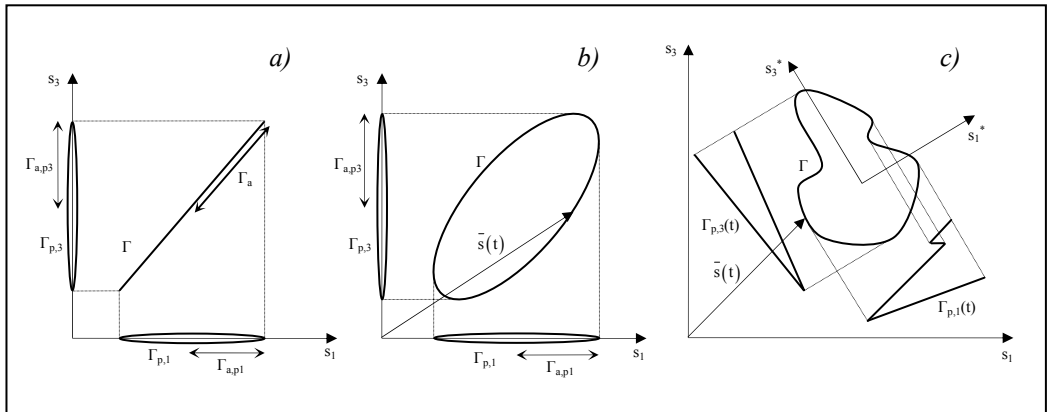


Fig. 3.1: Tipologie di percorsi di carico per stati piani di tensione

In particolare, quando l'angolo di sfasamento tra le componenti di tensione è nullo ed i carichi sono sincroni, il percorso di carico descrive una retta nello spazio Euclideo deviatorico (figura 3.1-a). Nel caso intermedio proposto in figura 3.1-b è rappresentato il percorso di carico ellittico ottenuto da sollecitazioni sincrone ma con angoli di sfasamento  $\delta \neq 0$ . Nel caso più generale, per carichi random,  $\Gamma$  avrà forma complessa (figura 3.1-c). In questo caso inoltre, è possibile osservare che ogni proiezione nello spazio deviatorico Euclideo può essere espressa come funzione del tempo  $\Gamma_{p,i} = \Gamma_{p,i}(t)$ , in modo da ottenere una storia di carico partendo da ogni proiezione del percorso  $\Gamma$  come sinteticamente rappresentato in figura 3.1-c. È chiaro quindi che per ottenere una stima del danneggiamento a fatica per storie di carico complesse è necessario adottare un metodo di conteggio dei cicli. Tra i vari metodi proposti in letteratura, come ad esempio il "Level Crossing Counting", "Peak Valley Counting", "Range Counting", per carichi monoassiali è largamente adottato il metodo "Rain Flow Counting". Tuttavia nella pratica è frequente trovare condizioni di carico intermedie tra il caso più semplice di carichi sincroni in fase ed il caso più generale di sollecitazioni random. Nel capitolo 5 verrà presentato un caso intermedio applicativo per il quale è possibile ottenere le equazioni in forma chiusa delle ampiezze per ogni proiezioni del percorso di carico  $\Gamma$ , rendendo perciò inutile l'adozione di un metodi di conteggio del cicli.

L'assunzione fondamentale del metodo proposto consiste nell'accettare l'ipotesi che il danneggiamento legato al percorso di carico può essere stimato considerando singoli contributi calcolati proiettando  $\Gamma$  lungo gli assi del sistema di riferimento scelto come base dello spazio Euclideo deviatorico. In questo modo ogni proiezione rappresenta una

“approssimazione in fase” del generico percorso di carico indipendentemente dalla complessità della forma e quindi dei carichi esterni applicati.

La procedura che verrà adottata per stimare il danneggiamento a fatica può essere riassunta nei seguenti passi:

- 1- Definizione del sistema di riferimento delle proiezioni.
- 2- Valutazione del danneggiamento totale
- 3- Formulazione del criterio multiassiale

La procedura può essere adottata per valutazioni della resistenza a fatica sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza e può essere usata nella regione di vita a termine o in condizioni di limite di fatica [Cristofori 07]. Nel seguito tuttavia verrà trattato in modo approfondito l'applicazione del metodo nel dominio del tempo per stime della resistenza a fatica ad alto numero di cicli.

### 3.3.2 Definizione del sistema di riferimento di massimo danneggiamento

Quando viene affrontato il problema della valutazione del danneggiamento prodotto da sollecitazioni affaticanti multiassiali al limite di fatica, è stato precedentemente dimostrato che i criteri di resistenza adottano come parametro più significativo una componente tangenziale  $T$ , che assume varie espressioni a seconda del criterio considerato. Dopo aver individuato quindi la formulazione per la componente tangenziale  $T$ , il problema seguente consiste nella determinazione della direzione lungo la quale l'ampiezza, del parametro assunto come responsabile del danneggiamento a fatica, presenta il massimo valore.

Tale osservazione risulta appropriata se vengono adottati criteri di resistenza a fatica multiassiale formulati sul concetto di piano critico, mentre per gli approcci basati sugli invarianti il problema consiste nel quantificare in qualche modo "l'estensione" del percorso di carico descritto dal vettore  $\bar{s}(t)$ . Quando è applicato un carico esterno variabile nel tempo il vettore  $\bar{s}(t)$  descrive una curva nello spazio Euclideo che rappresenta il percorso di carico  $\Gamma$  della componente deviatorica della sollecitazione. È stato precedentemente osservato che se le componenti della sollecitazione sono tutte in fase tra loro allora il percorso di carico descritto dal vettore  $\bar{s}(t)$  è rettilineo, al contrario, invece, in presenza di sfasamento il percorso di carico assume un andamento più complesso (figura 3.1).

L'ampiezza del secondo invariante del tensore deviatorico  $\sqrt{J_{2a}}$  può essere ottenuta partendo dal percorso di carico descritto dal vettore  $\bar{s}(t)$  impiegando il metodo della corda (LCM) proposto da Lamaitre-Chaboche [Lemaitre 90] o il metodo della minima iper-sfera circoscritta (MCHM) proposto da Papadopoulos [Papadopoulos 98]. Tuttavia, tali metodi non sono sensibili alla forma del percorso di carico e di conseguenza non sono sensibili alla presenza di sfasamento tra le componenti della sollecitazione. Per considerare gli effetti indotti dagli sfasamenti tra le sollecitazioni è necessario ricorrere a definizioni alternative per l'ampiezza del secondo invariante. Deperrois e Li-De Freitas hanno introdotto il concetto di ampiezza equivalente  $\sqrt{J_{2a,eq}}$  per la tensione deviatorica. Tale grandezza è una funzione delle ampiezze rilevate su alcune direzioni caratteristiche del percorso di carico considerato. La scelta di tali direzioni dipende dal criterio impiegato per la loro individuazione.

Il criterio di Deperrois [Deperrois 91] individua la corda di lunghezza massima nello spazio Euclideo a 5 dimensioni quindi il percorso di carico viene proiettato nel sottospazio ortogonale alla direzione della corda individuata. Il procedimento viene ripetuto finché si ottiene un sottospazio di dimensione unitaria. L'ampiezza equivalente è definita quindi come funzione delle ampiezze  $d_i$  delle corde individuate:

$$\sqrt{J_{2a,eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^5 d_i^2} \quad (3.8)$$

Come evidenziato anche da Papadopoulos [Papadopoulos 97-A] il metodo di Deperrois non è in grado di fornire una soluzione univoca nei casi in cui sia possibile individuare nel percorso di carico più direzioni caratterizzate dallo stesso valore della lunghezza della corda massima.

In alternativa al metodo di Deperrois è stato proposto da Li-De Freitas [Li 02] un procedimento per individuare la più piccola ellisse circoscritta al percorso di carico (MCE). Questo metodo costituisce una estensione del criterio della minima circonferenza circoscritta di Papadopoulos [Papadopoulos 98]. Per una condizione di carico biassiale il metodo individua in primo luogo la minima circonferenza circoscritta, della quale il raggio  $R_a$  rappresenta il semiasse maggiore dell'ellisse, quindi procede alla determinazione del semiasse minore dell'ellisse  $R_b$ . L'ampiezza equivalente  $\sqrt{J_{2a,eq}}$  viene calcolata in funzione dei semiasse mediante la relazione:

$$\sqrt{J_{2a,eq}} = \sqrt{R_a^2 + R_b^2} \quad (3.9)$$

Come evidenziato da Gonçalves et al. [Gonçalves 05], il metodo di Li-De Freitas può indurre a sovrastimare pesantemente il valore dell'ampiezza equivalente nel caso di carichi affini.

In letteratura sono state proposte misure scalari sviluppate con lo scopo di caratterizzare l'estensione del percorso descritto da un tensore simmetrico del secondo ordine in condizioni di carico non-proporzionali e fuori fase. Tali misure scalari sono costruite introducendo il concetto di assi principali del percorso tensoriale e sono indipendenti dalla parametrizzazione adottata per il percorso tensoriale [Bishop 00]. Nel lavoro presentato da Bishop viene proposta una procedura puramente matematica applicabile all'insieme

costituito da tutti i tensori simmetrici del secondo ordine, di conseguenza anche al tensore di Cauchy, per il calcolo di assi e momenti principali d'inerzia del percorso tensoriale.

La procedura proposta nel seguito utilizza i risultati ottenuti nel lavoro di Bishop e le proprietà statistiche dei segnali variabili nel tempo ed è applicabile a tutti i criteri di resistenza potendo investigare sia le tensioni tangenziali di un tensore delle tensioni, sia spazi vettoriali multidimensionali, come nei criteri basati sugli invarianti del tensore deviatorico, per la stima delle direzioni di massimo danneggiamento.

Inizialmente, allo scopo di scegliere le quantità statistiche corrette, è importante notare che dovrebbero essere soddisfatte le seguenti due condizioni: *i)* per carichi ad ampiezza costante la variabile statistica adottata deve essere proporzionale all'ampiezza del parametro ingegneristico assunto come fattore responsabile del processo d'innescò, e *ii)* deve essere correlata al danneggiamento complessivo a fatica derivante da carichi ad ampiezza variabile o random.

Una conveniente possibilità per soddisfare le precedenti condizioni, oltretutto proposta da diversi autori [Łagoda 96], consiste nell'adottare il metodo della varianza. Consideriamo due processi  $q(t)$  ed  $r(t)$ , definiti in un intervallo  $[0, T]$  ed aventi valor medio rispettivamente  $m_q = E(q(t))$ ,  $m_r = E(r(t))$ ; si definiscono varianza e covarianza le seguenti funzioni:

$$\text{Var}(r(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T (r(t) - m_r)^2 dt \quad (3.10)$$

$$\text{CoVar}(q(t), r(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T (q(t) - m_q) \cdot (r(t) - m_r) dt \quad (3.11)$$

Nel caso di segnali sinusoidali, la varianza è proporzionale all'ampiezza del segnale stesso e non al valore medio. Al contrario, per carichi random, ogni considerazione statistica sull'esistenza di una relazione tra il danneggiamento a fatica e la varianza diventa molto complessa.

Tuttavia per sollecitazioni random Gaussiani monoassiali il danneggiamento può essere approssimato nel seguente modo [Benasciutti 05-A]:

$$D = \alpha C^{-1} \left( \sqrt{2 \text{Var}(r(t))} \right)^k \Gamma \left( 1 + \frac{k}{2} \right) \quad (3.12)$$

dove  $k$  è la pendenza e  $C$  la resistenza di riferimento della curva S-N,  $\alpha$  è una costante variabile tra 0 e 1 in funzione della regolarità del segnale e  $\Gamma(-)$  è la funzione statistica gamma.

È quindi evidente che, anche in condizioni molto dissimili, il danneggiamento a fatica per carichi monoassiali, aumenta all'aumentare della varianza della sollecitazione. Inoltre, in condizioni di carico non Gaussiane, la formulazione matematica per la stima del danneggiamento a fatica diventa molto più complessa, ma la correlazione tra danneggiamento e varianza rimane comunque evidente [Benasciutti 05-B].

Il metodo della massima varianza (MVM) è stato proposto per la stima del piano e direzione di massimo danneggiamento utilizzati nei criteri di piano critico [Tovo 05]; tuttavia è stato dimostrato [Papadopoulos 97-A] che per storie di carico multiassiali fortemente non-proporzionali o fuori fase i metodi di piano critico risultano poco precisi. Con lo scopo di proporre una procedura che sia allo stesso tempo efficiente dal punto di vista computazionale e capace di tener conto del grado di non-proporzionalità della storia di carico considerata l'applicazione del metodo MVM verrà estesa ai criteri multiassiali basati sugli invarianti del tensore deviatorico.

In analogia alla definizione di centroide di un continuo ed assumendo che il percorso di carico  $\Gamma$  descritto dal vettore  $\bar{s}(t)$  possa essere considerato un continuo, allora il centroide di  $\Gamma$  può essere ricavato dalla seguente relazione:

$$s_{m,i} = \frac{1}{T} \int_T s_i(t) dt \quad \text{con } i = 1, \dots, 5 \quad (3.13)$$

dove  $T$  rappresenta il periodo ed  $s_i(t)$  la componente  $i$ -esima del vettore  $\bar{s}(t)$ , mentre, sotto le stesse ipotesi, i momenti principali d'inerzia di  $\Gamma$  risultano:

$$C_{ij} = \int_T (s_i(t) - s_{m,i}) \cdot (s_j(t) - s_{m,j}) dt \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 5 \quad (3.14)$$

La matrice costruita con gli elementi  $C_{ij}$ , che indicheremo con  $\bar{\bar{C}}$ , ha cinque autovalori reali e cinque autovettori ortogonali. Gli autovalori sono i momenti principali d'inerzia calcolati rispetto agli assi principali, mentre gli autovettori rappresentano le direzioni principali del percorso di carico  $\Gamma$  rispetto al centroide stimato per mezzo delle (3.13). Inoltre è utile sottolineare che, in accordo con il teorema spettrale, gli autovettori definiscono una base, ossia un sistema di riferimento con origine nel centroide, in grado di descrivere completamente lo spazio deviatorico Euclideo a 5-dimensioni.

Confrontando le (3.14) con le (3.10) e (3.11) è immediato osservare l'uguaglianza tra i termini  $C_{ij}$  e gli elementi del tensore di covarianza di  $\bar{s}(t)$ . Infatti, per  $i = j$  la (3.14) coincide con la varianza di  $s_i(t)$  mentre, per  $i \neq j$ ,  $C_{ij}$  corrisponde alla covarianza tra  $s_i(t)$  ed  $s_j(t)$ . Tale osservazione rende evidente il fatto che gli assi principali di  $\Gamma$  coincidono con le direzioni principali della matrice di covarianza per lo stesso percorso di carico, di modo che, le direzioni principali d'inerzia corrispondono con le direzioni di massima varianza.

Tuttavia la valutazione del danneggiamento a fatica deve essere indipendente dall'orientazione del sistema di riferimento ( $Oxyz$ ) utilizzato per analizzare la storia di carico in termini di tensione nominale, perciò il sistema di massima varianza, definito nello spazio deviatorico Euclideo, deve essere invariante per coordinate di trasformazione del sistema ( $Oxyz$ ) adottato per rappresentare le tensioni nominali. La precedente condizione è soddisfatta dal fatto che lo spazio tensoriale deviatorico e lo spazio Euclideo associato a 5-dimensioni hanno la stessa metrica [Bishop 00] [Cristofori 07]. In precedenza è stato osservato che il danneggiamento a fatica è legato alla varianza del carico applicato [Benasciutti 05-A] [Benasciutti 05-B], di conseguenza è ragionevole adottare come sistema di riferimento per la stima della resistenza a fatica in presenza di storie di carico multiassiali complesse il sistema di massima varianza.

### 3.3.3 Definizione dell'ampiezza deviatorica equivalente $\sigma_{d,a}$

La procedura esposta nei paragrafi precedenti permette di proiettare  $\Gamma$  lungo le direzioni del sistema di riferimento dello spazio deviatorico e ricavare quindi le singole proiezioni  $\Gamma_{p,i}(t)$ . Dopo aver stimato il danneggiamento di ogni proiezione del percorso di carico, per il calcolo del danno totale è necessario adottare una legge di accumulo appropriata.

Con riferimento alla figura 3.1-a è immediato osservare che il danneggiamento  $D(\Gamma_a)$  prodotto dal percorso di carico  $\Gamma$  non può essere inferiore ai singoli danneggiamenti  $D(\Gamma_{a,p1})$ ,  $D(\Gamma_{a,p3})$ , valutati sulle proiezioni  $\Gamma_{p,1}$ ,  $\Gamma_{p,3}$ , dei percorsi di carico:

$$D(\Gamma_a) \geq D(\Gamma_{a,p1}) \cup D(\Gamma_a) \geq D(\Gamma_{a,p3}) \quad (3.15)$$

È necessario perciò definire una ampiezza equivalente con l'obiettivo di poter calcolare il danneggiamento di processi che si verificano allo stesso istante. Nella fattispecie è proposta una legge di accumulo del danno di tipo quadratica, nella quale il danneggiamento totale è calcolato come funzione dell'ampiezza delle singole proiezioni:

$$D(\Gamma_a) = D \left[ \left( \Gamma_{a,p1}^2 + \Gamma_{a,p3}^2 \right)^{1/2} \right] \quad (3.16)$$

Tale formulazione fu in origine proposta da Deperrois e Li-De Freitas [Deperrois 91] [Li 02] per previsioni della resistenza a fatica nella regione di vita infinita con lo scopo di considerare l'effetto dello sfasamento tra le componenti di tensione. L'espressione (3.16) ci permette di osservare che non sussiste una relazione lineare tra il danneggiamento totale ed i danneggiamenti valutati sulle singole proiezioni, in quanto, in tale formulazione gli eventi danneggianti, vengono considerati come effetti che si verificano allo stesso istante e non come una sequenza di eventi.



In particolare, assumendo come legge di accumulo la precedente relazione, l'ampiezza deviatorica equivalente  $\sigma_{d,a}$  è ottenibile mediante la seguente espressione:

$$\sigma_{d,a} = \sqrt{\sum_i (\sigma_{d,a})_i^2} \quad (3.17)$$

nella quale  $(\sigma_{d,a})_i$  è l'ampiezza tensionale risolta del percorso di carico proiettato lungo l'asse  $i$ -esimo del sistema di riferimento calcolato con il metodo della massima varianza. È fondamentale infine ricordare che per il calcolo dell'ampiezza delle singole proiezioni  $(\sigma_{d,a})_i$  è necessario in generale adottare un metodo di conteggio dei cicli.

### 3.3.4 Formulazione del criterio multiassiale

Il danneggiamento a fatica viene calcolato impiegando il criterio di Lazzarin-Susmel [Susmel 02] riformulato in termini di invarianti del tensore deviatorico. Il rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$  impiegato dagli autori per tener conto dello sfasamento tra le componenti della sollecitazione e dell'effetto della componente statica dello sforzo normale, viene riformulato per le condizioni di limite di fatica secondo la seguente relazione:

$$\rho_{FL} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sigma_{H,max}}{\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}} \quad (3.18)$$

Tale parametro assume valore nullo per sollecitazioni di torsione alterna, a cui corrisponde un limite di fatica, espresso in termini della componente deviatorica definita secondo la (3.17), pari a  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=0}$ , mentre assume valore unitario per sollecitazioni trazione a rapporto di carico  $R=-1$  a cui corrisponde un limite di fatica pari a  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=1}$ . Assumendo che il limite di fatica del materiale  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$  vari in modo lineare rispetto al rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$ , è possibile calibrare il criterio multiassiale utilizzando i

limiti di fatica a torsione alterna e trazione alterna ottenendo la seguente relazione:

$$\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}} = \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=0} + \rho_{FL} \cdot \left( \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=0} - \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=1} \right) \quad (3.19)$$

Pertanto, la verifica a fatica secondo il criterio proposto è ottenuta confrontando l'ampiezza equivalente della componente deviatorica,  $\sigma_{d,a}$ , con il limite di fatica del materiale,  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$ , per determinate condizioni di carico descritte da  $\rho_{FL}$ :

$$\sigma_{d,a} \leq \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}} \quad (3.20)$$

Dalla precedente relazione è possibile ottenere l'espressione del criterio di fatica multiassiale in condizioni di limite di fatica:

$$\sigma_{d,a} + \rho_{FL} \cdot \left( \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=0} - \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=1} \right) \leq \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=0} \quad (3.21)$$

La presente formulazione prevede la conoscenza dei soli limiti di fatica a torsione e trazione per la taratura del criterio. Tuttavia è opportuno osservare che l'accuratezza del metodo dipende dalla relazione impiegata per calcolare il valore del limite di fatica  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$  al variare delle condizioni di carico. È ragionevole ipotizzare che l'applicazione del modello risulterà più precisa all'aumentare dei limiti di fatica del materiale disponibili in più condizioni di carico per eseguire la calibrazione. In definitiva quindi, a seconda del materiale utilizzato, la dipendenza tra il limite di fatica del materiale  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$  ed il rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$  potrà essere di tipo lineare, del secondo ordine, esponenziale o più in generale una funzione analitica adatta ad approssimare i dati sperimentali sul limite di fatica del materiale.

# SINTESI DELL'ATTIVITÀ SPERIMENTALE CONDOTTA

## 4.1 Introduzione

Il lavoro riassume i risultati sperimentali di test a fatica effettuati presso il Trinity College – Department of Mechanical & Manufacturing Engineering in collaborazione con il gruppo di ricerca diretto dal prof. David Taylor.

L'obiettivo del lavoro consiste nell'indagare sul comportamento a fatica di provini che presentano concentratori di tensione tridimensionali a spigolo vivo. I metodi più comunemente adottati per il calcolo della resistenza a fatica forniscono previsioni troppo conservative quando impiegati ad intagli complessi di tipo 3D. Questo aspetto è stato analizzato recentemente da Taylor et al. dimostrando per via sperimentale come i metodi basati sul concetto di volume critico, impiegati la valutazione della resistenza a fatica ad alto numero di cicli, si dimostrano inaffidabili se applicati ad effetti d'intaglio tridimensionali per i quali il campo tensionale indotto risulta multiassiale, mentre il grado di precisione aumenta se gli intagli tridimensionali sono assimilabili a problemi piani [Bellett 05].

A tale scopo è stata condotta una campagna di prove su provini cilindrici in acciaio a basso tenore di carbonio con intagli complessi 3D, soggetti a carichi monoassiali, di torsione pura e combinati di trazione e torsione sia in fase che fuori fase.

Nel seguito verranno indicate con  $\sigma_a$  e  $\tau_a$  le ampiezze delle tensioni rispettivamente normali e tangenziali riferite alla sezione lorda del provino; nel caso dei test combinati indicheremo con  $\delta$  il rapporto di biassialità definito da  $\sigma_a/\tau_a$  e con  $\varphi$  l'angolo di sfasamento tra le componenti di carico.

Tutti i test sono stati condotti a rapporto di carico costante  $R=-1$ , mentre sono state sperimentate diverse condizioni di carico per quanto riguarda rapporto di biassialità e sfasamento. In sintesi, la sperimentazione ha previsto:

- una serie di provini sollecitati a sforzo assiale.
- una serie di provini sollecitati a torsione pura.
- due serie di test a fatica combinati con rapporto di biassialità  $\delta=1.73$  ed angoli di sfasamento  $\varphi=0^\circ$  e  $\varphi=90^\circ$ .
- due serie di test a fatica combinati con rapporto di biassialità  $\delta=1$  ed angoli di sfasamento  $\varphi=0^\circ$  e  $\varphi=90^\circ$ .

## 4.2 Analisi sperimentale del comportamento a fatica di provini caratterizzati da intagli complessi

### 4.2.1 Materiale impiegato e geometria dei provini

Il materiale impiegato per la realizzazione dei provini è un acciaio al carbonio denominato, secondo la British Standard nr.970(1955), En3b; nelle più recenti revisioni degli standard inglesi tale materiale viene indicato come 080A15. La seguente tabella riporta la composizione chimica del materiale:

<b>Materiale</b>	<b>C</b>	<b>Si</b>	<b>Mn</b>	<b>P</b>	<b>S</b>
En3b	0.25 max	0.35 max	1.00 max	0.06 max	0.06 max

*Tab. 4.1: Composizione del materiale*

Mediante alcune prove sperimentali sono state determinate la tensione di snervamento, la tensione di rottura, il modulo elastico longitudinale del materiale ed la tenacità a frattura per carichi affaticanti:

<b>Materiale</b>	$\sigma_{p,0.2}$ [MPa]	$\sigma_R$ [Mpa]	<b>E</b> [Mpa]	$\Delta K_{th}$ [Mpa·m <sup>0.5</sup> ]	<b>a<sub>0</sub></b> [mm]
En3b	653	676	208500	6.4	0.027

Tab. 4.2: Proprietà del materiale

Sono state inoltre condotte tre serie di prove sotto carichi affaticanti, a sforzo assiale e torsione pura, su provini lisci per stimare la resistenza a fatica del materiale base al variare delle condizioni di carico, con lo scopo di utilizzare tali risultati nella procedura di taratura del criterio multiassiale.

<b>EN3B</b>								
<b>Serie</b>	<b>Nr. provini</b>	<b>D<sub>n</sub></b> [mm]	<b>R</b>	<b>k</b>	$\sigma_{A,50\%}$ a $1 \cdot 10^6$ cicli [MPa]	$\sigma_{A,50\%}$ a $2 \cdot 10^6$ cicli [MPa]	$\tau_{A,50\%}$ a $1 \cdot 10^6$ cicli [MPa]	$\tau_{A,50\%}$ a $2 \cdot 10^6$ cicli [MPa]
Monoassiale	14	5	-1	19.7	345.9	334.0	-	-
Monoassiale	11	5	0	37.4	303.3	297.7	-	-
Torsione	9	5	-1	18.7	-	-	268.3	258.6

Tab. 4.3: Resistenza a fatica del materiale per diverse condizioni di carico

I provini sono stati ottenuti da barre di sezione circolare di diametro nominale pari ad 8mm e mediante lavorazione per asportazione di truciolo, sono stati realizzati effetti di intaglio tridimensionali.

Nelle figure seguenti vengono riportate le viste in pianta e assonometria della geometria oggetto dello studio.

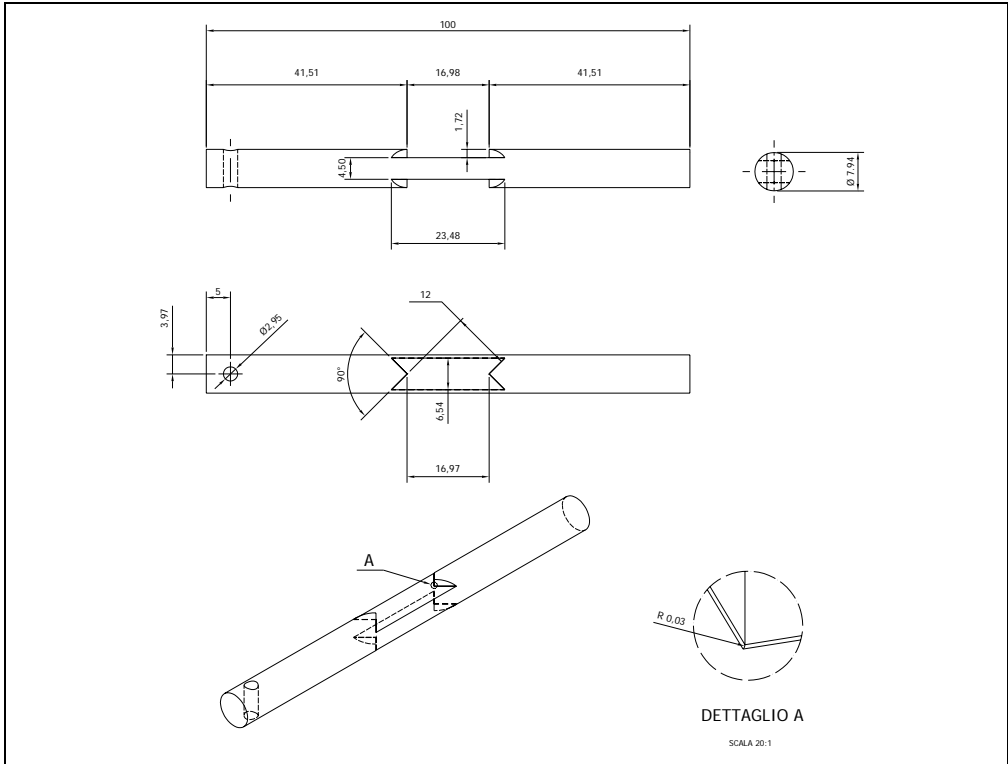


Fig. 4.1: Disegni costruttivi del provino

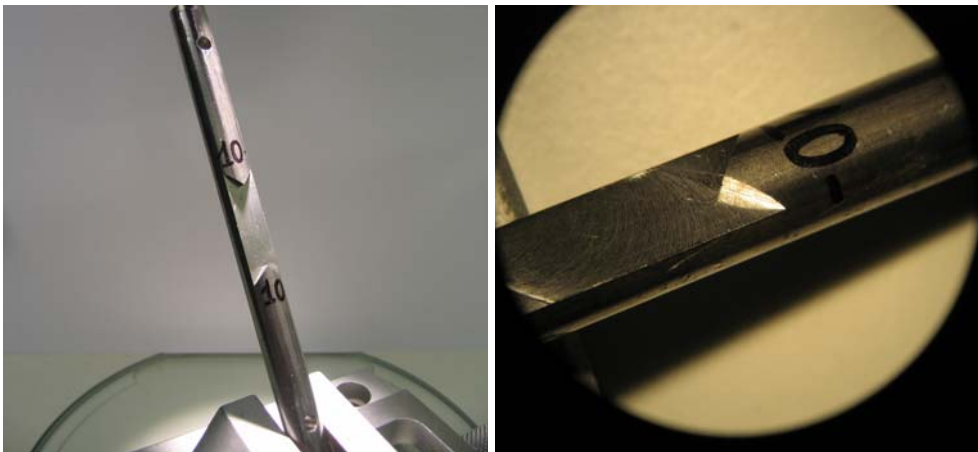


Fig. 4.2: Foto provino finito

Il provino presenta quattro spigoli vivi con una apertura di  $90^\circ$  ed un raccordo alla base degli intagli compreso tra 0.03 e 0.05mm; nel dettaglio A viene rappresentata la forma del raccordo in corrispondenza degli spigoli che caratterizzano la geometria.

Per la realizzazione dei provini è stato impiegato un centro di lavoro orizzontale CNC a tre assi controllati. Il posizionamento ed afferraggio in macchina dei provini ha richiesto l'esecuzione di una attrezzatura specifica. Il sistema consiste in un piatto portante con uno scarico centrale sul quale viene assemblato il provino per mezzo di due blocchetti di fissaggio. Il centraggio e posizionamento è garantito da un accoppiamento con interferenza tra un foro di precisione realizzato ad una delle estremità del provino ed un perno calibrato assemblato sul piatto portante. Nelle figure che seguono è riportato il sistema di afferraggio utilizzato.

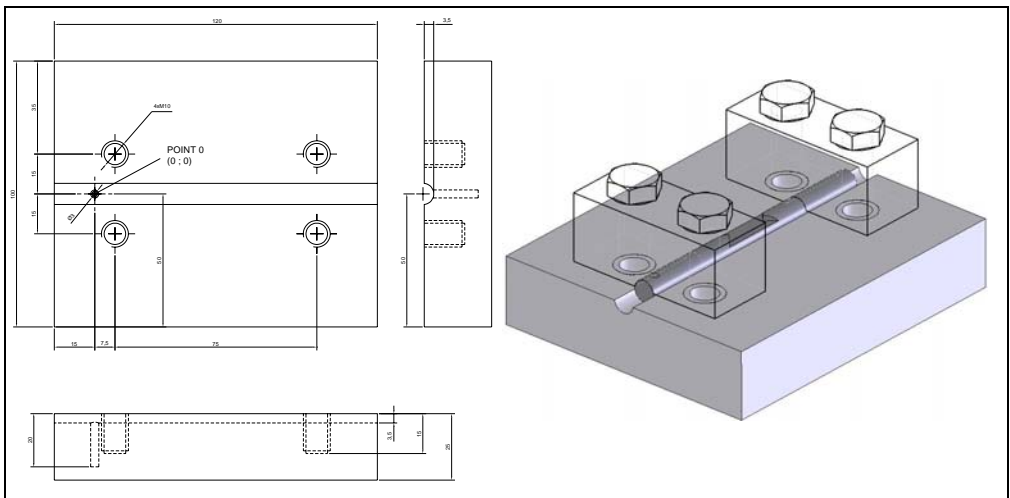


Fig. 4.3: Lay-out di afferraggio

Il sistema così costituito ha permesso di eseguire le operazioni di posizionamento del sistema di riferimento solamente all'inizio della serie completa evitando così errori di posizionamento dovuti all'operatore.

La zona scaricata è stata ottenuta impiegando una fresa cilindrica frontale a 4 taglienti ed un programma di taglio costituito da due passate incrociate di sgrossatura ed una di finitura per una altezza totale delle passate di 1.72mm

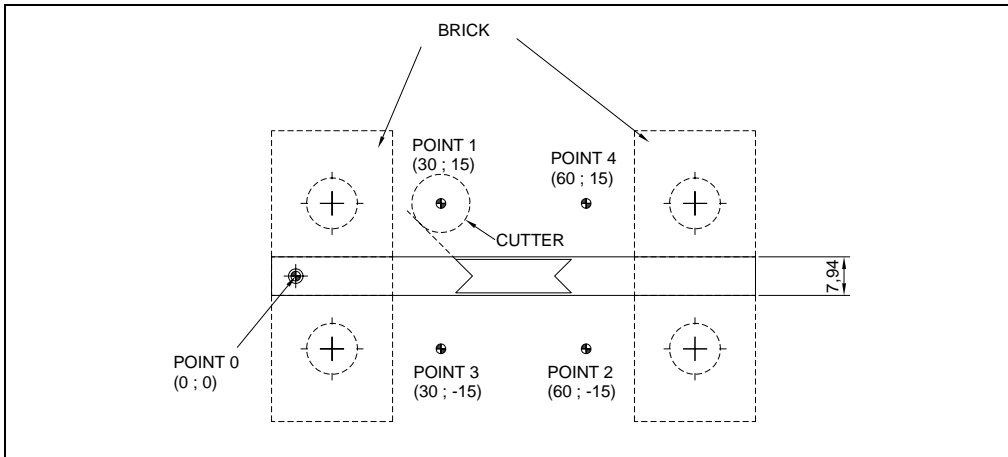


Fig. 4.4: Lavorazione provino

Tale procedimento ha permesso di raggiungere un elevato grado di precisione ed ottenere una geometria dei provini ripetibile per tutte le serie testate. A posteriori è stato misurato lo spessore della zona centrale scaricata ottenendo una ampiezza della zona di tolleranza di  $\pm 0.03\text{mm}$

#### 4.2.2 Procedura sperimentale

I test monoassiali sono stati effettuati con una macchina di prova servoidraulica Instron 8801 con fondo scala rispettivamente di corsa e carico  $\pm 75\text{mm}$  e  $\pm 100\text{kN}$ , mentre per i test a fatica multiassiale è stata impiegata una macchina biassiale servoidraulica Instron 8874 con fondo scala di  $\pm 50\text{mm}$  e  $\pm 10\text{kN}$  per l'attuatore assiale,  $\pm 130^\circ$  e  $\pm 100\text{Nm}$  per l'attuatore di torsione.

Tutti i test sono stati effettuati in controllo di carico e la frequenza utilizzata variava fra 8 e 16 Hz in funzione del livello di sollecitazione. Durante le prove a torsione pura e multiassiali è stata monitorata la rigidezza torsionale. Nel caso dei test a torsione pura la rottura per fatica era definita dalla perdita del 5% di rigidezza torsionale, mentre nel caso dei test combinati a trazione e torsione la rottura è definita dalla perdita del 10% di rigidezza torsionale. In entrambi i casi tale perdita di rigidezza corrisponde, per tutti i livelli di carico indagati, alla comparsa di cricche aventi una lunghezza compresa tra 1 e 5mm circa in funzione della direzione di propagazione delle cricche.



Il valore di run-out è stato fissato a  $3 \cdot 10^6$  cicli nel caso dei test monoassiali mentre, per tutte le altre condizioni di carico, a  $2 \cdot 10^6$  cicli.



*Fig. 4.5: Set-up di prova*

### 4.2.3 Analisi statistica dei risultati sperimentali

Nelle tabelle e grafici che seguono vengono riportate, per ogni serie di prove effettuata, le ampiezze di carico ed il numero di cicli eseguiti. Nel caso delle prove monoassiali il numero di cicli riportato è quello a rottura, mentre per le prove a torsione pura e multiassiali è indicato il numero di cicli eseguiti rispettivamente al 95% e 90% della rigidità torsionale. Per le serie a torsione pura e combinate, sono riportati inoltre i grafici della rigidità normalizzata che permettono di ricavare il numero di cicli a rottura per ogni livello di carico testato.

Provino	$\sigma_a$ [MPa]	Livello di carico assiale [N]	Cicli a rottura	Esito
1M	125.2	6200	366000	rotto
2M	125.2	6200	353900	rotto
3M	121.2	6000	437800	rotto
4M	121.2	6000	245550	rotto
5M	113.1	5600	432000	rotto
6M	113.1	5600	443540	rotto
7M	101.0	5000	590932	rotto
8M	179.7	8900	94113	rotto
9M	179.7	8900	86418	rotto
10M	240.3	11900	22337	rotto
11M	240.3	11900	25446	rotto
12M	179.7	8900	65147	rotto
13M	90.0	4456	960115	rotto
14M	80.0	3961	3000000	run out
15M	85.0	4208	3000000	run out

Tab. 4.4: Test monoassiali-Risultati sperimentali

Provino	$\tau_a$	Livello di carico torsionale	Cicli eseguiti al 95% di rigidezza torsionale	Esito
	[MPa]	[Nmm]		
1T	76.3	7500	2641000	run out
2T	78.3	7700	1078500	rotto
3T	78.3	7700	643200	rotto
4T	81.4	8000	501000	rotto
5T	81.4	8000	277000	rotto
6T	78.3	7700	454000	rotto
7T	89.5	8800	226590	rotto
8T	104.8	10300	110000	rotto
9T	130.0	12777	13470	rotto
10T	115.0	11303	55000	rotto
11T	75.0	7371	1027000	rotto
12T	130.0	12777	16700	rotto
13T	70.0	6880	1164000	rotto
14T	115.0	11303	57000	rotto
15T	104.8	10300	92000	rotto
16T	68.0	6683	2289439	run out

Tab. 4.5: Test a torsione pura-Risultati sperimentali

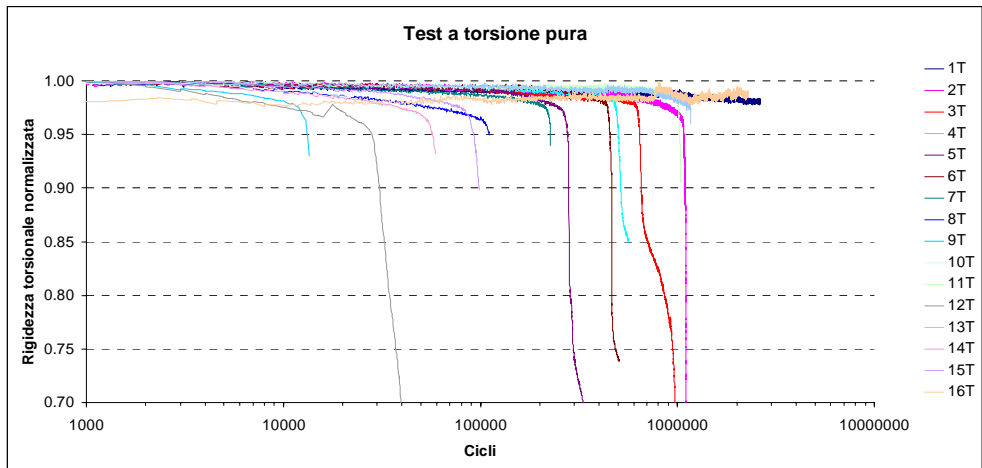


Fig. 4.6: Rigidezza normalizzata rilevata per i test a torsione pura

Provino	$\sigma_a$	$\tau_a$	Livello di carico assiale	Livello di carico torsionale	Cicli eseguiti al 90% di rigidità torsionale	Esito
	[MPa]	[MPa]	[N]	[Nmm]		
1B	98.50	56.87	4877	5589	257000	rotto
2B	98.50	56.87	4877	5589	334000	rotto
3B	78.50	45.32	3887	4455	2166000	rotto
4B	88.50	51.10	4382	5022	508000	rotto
5B	118.50	68.42	5867	6724	197000	rotto
6B	118.50	68.42	5867	6724	114000	rotto
7B	88.50	51.10	4382	5022	348000	rotto
8B	160.00	92.38	7922	9079	27520	rotto
11B	160.00	92.38	7922	9079	33000	rotto
14B	160.00	92.38	7922	9079	29787	rotto
15B	118.50	68.42	5867	6724	148000	rotto
16B	88.50	51.10	4382	5022	441000	rotto
17B	67.00	38.68	3317	3802	2640000	run out

Tab. 4.6: Test multiassiali con  $\delta=1.73$ ,  $\varphi=0^\circ$ -Risultati sperimentali

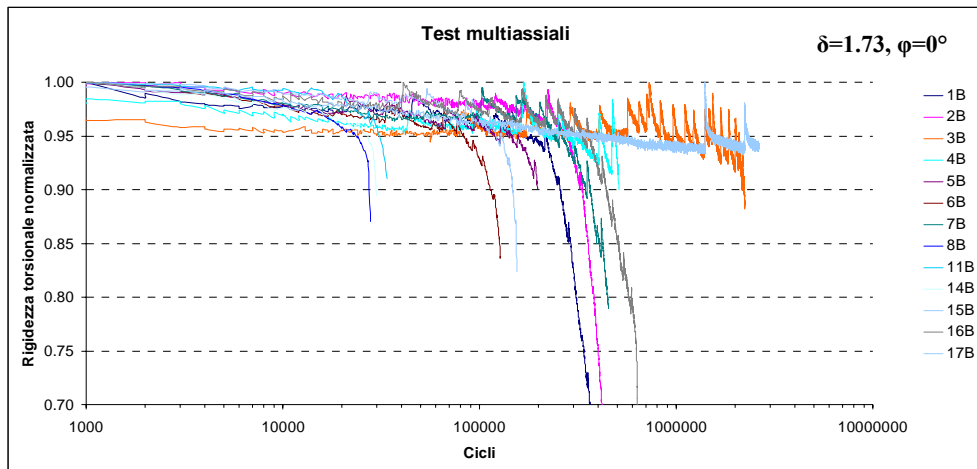


Fig. 4.7: Rigidità normalizzata rilevata per i test multiassiali con  $\delta=1.73$ ,  $\varphi=0^\circ$

Provino	$\sigma_a$	$\tau_a$	Livello di carico assiale	Livello di carico torsionale	Cicli eseguiti al 90% di rigidezza torsionale	Esito
	[MPa]	[MPa]	[N]	[Nmm]		
1OF	88.50	51.10	4382	5022	365000	rotto
2OF	160.00	92.38	7922	9079	37000	rotto
3OF	160.00	92.38	7922	9079	34000	rotto
15OF	160.00	92.38	7922	9079	40000	rotto
4OF	118.50	68.42	5867	6724	131000	rotto
5OF	118.50	68.42	5867	6724	126000	rotto
14OF	118.50	68.42	5867	6724	145000	rotto
6OF	88.50	51.10	4382	5022	582000	rotto
16OF	88.50	51.10	4382	5022	602000	rotto
17OF	78.50	45.32	3887	4455	1219000	rotto
11OF	67.00	38.68	3317	3802	2032000	run out

Tab. 4.7: Test multiassiali con  $\delta=1.73$ ,  $\varphi=90^\circ$ -Risultati sperimentali

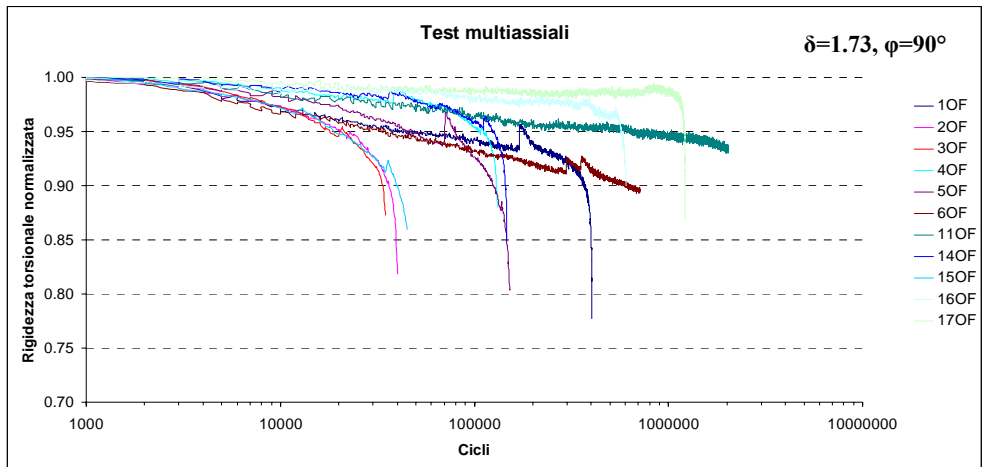


Fig. 4.8: Rigidità normalizzata rilevata per i test multiassiali con  $\delta=1.73$ ,  $\varphi=90^\circ$

Provino	$\sigma_a$	$\tau_a$	Livello di carico assiale	Livello di carico torsionale	Cicli eseguiti al 90% di rigidità torsionale	Esito
	[MPa]	[MPa]	[N]	[Nmm]		
21B	105.00	105.00	5199	10320	26000	rotto
22B	105.00	105.00	5199	10320	53000	rotto
23B	85.00	85.00	4209	8354	135000	rotto
19B	65.00	65.00	3218	6389	452000	rotto
20B	85.00	85.00	4209	8354	173000	rotto
13B	65.00	65.00	3218	6389	1027000	rotto
12B	65.00	65.00	3218	6389	430000	rotto
18B	53.00	53.00	2624	5209	2575000	run out

Tab. 4.8: Test multiassiali con  $\delta=1$ ,  $\varphi=0^\circ$ -Risultati sperimentali

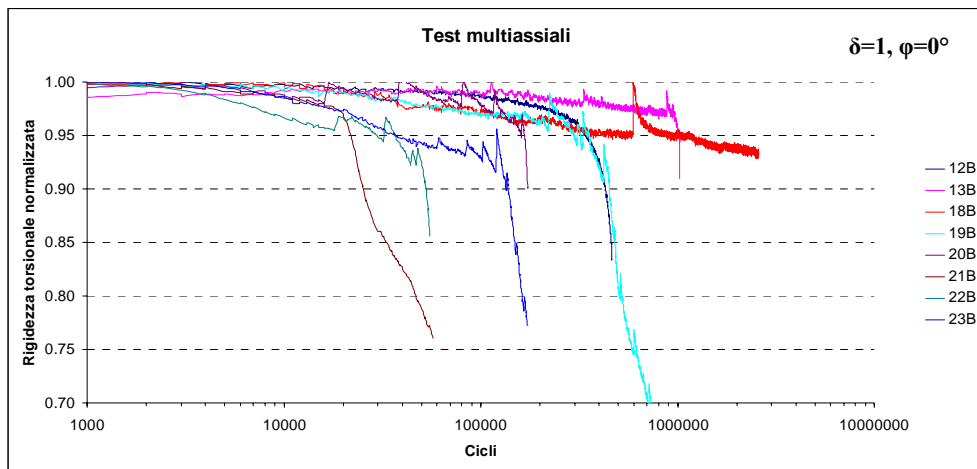


Fig. 4.9: Rigidità normalizzata rilevata per i test multiassiali con  $\delta=1$ ,  $\varphi=0^\circ$

Provino	$\sigma_a$	$\tau_a$	Livello di carico assiale	Livello di carico torsionale	Cicli eseguiti al 90% di rigidità torsionale	Esito
	[MPa]	[MPa]	[N]	[Nmm]		
7OF	85.00	85.00	4209	8354	163000	rotto
20OF	85.00	85.00	4209	8354	162000	rotto
8OF	105.00	105.00	5199	10320	43000	rotto
19OF	105.00	105.00	5199	10320	57000	rotto
9OF	65.00	65.00	3218	6389	691000	rotto
18OF	65.00	65.00	3218	6389	611000	rotto
21OF	53.00	53.00	2624	5209	2242000	run out

Tab. 4.9: Test multiassiali con  $\delta=1$ ,  $\varphi=90^\circ$ -Risultati sperimentali

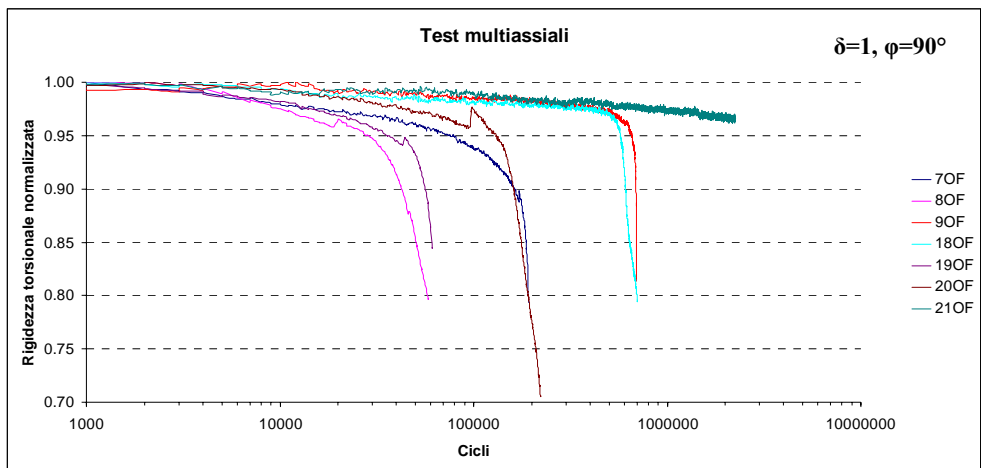


Fig. 4.10: Rigidità normalizzata rilevata per i test multiassiali con  $\delta=1$ ,  $\varphi=90^\circ$

Nel seguito sono riportati i risultati delle analisi statistiche eseguite sui dati ottenuti dalle prove sperimentali; nei grafici sono rappresentate la retta di regressione al 50% di probabilità di sopravvivenza, la banda di dispersione dei dati al 95%, la banda di confidenza al 95% sulla retta di regressione e le intercette a  $10^6$ ,  $2 \cdot 10^6$  e  $5 \cdot 10^6$  cicli. Le elaborazioni statistiche sono indicate in termini delle ampiezze delle tensioni normali  $\sigma_a$  e tangenziali  $\tau_a$  riferite alla sezione lorda del provino.

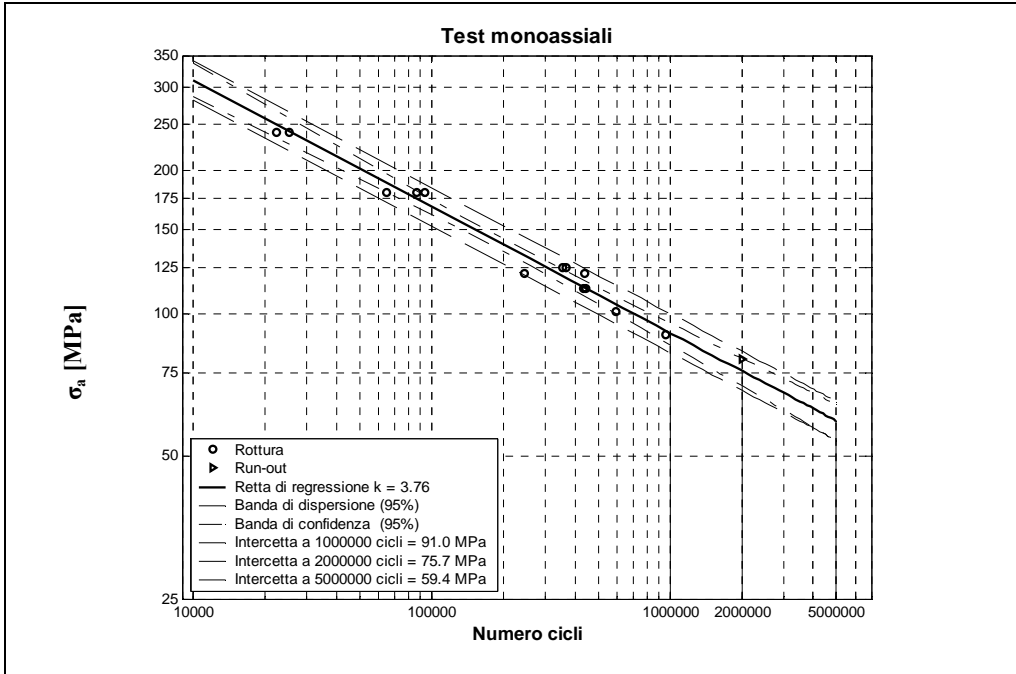


Fig. 4.11: Analisi statistica sui risultati dei test monoassiali

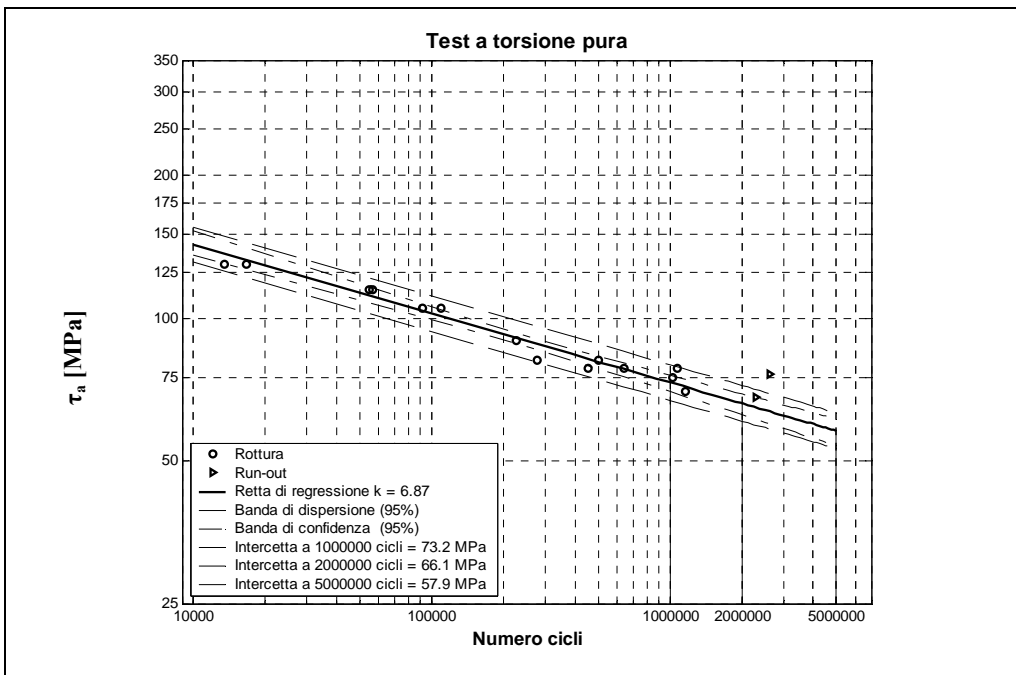


Fig. 4.12: Analisi statistica sui risultati dei test a torsione pura



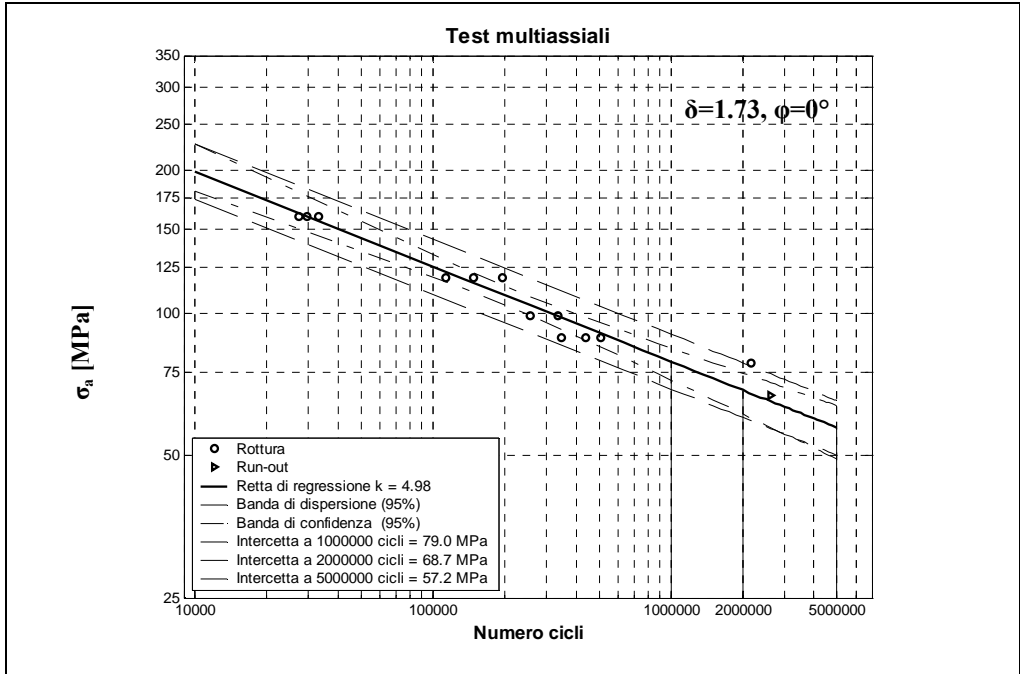


Fig. 4.13: Analisi statistica sui risultati dei test multiassiali con  $\delta=1.73, \phi=0^\circ$

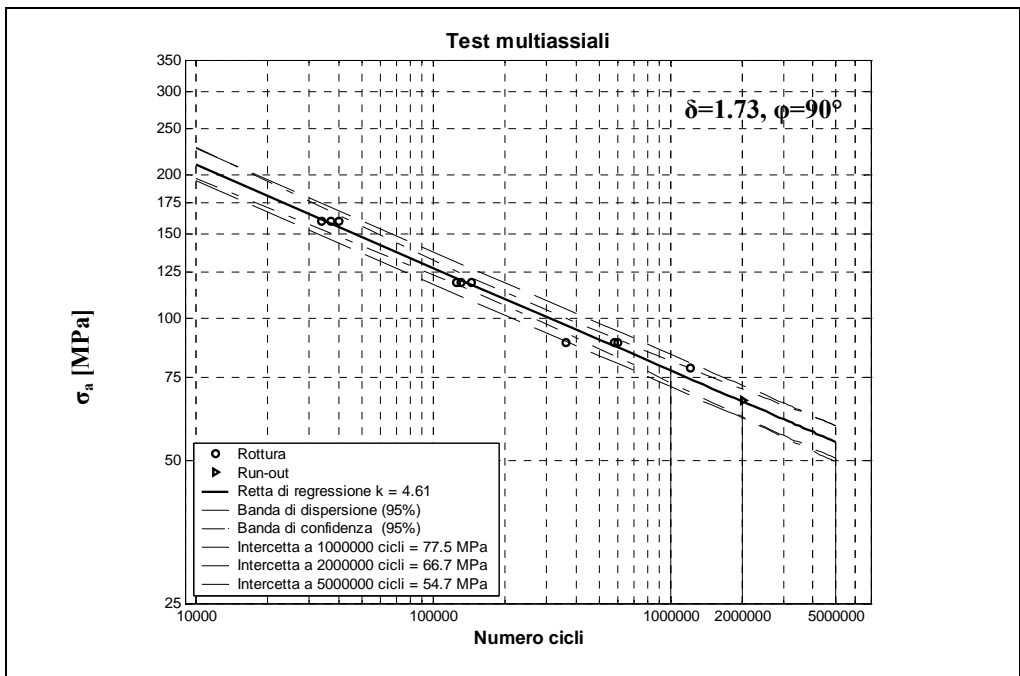


Fig. 4.14: Analisi statistica sui risultati dei test multiassiali con  $\delta=1.73, \phi=90^\circ$

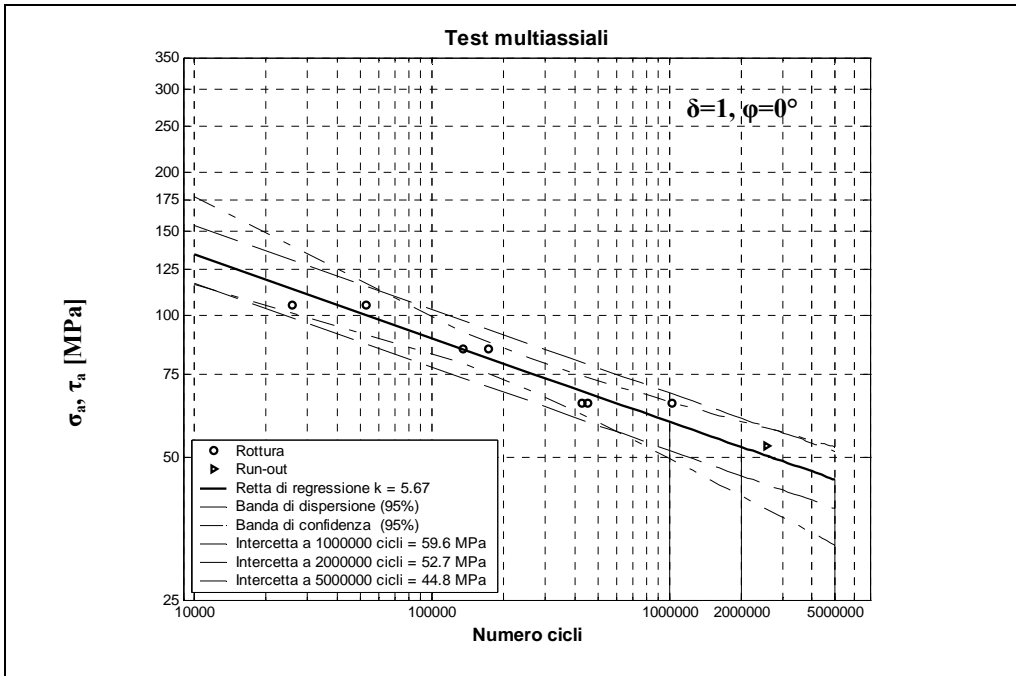


Fig. 4.15: Analisi statistica sui risultati dei  $i$  test multiassiali con  $\delta=1, \varphi=0^\circ$

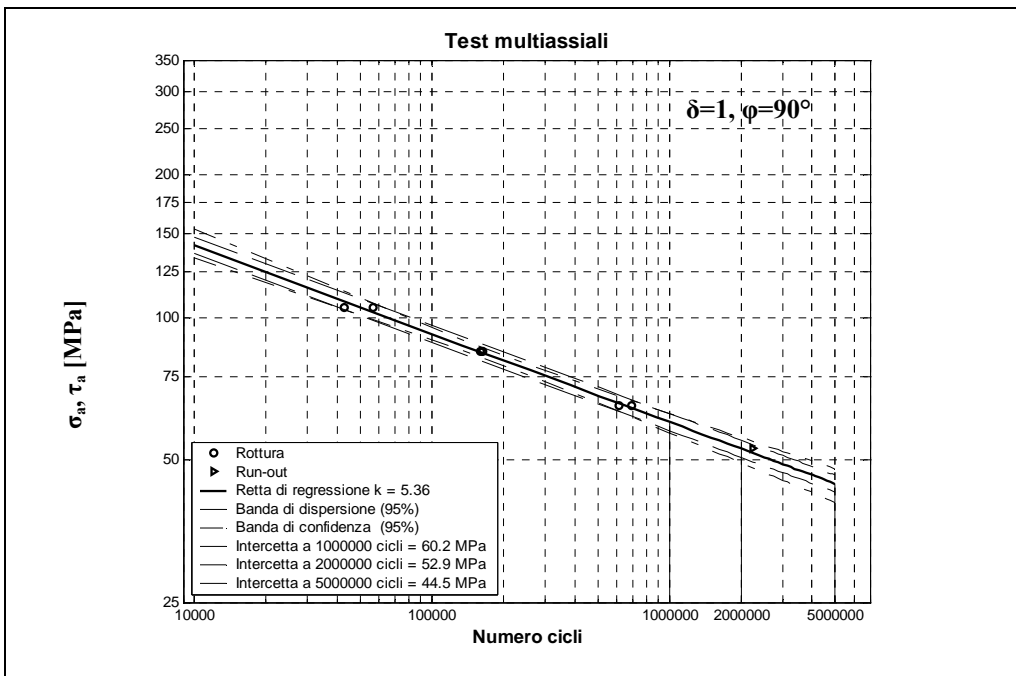


Fig. 4.16: Analisi statistica sui risultati dei  $i$  test multiassiali con  $\delta=1, \varphi=90^\circ$

Serie	Nr. provini	R	$\delta$	$\varphi$	k	$\sigma_{A,50\%}$ a $1 \cdot 10^6$ cicli [MPa]	$\sigma_{A,50\%}$ a $2 \cdot 10^6$ cicli [MPa]	$\sigma_{A,50\%}$ a $5 \cdot 10^6$ cicli [MPa]
Monoassiale	15	-1	-	-	3.76	91.0	75.7	59.4
Torsione	16	-1	-	-	6.87	73.2	66.1	57.9
Multiassiale	13	-1	1.73	0°	4.98	79.0	68.7	57.2
Multiassiale	11	-1	1.73	90°	4.61	77.5	66.7	54.7
Multiassiale	8	-1	1	0°	5.67	59.6	52.7	44.8
Multiassiale	7	-1	1	90°	5.36	60.2	52.9	44.5

Tab. 4.10: Sintesi dei risultati sperimentali

I risultati ottenuti nel caso dei test combinati mettono in risalto una scarsa sensibilità del materiale all'angolo di fase sia ad alto che basso numero di cicli. Per meglio evidenziare questo aspetto, sono state riportate in uno stesso grafico le rette di regressione delle serie multiassiali aventi lo stesso rapporto di biassialità e per entrambi gli angoli di fase adottati.

L'influenza delle sollecitazioni fuori fase è stata presa in esame da Kueppers e Sonsino [Kueppers 06], i quali hanno messo in luce come la presenza dello sfasamento abbia effetti diversi a seconda che il materiale sia duttile, semi-duttile o fragile.

In particolare, nel caso di materiali duttili è stato osservato come l'angolo di sfasamento tra le componenti di sollecitazione comporta una riduzione della vita a fatica, ipotizzando inoltre che il meccanismo di danneggiamento sia dipendente dalla sola tensione tangenziale di piano critico. Al contrario, per materiali semi-duttili, lo sfasamento è influente sulla resistenza a fatica del materiale ed il meccanismo di danneggiamento è dato dalla combinazione della tensione normale e tangenziale di piano critico.

Nei grafici di fig. 4.19 e 4.20 sono riassunte le analisi statistiche eseguite condensando i risultati dei test a parità di rapporto di biassialità a prescindere dall'angolo di sfasamento.

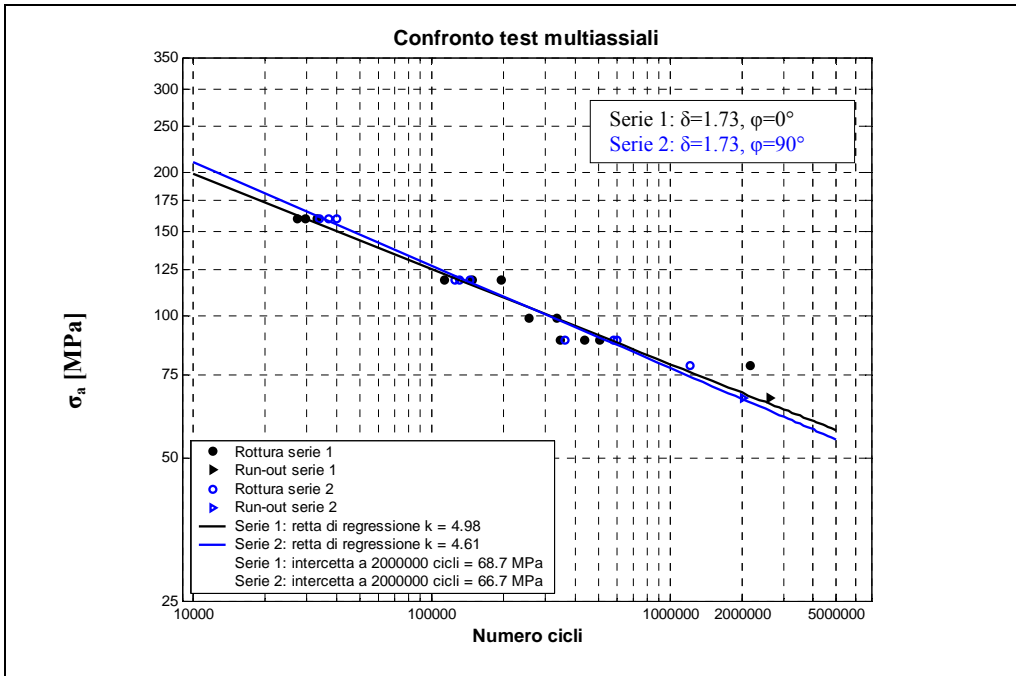


Fig. 4.17: Confronto dei parametri statistici sui risultati dei test multiassiali con  $\delta=1.73$

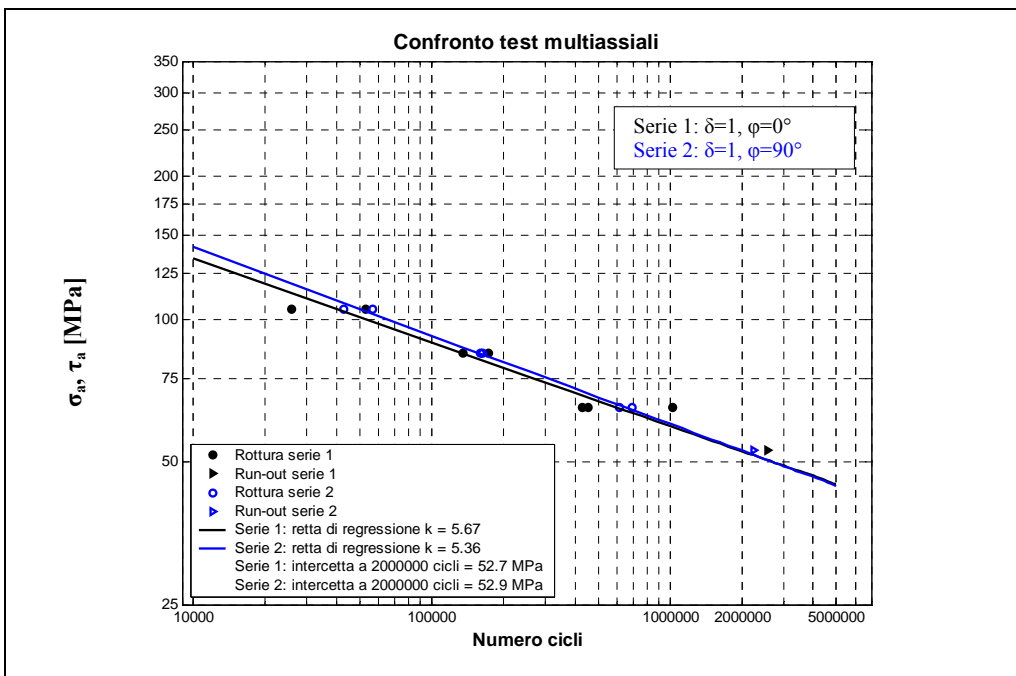


Fig. 4.18: Confronto dei parametri statistici sui risultati dei test multiassiali con  $\delta=1$

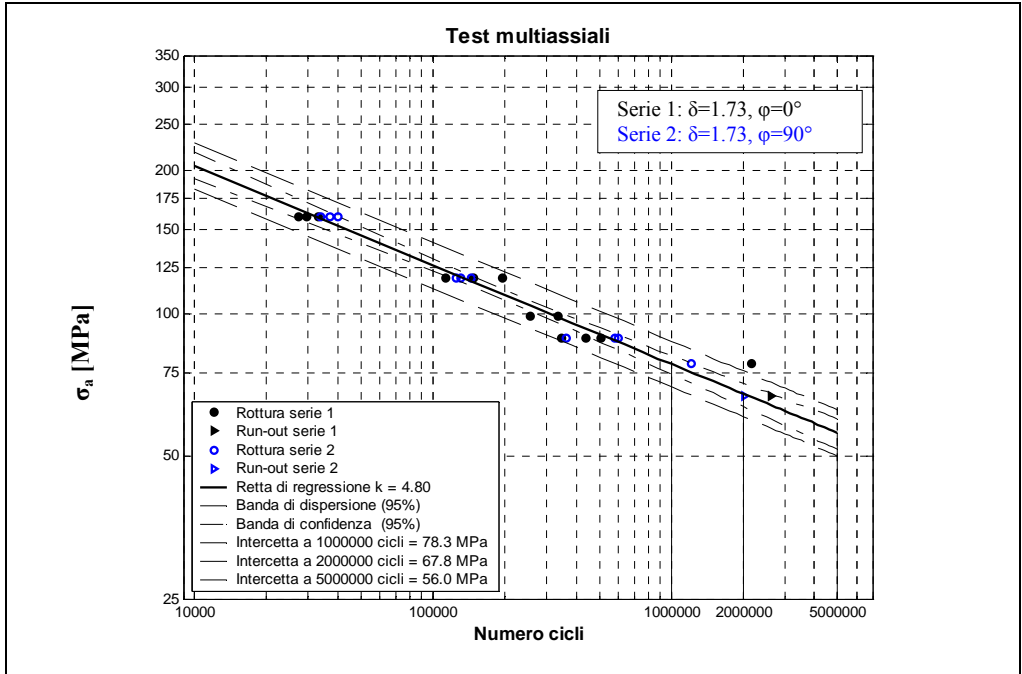


Fig. 4.19: Sintesi dei risultati sperimentali per i test multiassiali con  $\delta=1.73$

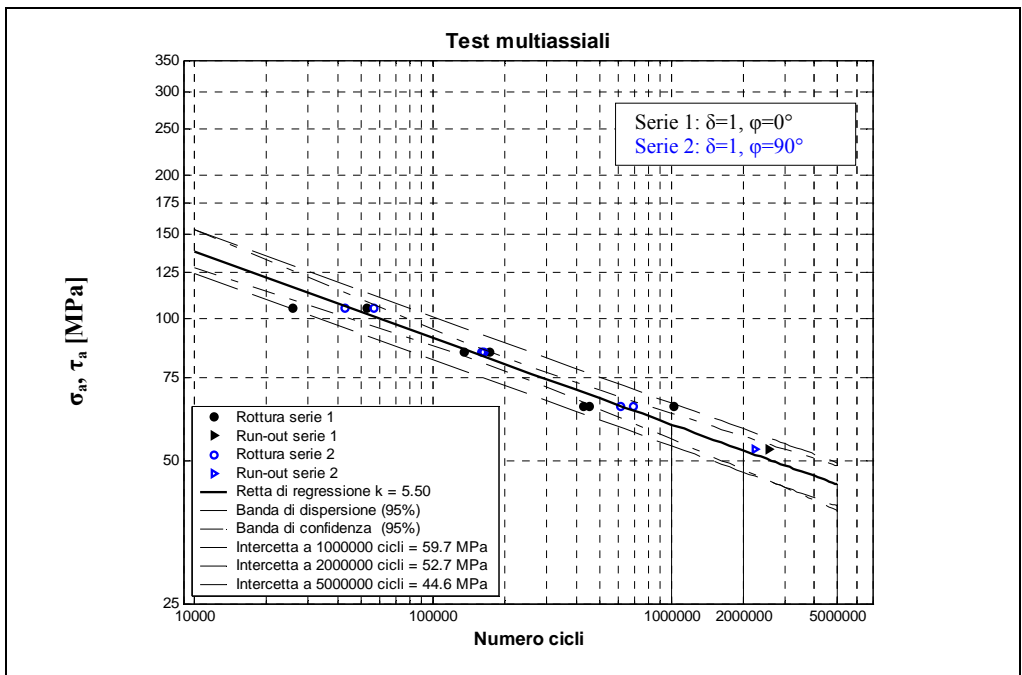


Fig. 4.20: Sintesi dei risultati sperimentali per i test multiassiali con  $\delta=1$

#### 4.2.4 Modalità di cedimento osservate

I provini testati a torsione e carichi combinati sono caratterizzati da modalità di innesco e propagazione delle cricche analoghe. In queste serie di prove si è preferito non portare a rottura completa i provini in quanto le superfici di frattura nella zona di innesco, risultano danneggiate per effetto del fenomeno di “crack surface interference” (CSI) e perciò non è possibile trarre considerazioni esatte dal solo esame delle superfici. In tal modo tuttavia è stato possibile monitorare i path superficiali lungo i quali si sviluppano preferibilmente le cricche. Nelle foto che seguono sono riportati i casi più frequentemente osservati di tipologia di cedimento per i test a torsione pura.

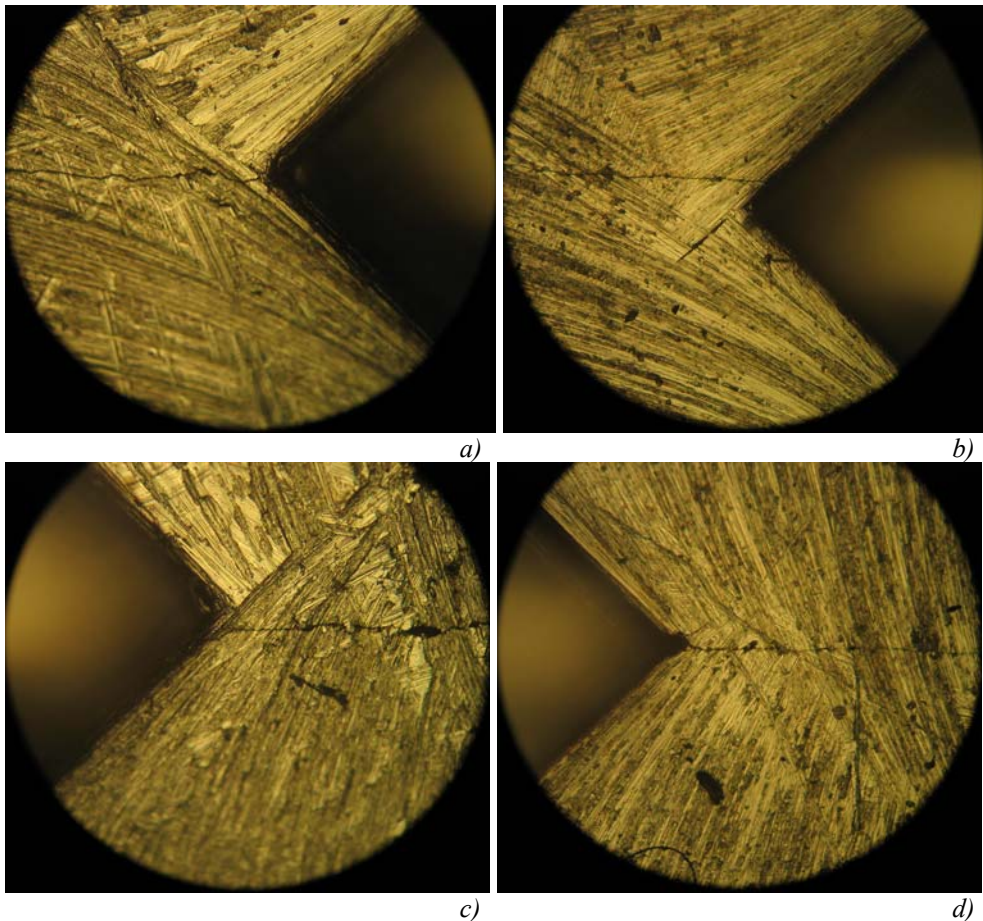
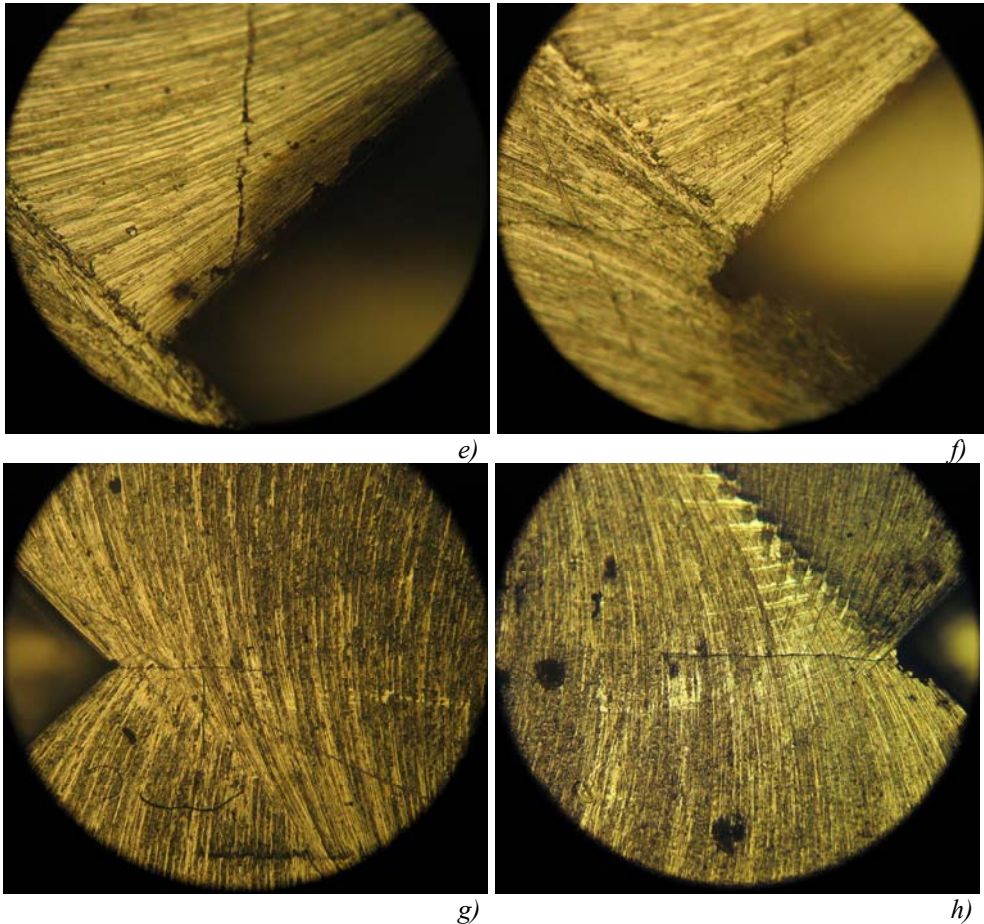


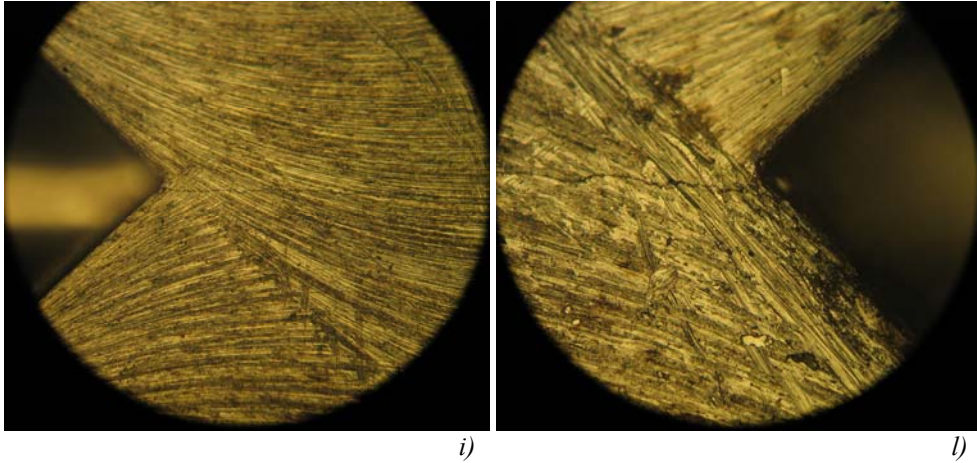
Fig. 4.21: Inneschi di rottura riscontrati nei test a torsione pura

Le immagini di figura 4.21, che riassumono il comportamento osservato nella fase di inizio propagazione, mostrano, indipendentemente dalla ampiezza di carico applicata, che l'innesco ha interessato una ristretta zona attorno allo spigolo dell'intaglio. Dalle immagini si può osservare il comportamento a propagazione delle cricche che si sviluppano preferenzialmente lungo l'asse del provino. Gli inneschi riscontrati nei test multiassiali sono riassunti nelle immagini di figura 4.22 dalle quali si possono distinguere due differenti tipologie di propagazione delle fessure.



*Fig. 4.22: Inneschi di rottura riscontrati nei test multiassiali*

Nel primo caso infatti le cricche propagano oltre che lungo la direzione longitudinale anche in direzione ortogonale all'asse del provino. Tale evidenza si è osservata in particolar modo nelle serie multiassiali caratterizzate dal rapporto di biassialità  $\delta$  più elevato pari a  $\sqrt{3}$ , mentre nelle serie a rapporto  $\delta$  pari ad 1 la tipologia di innesco e propagazione è rappresentata nelle foto g), e) di fig. 4.22.



*Fig. 4.23: Inneschi di rottura riscontrati nei test multiassiali*



# PROCEDURA DI CALCOLO

## 5.1 Introduzione

L'applicazione del modello non locale a gradiente implicito esteso al criterio multiassiale *PbP* basato sugli invarianti tensionali, riserva un notevole interesse applicativo in quanto permette di analizzare il comportamento a fatica di componenti meccanici che presentano singolarità tensionali di tipo geometrico e condizioni di carico multiassiali, caratterizzate dalla presenza di sfasamenti tra le componenti di tensione.

In tale contesto, considerando la diffusione assunta nel settore industriale delle tecniche di calcolo FEM, per lo sviluppo congiunto e la diffusione dei due modelli esposti, risulta di fondamentale importanza la definizione di una procedura di calcolo affidabile e computazionalmente efficiente. A tal scopo, l'obiettivo del successivo lavoro, consiste nel fornire al progettista uno strumento di calcolo, applicabile per problemi di resistenza a fatica, basato sull'utilizzo di analisi ad elementi finiti ed equazioni analitiche delle grandezze deviatoriche utilizzate per il modello non locale e nel criterio multiassiale.

La procedura che verrà esposta nel seguito è applicabile a geometrie 2D o 3D, indipendentemente dalla loro complessità, sia in presenza di intagli acuti che raccordati; nel caso più generale possono essere considerati stati tensionali indotti da due componenti di carico variabili nel tempo con andamenti sinusoidali, sincrone, a rapporto di sollecitazione  $R=-1$ , considerando inoltre l'effetto dovuto all'eventuale presenza di sfasamento tra le componenti di carico stesse.

Tuttavia, per semplificare la trattazione, è opportuno innanzitutto evidenziare i passi in cui si articola il metodo di calcolo che possono essere riassunti come segue:

- 1) Calcolo della soluzione lineare elastica nell'intero dominio per ogni tipologia di carico esterno applicato al componente.
- 2) Applicazione del principio di sovrapposizione lineare degli effetti per il calcolo dello stato tensionale totale.
- 3) Stima del sistema locale di massima varianza in ogni punto nodale della mesh utilizzata per discretizzare il dominio.
- 4) Calcolo dell'ampiezza deviatorica equivalente  $\sigma_{d,a}$  e della tensione idrostatica massima  $\sigma_{H,max}$  per ogni nodo di mesh.
- 5) Applicazione del modello a gradiente implicito per il calcolo dei valori non locali  $\tilde{\sigma}_{d,a}$  e  $\tilde{\sigma}_{H,max}$  secondo le (2.28)-(2.29):

$$\tilde{\sigma}_{d,a} \cong \sigma_{d,a} + c^2 \nabla^2 \tilde{\sigma}_{d,a} \quad \text{con} \quad \nabla(\tilde{\sigma}_{d,a}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.1)$$

$$\tilde{\sigma}_{H,max} \cong \sigma_{H,max} + c^2 \nabla^2 \tilde{\sigma}_{H,max} \quad \text{con} \quad \nabla(\tilde{\sigma}_{H,max}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.2)$$

- 6) Valutazione, per mezzo dei valori non locali, del rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$  definito con la (3.18):

$$\rho_{FL} = \sqrt{3} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{H,max}}{\tilde{\sigma}_{d,a}} \quad (5.3)$$

- 7) Stima del limite di fatica del materiale  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$  per ogni punto nodale.

- 8) Calcolo della resistenza a fatica in tutti i punti del dominio secondo l'espressione (3.20) applicata ai valori non locali:

$$\tilde{\sigma}_{d,a} \leq \sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}} \quad (5.4)$$

Un esempio applicativo e successiva validazione verrà eseguita sulla geometria ampiamente discussa nel capitolo 4, per la quale sono disponibili sia i dati a fatica sul materiale base che i risultati sperimentali per le prove monoassiali e biassiali nelle varie condizioni di carico.

Nel seguito verranno identificate rispettivamente con “ $f$ ” e “ $m$ ” le grandezze tensionali correlate alla prima ed alla seconda condizione di carico che, nel caso preso in esame, corrispondono ad una forza assiale ed un momento torcente (figura 5.1).

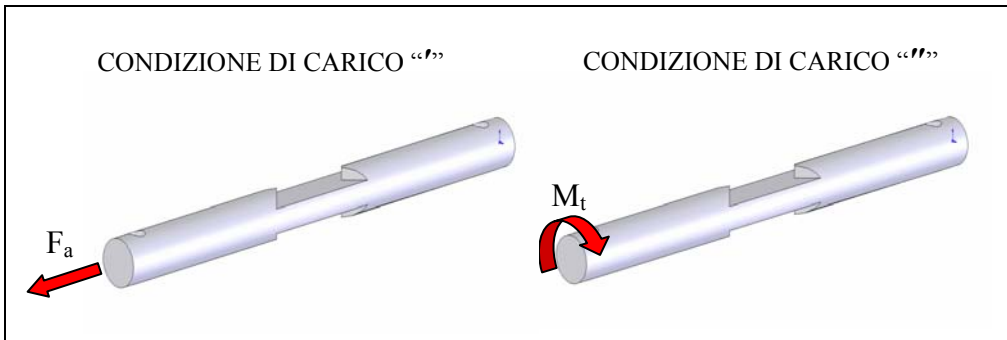


Fig. 5.1: Condizioni di carico sperimentali

Di tale geometria consideriamo la generica discretizzazione del dominio costituita da  $n$  nodi dove con l'indice  $k$  indicheremo il generico nodo.

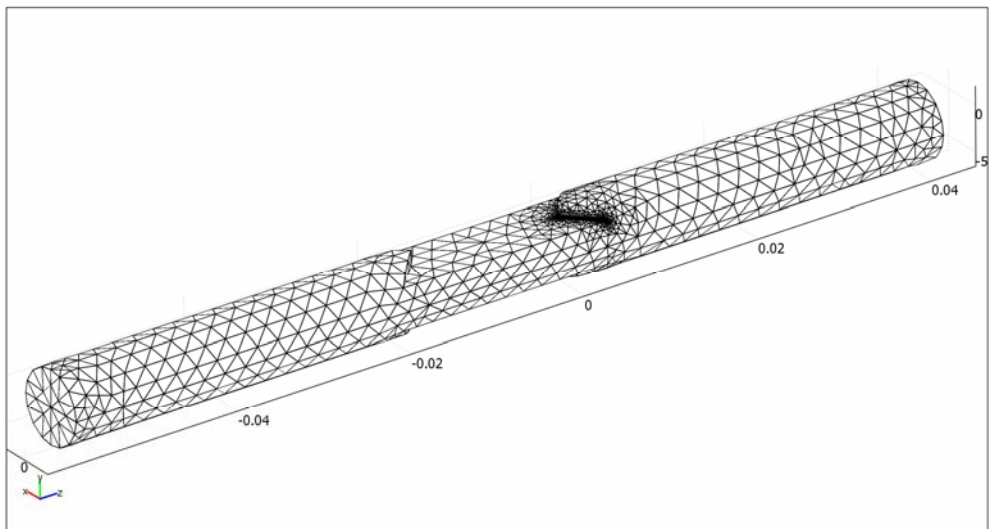


Fig. 5.2: Discretizzazione del dominio

## 5.2 Definizione delle grandezze di calcolo

Consideriamo un punto nodale “ $k$ ” di coordinate note appartenente al dominio di analisi; per ogni condizione di carico è possibile ottenere, mediante una analisi lineare elastica, il tensore degli sforzi valutato per il  $k$ -esimo nodo:

$$\overline{\overline{\sigma'}}(t, k) = \begin{bmatrix} \sigma'_x(t, k) & \tau'_{xy}(t, k) & \tau'_{xz}(t, k) \\ \tau'_{xy}(t, k) & \sigma'_y(t, k) & \tau'_{yz}(t, k) \\ \tau'_{xz}(t, k) & \tau'_{yz}(t, k) & \sigma'_z(t, k) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\overline{\overline{\sigma''}}(t, k) = \begin{bmatrix} \sigma''_x(t, k) & \tau''_{xy}(t, k) & \tau''_{xz}(t, k) \\ \tau''_{xy}(t, k) & \sigma''_y(t, k) & \tau''_{yz}(t, k) \\ \tau''_{xz}(t, k) & \tau''_{yz}(t, k) & \sigma''_z(t, k) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Considerando il comportamento lineare elastico del materiale ed omettendo la dipendenza da  $k$ , gli elementi dei tensori  $\overline{\overline{\sigma'}}(t, k)$  e  $\overline{\overline{\sigma''}}(t, k)$  possono essere scritti in forma compatta considerando le componenti medie e le ampiezze di tensione:

$$\sigma'_{ij}(t) = \sigma'_{ij,m} + \sigma'_{ij,a} \sin(\omega t) \quad \text{con} \quad i, j = x, y, z \quad (5.7)$$

$$\sigma''_{ij}(t) = \sigma''_{ij,m} + \sigma''_{ij,a} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{con} \quad i, j = x, y, z \quad (5.8)$$

dove i pedici  $m$  ed  $a$  indicano la componente media e l'ampiezza tensionale dell'elemento  $ij$  mentre  $\varphi$  rappresenta lo sfasamento tra le componenti di carico  $F_a$  ed  $M_t$ . Dalle (5.7) e (5.8) è possibile infine ricavare le componenti di tensione totale:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma'_{ij}(t) + \sigma''_{ij}(t) = \sigma'_{ij,m} + \sigma'_{ij,a} \sin(\omega t) + \sigma''_{ij,m} + \sigma''_{ij,a} \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.9)$$

Utilizzando la notazione vettoriale per esprimere la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, per ogni condizione di carico possiamo scrivere il corrispondenti vettori  $\overline{s'}(t)$  ed  $\overline{s''}(t)$  nello spazio deviatorico Euclideo a 5 dimensioni:

$$\bar{s}'(t) = [s'_1(t) \mid s'_2(t) \mid s'_3(t) \mid s'_4(t) \mid s'_5(t)] \quad (5.10)$$

$$\bar{s}''(t) = [s''_1(t) \mid s''_2(t) \mid s''_3(t) \mid s''_4(t) \mid s''_5(t)] \quad (5.11)$$

mentre il vettore totale  $\bar{s}(t)$  che rappresenta il tensore deviatorico totale è dato dalla somma vettoriale di  $\bar{s}'(t)$  ed  $\bar{s}''(t)$  :

$$\bar{s}(t) = \bar{s}'(t) + \bar{s}''(t) = [s_1(t) \mid s_2(t) \mid s_3(t) \mid s_4(t) \mid s_5(t)] \quad (5.12)$$

Inoltre è conveniente rappresentare i vettori  $\bar{s}'(t)$ ,  $\bar{s}''(t)$  ed  $\bar{s}(t)$  per mezzo delle componenti medie  $\bar{s}'_m$ ,  $\bar{s}''_m$  e delle ampiezze  $\bar{s}'_a$ ,  $\bar{s}''_a$  :

$$\bar{s}'(t) = \bar{s}'_m + \bar{s}'_a \cdot \sin(\omega t) \quad (5.13)$$

$$\bar{s}''(t) = \bar{s}''_m + \bar{s}''_a \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.14)$$

$$\bar{s}(t) = \bar{s}'(t) + \bar{s}''(t) = \bar{s}'_m + \bar{s}'_a \cdot \sin(\omega t) + \bar{s}''_m + \bar{s}''_a \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.15)$$

per le quali, utilizzando le (3.6), (5.7) e (5.8),  $\bar{s}'_m$ ,  $\bar{s}'_a$ ,  $\bar{s}''_m$  e  $\bar{s}''_a$  risultano rispettivamente:

$$\bar{s}'_m = \left[ \frac{2\sigma'_{x,m} - \sigma'_{y,m} - \sigma'_{z,m}}{2\sqrt{3}} \mid \frac{\sigma'_{y,m} - \sigma'_{z,m}}{2} \mid \tau'_{xy,m} \mid \tau'_{xz,m} \mid \tau'_{yz,m} \right] \quad (5.16)$$

$$\bar{s}'_a = \left[ \frac{2\sigma'_{x,a} - \sigma'_{y,a} - \sigma'_{z,a}}{2\sqrt{3}} \mid \frac{\sigma'_{y,a} - \sigma'_{z,a}}{2} \mid \tau'_{xy,a} \mid \tau'_{xz,a} \mid \tau'_{yz,a} \right] \quad (5.17)$$

$$\bar{s}''_m = \left[ \frac{2\sigma''_{x,m} - \sigma''_{y,m} - \sigma''_{z,m}}{2\sqrt{3}} \mid \frac{\sigma''_{y,m} - \sigma''_{z,m}}{2} \mid \tau''_{xy,m} \mid \tau''_{xz,m} \mid \tau''_{yz,m} \right] \quad (5.18)$$

$$\bar{s}''_a = \left[ \frac{2\sigma''_{x,a} - \sigma''_{y,a} - \sigma''_{z,a}}{2\sqrt{3}} \mid \frac{\sigma''_{y,a} - \sigma''_{z,a}}{2} \mid \tau''_{xy,a} \mid \tau''_{xz,a} \mid \tau''_{yz,a} \right] \quad (5.19)$$

Ricordando l'espressione (3.6) le componenti  $s_i(t)$  del vettore totale  $\bar{s}(t)$  risultano:

$$s_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (2\sigma_x(t) - \sigma_y(t) - \sigma_z(t)) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 2(\sigma'_{x,m} + \sigma'_{x,a} \sin(\omega t) + \sigma''_{x,m} + \sigma''_{x,a} \sin(\omega t - \varphi)) - \sigma'_{y,m} - \sigma'_{y,a} \sin(\omega t) - \sigma''_{y,m} - \sigma''_{y,a} \sin(\omega t - \varphi) - \sigma'_{z,m} - \sigma'_{z,a} \sin(\omega t) - \sigma''_{z,m} - \sigma''_{z,a} \sin(\omega t - \varphi) \right) \quad (5.20)$$

$$s_2(t) = \frac{1}{2} (\sigma_y(t) - \sigma_z(t)) = \frac{1}{2} \left( \sigma'_{y,m} + \sigma'_{y,a} \sin(\omega t) + \sigma''_{y,m} + \sigma''_{y,a} \sin(\omega t - \varphi) - \sigma'_{z,m} - \sigma'_{z,a} \sin(\omega t) - \sigma''_{z,m} - \sigma''_{z,a} \sin(\omega t - \varphi) \right) \quad (5.21)$$

$$s_3(t) = \tau_{xy}(t) = (\tau'_{xy,m} + \tau'_{xy,a} \sin(\omega t) + \tau''_{xy,m} + \tau''_{xy,a} \sin(\omega t - \varphi)) \quad (5.22)$$

$$s_4(t) = \tau_{xz}(t) = (\tau'_{xz,m} + \tau'_{xz,a} \sin(\omega t) + \tau''_{xz,m} + \tau''_{xz,a} \sin(\omega t - \varphi)) \quad (5.23)$$

$$s_5(t) = \tau_{yz}(t) = (\tau'_{yz,m} + \tau'_{yz,a} \sin(\omega t) + \tau''_{yz,m} + \tau''_{yz,a} \sin(\omega t - \varphi)) \quad (5.24)$$

Le grandezze tensionali e vettoriali precedentemente introdotte, verranno utilizzate nel seguito per ricavare la matrice di covarianza di  $\bar{s}(t)$  e le equazioni analitiche che permettono il calcolo della  $\sigma_{d,a}$  e di  $\sigma_{H,max}$  in ogni punto nodale. Le soluzioni ottenute saranno espresse in termini delle ampiezze delle componenti dei tensori di Cauchy (5.5) e (5.6).

### 5.3 Sviluppo delle equazioni fondamentali

#### 5.3.1 Stima del sistema di riferimento di massima varianza

Nel capitolo 3 è stato dimostrato come il metodo della massima varianza sia utilizzabile per la stima del sistema di riferimento nello spazio deviatorico per il calcolo del danneggiamento a fatica multiassiale. In particolare, gli autovettori della matrice di covarianza  $\bar{\bar{C}}$  del vettore  $\bar{s}(t)$  rappresentano le direzioni di massima varianza di  $\bar{s}(t)$  e quindi le direzioni utilizzabili per il calcolo del danneggiamento. Utilizzando le definizioni (3.10), (3.11) e (3.14), introdotte nel capitolo 3 gli elementi  $C_{ij}$  della matrice  $\bar{\bar{C}}$  sono valutati per mezzo della seguente espressione:

$$C_{ij} = \int_T (s_i(t) - s_{i,m}) \cdot (s_j(t) - s_{j,m}) dt \quad \text{con} \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (5.25)$$

dove  $s_i(t)$  rappresenta la componente  $i$ -esima del vettore  $\bar{s}(t)$  (5.20)-(5.24).

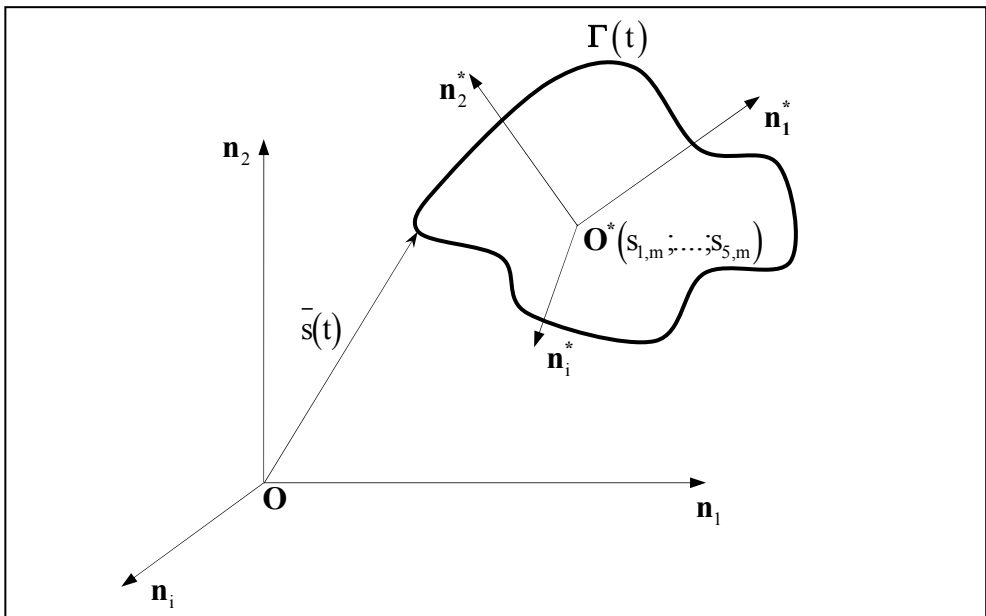


Fig. 5.3: Sistema di riferimento nello spazio deviatorico

La procedura per la stima del sistema di riferimento su cui calcolare il danneggiamento deve essere ripetuta in ogni nodo della mesh utilizzata per discretizzare il dominio, quindi in generale la matrice di covarianza nel  $k$ -esimo nodo è data da:

$$\bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{11,k} & \cdots & C_{1j,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{i1,k} & \cdots & C_{ij,k} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} i, j = 1, \dots, 5 \\ k = 1, \dots, n \end{array} \quad (5.26)$$

Gli autovettori della matrice  $\bar{C}$ , che indicheremo con  $\bar{n}_i^*$ , costituiscono una base ortonormale  $\{\bar{n}_1^*, \bar{n}_2^*, \bar{n}_3^*, \bar{n}_4^*, \bar{n}_5^*\}$  di  $\mathbb{R}^5$ , in grado di descrivere completamente lo spazio deviatorico Euclideo associato. Il problema del calcolo del sistema di riferimento su cui proiettare il percorso di carico  $\Gamma$  consiste di fatto in un classico problema agli autovalori ed autovettori. Utilizzando le espressioni (5.20)-(5.25), di seguito viene proposto il calcolo degli elementi  $C_{ij,k}$  della matrice di covarianza di  $\bar{s}(t)$ :

$$C_{11,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_1(t) - s_{1,m})^2 dt = \left( \begin{array}{l} 4(\sigma'_{x,a})^2 + 4(\sigma''_{x,a})^2 + (\sigma'_{y,a})^2 + (\sigma''_{y,a})^2 + (\sigma'_{z,a})^2 + (\sigma''_{z,a})^2 + 8\sigma'_{x,a}\sigma''_{x,a}\cos\varphi - \\ -4\sigma'_{x,a}\sigma'_{y,a} - 4\sigma''_{x,a}\sigma''_{y,a} - 4\sigma'_{x,a}\sigma'_{y,a}\cos\varphi - 4\sigma''_{x,a}\sigma''_{y,a}\cos\varphi - 4\sigma'_{x,a}\sigma'_{z,a} - \\ -4\sigma'_{x,a}\sigma''_{z,a}\cos\varphi - 4\sigma''_{x,a}\sigma'_{z,a}\cos\varphi - 4\sigma''_{x,a}\sigma''_{z,a} + 2\sigma'_{y,a}\sigma''_{y,a}\cos\varphi + \\ + 2\sigma'_{y,a}\sigma'_{z,a} + 2\sigma'_{y,a}\sigma''_{z,a}\cos\varphi + 2\sigma''_{y,a}\sigma'_{z,a}\cos\varphi + 2\sigma''_{y,a}\sigma''_{z,a} + 2\sigma'_{z,a}\sigma''_{z,a}\cos\varphi \end{array} \right) \quad (5.27)$$

$$C_{22,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_2(t) - s_{2,m})^2 dt = \left( \begin{array}{l} (\sigma'_{y,a})^2 + (\sigma''_{y,a})^2 + (\sigma'_{z,a})^2 + (\sigma''_{z,a})^2 + 2\sigma'_{y,a}\sigma''_{y,a}\cos\varphi - 2\sigma'_{y,a}\sigma'_{z,a} - \\ - 2\sigma'_{y,a}\sigma''_{z,a}\cos\varphi - 2\sigma''_{y,a}\sigma'_{z,a}\cos\varphi - 2\sigma''_{y,a}\sigma''_{z,a} + 2\sigma'_{z,a}\sigma''_{z,a}\cos\varphi \end{array} \right) \quad (5.28)$$



$$\begin{aligned}
C_{33,k} &= \frac{1}{T} \int_0^T (s_3(t) - s_{3,m})^2 dt = \\
&= \frac{1}{2} \left( (\tau'_{xy,a})^2 + (\tau''_{xy,a})^2 + 2\tau'_{xy,a} \tau''_{xy,a} \cos\varphi \right)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
C_{44,k} &= \frac{1}{T} \int_0^T (s_4(t) - s_{4,m})^2 dt = \\
&= \frac{1}{2} \left( (\tau'_{xz,a})^2 + (\tau''_{xz,a})^2 + 2\tau'_{xz,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi \right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
C_{55,k} &= \frac{1}{T} \int_0^T (s_5(t) - s_{5,m})^2 dt = \\
&= \frac{1}{2} \left( (\tau'_{yz,a})^2 + (\tau''_{yz,a})^2 + 2\tau'_{yz,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi \right)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
C_{23,k} &= C_{32,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_2(t) - s_{2,m})(s_3(t) - s_{3,m}) dt = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sigma'_{y,a} \tau'_{xy,a} + \sigma''_{y,a} \tau'_{xy,a} \cos\varphi - \sigma'_{z,a} \tau'_{xy,a} - \sigma''_{z,a} \tau'_{xy,a} \cos\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \sigma'_{y,a} \tau''_{xy,a} \cos\varphi + \sigma''_{y,a} \tau''_{xy,a} - \sigma'_{z,a} \tau''_{xy,a} \cos\varphi - \sigma''_{z,a} \tau''_{xy,a} \right)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
C_{24,k} &= C_{42,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_2(t) - s_{2,m})(s_4(t) - s_{4,m}) dt = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sigma'_{y,a} \tau'_{xz,a} + \sigma''_{y,a} \tau'_{xz,a} \cos\varphi - \sigma'_{z,a} \tau'_{xz,a} - \sigma''_{z,a} \tau'_{xz,a} \cos\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \sigma'_{y,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi + \sigma''_{y,a} \tau''_{xz,a} - \sigma'_{z,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi - \sigma''_{z,a} \tau''_{xz,a} \right)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
C_{25,k} &= C_{52,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_2(t) - s_{2,m})(s_5(t) - s_{5,m}) dt = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sigma'_{y,a} \tau'_{yz,a} + \sigma''_{y,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi - \sigma'_{z,a} \tau'_{yz,a} - \sigma''_{z,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \sigma'_{y,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi + \sigma''_{y,a} \tau''_{yz,a} - \sigma'_{z,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi - \sigma''_{z,a} \tau''_{yz,a} \right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
C_{34,k} &= C_{43,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_3(t) - s_{3,m})(s_4(t) - s_{4,m}) dt = \\
&= \frac{1}{2} (\tau'_{xy,a} \tau'_{xz,a} + \tau'_{xy,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi + \tau''_{xy,a} \tau'_{xz,a} \cos\varphi + \tau''_{xy,a} \tau''_{xz,a})
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
C_{35,k} &= C_{53,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_3(t) - s_{3,m})(s_5(t) - s_{5,m}) dt = \\
&= \frac{1}{2} (\tau'_{xy,a} \tau'_{yz,a} + \tau'_{xy,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi + \tau''_{xy,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi + \tau''_{xy,a} \tau''_{yz,a})
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
C_{45,k} &= C_{54,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_4(t) - s_{4,m})(s_5(t) - s_{5,m}) dt = \\
&= \frac{1}{2} (\tau'_{xz,a} \tau'_{yz,a} + \tau'_{xz,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi + \tau''_{xz,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi + \tau''_{xz,a} \tau''_{yz,a})
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
C_{12,k} &= C_{21,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_1(t) - s_{1,m})(s_2(t) - s_{2,m}) dt = \\
&= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left( \begin{aligned} &(\sigma'_{z,a})^2 + (\sigma''_{z,a})^2 - (\sigma'_{y,a})^2 - (\sigma''_{y,a})^2 + 2\sigma'_{x,a} \sigma'_{y,a} + 2\sigma'_{x,a} \sigma''_{y,a} \cos\varphi - \\ &- 2\sigma'_{x,a} \sigma'_{z,a} - 2\sigma'_{x,a} \sigma''_{z,a} \cos\varphi + 2\sigma''_{x,a} \sigma'_{y,a} \cos\varphi + 2\sigma''_{x,a} \sigma''_{y,a} - \\ &- 2\sigma''_{x,a} \sigma'_{z,a} \cos\varphi - 2\sigma''_{x,a} \sigma''_{z,a} - 2\sigma'_{y,a} \sigma''_{y,a} \cos\varphi + 2\sigma'_{z,a} \sigma''_{z,a} \cos\varphi \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
C_{13,k} &= C_{31,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_1(t) - s_{1,m})(s_3(t) - s_{3,m}) dt = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left( \begin{aligned} &2\sigma'_{x,a} \tau'_{xy,a} + 2\sigma''_{x,a} \tau'_{xy,a} \cos\varphi - \sigma'_{y,a} \tau'_{xy,a} - \sigma''_{y,a} \tau'_{xy,a} \cos\varphi - \\ &- \sigma'_{z,a} \tau'_{xy,a} - \sigma''_{z,a} \tau'_{xy,a} \cos\varphi + 2\sigma'_{x,a} \tau''_{xy,a} \cos\varphi + 2\sigma''_{x,a} \tau''_{xy,a} - \\ &- \sigma'_{y,a} \tau''_{xy,a} \cos\varphi - \sigma''_{y,a} \tau''_{xy,a} - \sigma'_{z,a} \tau''_{xy,a} \cos\varphi - \sigma''_{z,a} \tau''_{xy,a} \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
C_{14,k} &= C_{41,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_1(t) - s_{1,m})(s_4(t) - s_{4,m}) dt = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sigma'_{x,a} \tau'_{xz,a} + 2\sigma''_{x,a} \tau'_{xz,a} \cos\varphi - \sigma'_{y,a} \tau'_{xz,a} - \sigma''_{y,a} \tau'_{xz,a} \cos\varphi - \\ -\sigma'_{z,a} \tau'_{xz,a} - \sigma''_{z,a} \tau'_{xz,a} \cos\varphi + 2\sigma'_{x,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi + 2\sigma''_{x,a} \tau''_{xz,a} - \\ -\sigma'_{y,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi - \sigma''_{y,a} \tau''_{xz,a} - \sigma'_{z,a} \tau''_{xz,a} \cos\varphi - \sigma''_{z,a} \tau''_{xz,a} \end{pmatrix} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{15,k} &= C_{51,k} = \frac{1}{T} \int_0^T (s_1(t) - s_{1,m})(s_5(t) - s_{5,m}) dt = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sigma'_{x,a} \tau'_{yz,a} + 2\sigma''_{x,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi - \sigma'_{y,a} \tau'_{yz,a} - \sigma''_{y,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi - \\ -\sigma'_{z,a} \tau'_{yz,a} - \sigma''_{z,a} \tau'_{yz,a} \cos\varphi + 2\sigma'_{x,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi + 2\sigma''_{x,a} \tau''_{yz,a} - \\ -\sigma'_{y,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi - \sigma''_{y,a} \tau''_{yz,a} - \sigma'_{z,a} \tau''_{yz,a} \cos\varphi - \sigma''_{z,a} \tau''_{yz,a} \end{pmatrix} \quad (5.41)
\end{aligned}$$

La diagonalizzazione della matrice  $\overline{\overline{C}}_k$  consente quindi di determinare per il nodo k-esimo una base ortonormale  $\{\overline{\overline{n}}_1^*, \overline{\overline{n}}_2^*, \overline{\overline{n}}_3^*, \overline{\overline{n}}_4^*, \overline{\overline{n}}_5^*\}_k$  dello spazio deviatorico euclideo sulla quale proiettare il percorso di carico  $\Gamma$ . In forma compatta possiamo scrivere:

$$\overline{\overline{C}}_k = \overline{\overline{N}} \cdot \overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\overline{N}}^{-1} \quad (5.42)$$

dove  $\overline{\overline{\lambda}}$  rappresenta la matrice degli autovalori di  $\overline{\overline{C}}_k$ :

$$\overline{\overline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

mentre le colonne della matrice  $\overline{\overline{N}}$  sono costituite dagli autovettori  $\overline{\overline{n}}_i^*$ :

$$\overline{\overline{N}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{n}}_1^* & \cdots & \overline{\overline{n}}_5^* \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

### 5.3.2 Calcolo dell'ampiezza deviatorica nel sistema diagonalizzato

La determinazione dell'ampiezza deviatorica equivalente  $\sigma_{d,a}$  risulta semplificata quando le sollecitazioni agenti sono sinusoidali. Le componenti di  $\bar{s}(t)$  infatti, sono combinazioni lineari di funzioni sinusoidali perciò è lecito supporre che la proiezione del vettore  $\bar{s}(t)$  nel sistema di riferimento ortonormale  $\{\bar{n}_1^*, \bar{n}_2^*, \bar{n}_3^*, \bar{n}_4^*, \bar{n}_5^*\}_k$  darà luogo a componenti proiettate che a loro volta saranno combinazione di funzioni seno. Nel caso inoltre di componenti medie nulle, il calcolo dell'ampiezza della componente deviatorica proiettata risulterà ulteriormente semplificata.

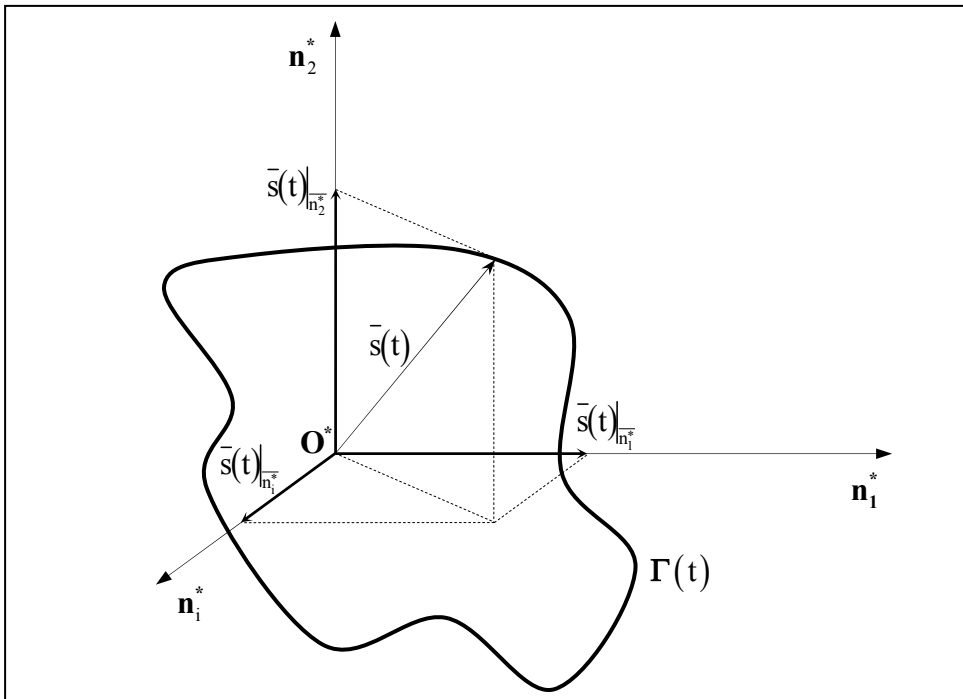


Fig. 5.4: Sistema di riferimento costituito dagli autovettori di  $\bar{C}_k$  e proiezioni di  $\bar{s}(t)$

Considerando le proprietà degli spazi Euclidei reali, le proiezioni del vettore  $\bar{s}(t)$  lungo le direzioni del sistema di riferimento ortonormale  $\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3, \bar{n}_4, \bar{n}_5\}_k$  sono date da:

$$\bar{s}(t)\Big|_{\bar{n}_i} = \frac{\langle \bar{s}(t), \bar{n}_i \rangle}{\langle \bar{n}_i, \bar{n}_i \rangle} \cdot \bar{n}_i \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.45)$$

L'espressione precedente può essere semplificata osservando che gli elementi di  $\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3, \bar{n}_4, \bar{n}_5\}_k$  sono versori perciò i coefficienti di Fourier di  $\bar{s}(t)$  rispetto ad  $\bar{n}_i$  rappresentano di fatto la norma della proiezione  $i$ -esima  $\bar{s}(t)\Big|_{\bar{n}_i}$ :

$$\bar{s}(t)\Big|_{\bar{n}_i} = \langle \bar{s}(t), \bar{n}_i \rangle_{i=1, \dots, 5} \quad (5.46)$$

Considerando la (5.15) si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{s}(t)\Big|_{\bar{n}_i} &= \langle \bar{s}(t), \bar{n}_i \rangle = \langle \bar{s}'(t) + \bar{s}''(t), \bar{n}_i \rangle = \langle \bar{s}'(t), \bar{n}_i \rangle + \langle \bar{s}''(t), \bar{n}_i \rangle \Big|_{i=1, \dots, 5} = \\ &= \left( \langle (\bar{s}'_m + \bar{s}'_a \sin(\omega t)), \bar{n}_i \rangle + \langle (\bar{s}''_m + \bar{s}''_a \sin(\omega t - \varphi)), \bar{n}_i \rangle \right) \Big|_{i=1, \dots, 5} = \\ &= \left( \langle \bar{s}'_m, \bar{n}_i \rangle + \langle \bar{s}'_a, \bar{n}_i \rangle \cdot \sin(\omega t) + \langle \bar{s}''_m, \bar{n}_i \rangle + \langle \bar{s}''_a, \bar{n}_i \rangle \cdot \sin(\omega t - \varphi) \right) \Big|_{i=1, \dots, 5} \end{aligned} \quad (5.47)$$

La relazione ottenuta esprime, al variare del tempo, la norma del vettore proiezione  $\bar{s}(t)\Big|_{\bar{n}_i}$  e risulta come combinazione lineare di funzioni sinusoidali. Imponendo l'annullamento della derivata della funzione ottenuta è possibile determinare i punti di massimo e minimo, di conseguenza l'ampiezza delle singole proiezioni di  $\bar{s}(t)$ .

$$\frac{d\left(\bar{s}(t)\Big|_{\bar{n}_i}\right)}{dt} = 0 \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.48)$$

$$\frac{d\left(\overline{s}(t)\right)\Big|_{\overline{n}_i^*}}{dt} = \omega \cdot \left\langle \overline{s}'_a, \overline{n}_i^* \right\rangle \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \left\langle \overline{s}''_a, \overline{n}_i^* \right\rangle \cdot \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (5.49)$$

Utilizzando le formule di sottrazione delle funzioni trigonometriche, per mezzo di semplici passaggi si ottiene:

$$\left\langle \overline{s}'_a, \overline{n}_i^* \right\rangle + \left\langle \overline{s}''_a, \overline{n}_i^* \right\rangle \cdot (\cos \varphi + \tan(\omega t) \cdot \sin \varphi) = 0 \quad (5.50)$$

che risulta valida se  $\omega \neq 0 \cup \omega t \neq \pi/2$ . Tuttavia, il caso  $\omega = 0$  non è di interesse in quanto corrisponde al caso stazionario. Dalla (5.47) si ottiene:

$$\tan(\omega t) = - \left( \frac{\left\langle \overline{s}'_a, \overline{n}_i^* \right\rangle}{\left\langle \overline{s}''_a, \overline{n}_i^* \right\rangle} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\tan \varphi} \right) \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.51)$$

Dalla precedente relazione si ricavano le due soluzioni  $\alpha_{\overline{n}_i^*}$  e  $\beta_{\overline{n}_i^*}$  che corrispondono al punto di massimo e minimo per la funzione (5.47):

$$\alpha_{\overline{n}_i^*} = \arctan \left( - \left( \frac{\left\langle \overline{s}'_a, \overline{n}_i^* \right\rangle}{\left\langle \overline{s}''_a, \overline{n}_i^* \right\rangle} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\tan \varphi} \right) \right) \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.52)$$

$$\beta_{\overline{n}_i^*} = \alpha_{\overline{n}_i^*} + \pi \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.53)$$

Dalla (5.52) possiamo osservare che per  $\varphi = 0$  oppure  $\left\langle \overline{s}''_a, \overline{n}_i^* \right\rangle = 0$  le soluzioni sono date da  $\alpha_{\overline{n}_i^*} = -\pi/2$  e  $\beta_{\overline{n}_i^*} = \pi/2$  in quando in tal caso la (5.49) risulta identicamente nulla.

Utilizzando le soluzioni determinate e l'espressione (5.47) è possibile calcolare le ampiezze delle proiezioni di  $\bar{s}(t)$  lungo le direzioni  $\bar{n}_i^*$ :

$$\left(\bar{s}\right)_{\bar{n}_i^*} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\langle \bar{s}'_a, \bar{n}_i^* \rangle \cdot \sin(\alpha_{\bar{n}_i^-}) + \langle \bar{s}''_a, \bar{n}_i^* \rangle \cdot \sin(\alpha_{\bar{n}_i^-} - \varphi) - \\ &-\langle \bar{s}'_a, \bar{n}_i^* \rangle \cdot \sin(\beta_{\bar{n}_i^-}) - \langle \bar{s}''_a, \bar{n}_i^* \rangle \cdot \sin(\beta_{\bar{n}_i^-} - \varphi) \end{aligned} \right]_{i=1, \dots, 5} \quad (5.54)$$

considerando inoltre che:

$$\sin(\alpha_{\bar{n}_i^-}) = -\sin(\alpha_{\bar{n}_i^-} + \pi) = -\sin(\beta_{\bar{n}_i^-}) \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.55)$$

la (5.54) si semplifica ulteriormente:

$$\left(\bar{s}\right)_{\bar{n}_i^*} = \left[ \langle \bar{s}'_a, \bar{n}_i^* \rangle \cdot \sin(\alpha_{\bar{n}_i^-}) + \langle \bar{s}''_a, \bar{n}_i^* \rangle \cdot \sin(\alpha_{\bar{n}_i^-} - \varphi) \right]_{i=1, \dots, 5} \quad (5.56)$$

I risultati ottenuti consentono infine di applicare la definizione utilizzata in (3.17) per il calcolo dell'ampiezza deviatorica equivalente nella quale, le componenti  $(\sigma_{d,a})_i$  che rappresentano l'ampiezza tensionale risolta del percorso di carico proiettato lungo l'asse  $i$ -esimo del sistema di riferimento, sono calcolate per mezzo della (5.56):

$$\sigma_{d,a} = \sqrt{\sum_i (\sigma_{d,a})_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left(\bar{s}\right)_{\bar{n}_i^*}^2} \quad i=1, \dots, 5 \quad (5.57)$$

### 5.3.3 Calcolo del rapporto di carico multiassiale

Il calcolo del rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$  richiede la conoscenza dell'ampiezza deviatorica equivalente e della componente idrostatica massima valutate nodo per nodo. Nella precedente sezione è stato dimostrato come sia possibile ricavare una formulazione analitica per la  $\sigma_{d,a}$ . Tuttavia, per l'implementazione completa in un codice di calcolo della procedura proposta è necessario ricavare un'equazione esplicita della componente idrostatica allo stesso modo in cui è stata ricavata la (5.57). La componente idrostatica del tensore degli sforzi è data da:

$$\sigma_H(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\overline{\sigma}(t)) = \frac{1}{3} \text{tr}(\overline{\sigma}'(t) + \overline{\sigma}''(t)) = \frac{1}{3} \left[ \text{tr}(\overline{\sigma}'(t)) + \text{tr}(\overline{\sigma}''(t)) \right] \quad (5.58)$$

Facendo uso delle relazioni (5.7), (5.8) è possibile rappresentare i tensori  $\overline{\sigma}'(t)$ ,  $\overline{\sigma}''(t)$  suddividendoli nella componente media e nell'ampiezza che risultano rispettivamente funzione delle tensioni medie  $\sigma'_{ij,m}$ ,  $\sigma''_{ij,m}$  e delle ampiezze  $\sigma'_{ij,a}$ ,  $\sigma''_{ij,a}$ :

$$\overline{\sigma}'(t) = \overline{\sigma}'_m + \overline{\sigma}'_a \cdot \sin(\omega t) \quad (5.59)$$

$$\overline{\sigma}''(t) = \overline{\sigma}''_m + \overline{\sigma}''_a \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.60)$$

Utilizzando le proprietà della traccia delle matrici reali di ordine  $n$  si ottiene:

$$\text{tr}(\overline{\sigma}'(t)) = \text{tr}(\overline{\sigma}'_m + \overline{\sigma}'_a \cdot \sin(\omega t)) = \text{tr}(\overline{\sigma}'_m) + \text{tr}(\overline{\sigma}'_a) \cdot \sin(\omega t) \quad (5.61)$$

$$\text{tr}(\overline{\sigma}''(t)) = \text{tr}(\overline{\sigma}''_m + \overline{\sigma}''_a \cdot \sin(\omega t - \varphi)) = \text{tr}(\overline{\sigma}''_m) + \text{tr}(\overline{\sigma}''_a) \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.62)$$

Sostituendo le precedenti relazioni in (5.58) risulta:

$$\sigma_H(t) = \sigma'_{H,m} + \sigma'_{H,a} \cdot \sin(\omega t) + \sigma''_{H,m} + \sigma''_{H,a} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.63)$$



dove:

$$\sigma'_{H,m} = \frac{1}{3}(\sigma'_{x,m} + \sigma'_{y,m} + \sigma'_{z,m}) \quad \sigma'_{H,a} = \frac{1}{3}(\sigma'_{x,a} + \sigma'_{y,a} + \sigma'_{z,a}) \quad (5.64)$$

$$\sigma''_{H,m} = \frac{1}{3}(\sigma''_{x,m} + \sigma''_{y,m} + \sigma''_{z,m}) \quad \sigma''_{H,a} = \frac{1}{3}(\sigma''_{x,a} + \sigma''_{y,a} + \sigma''_{z,a}) \quad (5.65)$$

Per la determinazione dei punti di massimo di  $\sigma_H(t)$  è sufficiente imporre l'annullamento della derivata prima dell'espressione (5.63):

$$\frac{d(\sigma_H(t))}{dt} = \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot \sigma'_{H,a} + \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi) \cdot \sigma''_{H,a} = 0 \quad (5.66)$$

Utilizzando le formule di sottrazione e semplificando otteniamo infine:

$$\sigma'_{H,a} + \sigma''_{H,a} \cdot \cos \varphi + \tan(\omega t) \cdot \sigma''_{H,a} \cdot \sin \varphi = 0 \quad (5.67)$$

$$\tan(\omega t) = - \left( \frac{\sigma'_{H,a}}{\sigma''_{H,a}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\tan \varphi} \right) \quad (5.68)$$

Considerando la periodicità della funzione trigonometrica tangente, le soluzioni della (5.68) sono rappresentate dai seguenti due angoli:

$$\alpha_{\sigma_H} = \arctan \left( - \left( \frac{\sigma'_{H,a}}{\sigma''_{H,a}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\tan \varphi} \right) \right) \quad (5.69)$$

$$\beta_{\sigma_H} = \alpha_{\sigma_H} + \pi \quad (5.70)$$

L'espressione generale (5.63) per il calcolo di  $\sigma_H(t)$ , può essere ulteriormente semplificata se le condizioni di carico sono a rapporto di sollecitazione  $R=-1$ . In tal caso infatti, le componenti medie dei segnali sono nulle, perciò  $\sigma'_{H,m} = \sigma''_{H,m} = 0$  e la (5.63) è data da:

$$\sigma_H(t) = \sigma'_{H,a} \cdot \sin(\omega t) + \sigma''_{H,a} \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.71)$$

Sostituendo le soluzioni  $\alpha_{\sigma_H}$ ,  $\beta_{\sigma_H}$  nella precedente relazione ed osservando che:

$$\sin(\alpha_{\sigma_H}) = -\sin(\alpha_{\sigma_H} + \pi) = -\sin(\beta_{\sigma_H}) \quad (5.72)$$

il valore della componente idrostatica massima è data da:

$$\sigma_{H,\max} = \left| \sigma'_{H,a} \cdot \sin(\alpha_{\sigma_H}) + \sigma''_{H,a} \cdot \sin(\alpha_{\sigma_H} - \varphi) \right| \quad (5.73)$$

## STRUMENTI DI CALCOLO

### 6.1 Procedura computazionale

In questa sezione verrà presentata nel dettaglio, l'applicazione della procedura di calcolo illustrata in 5.1 per mezzo di software commerciali e saranno affrontate alcune problematiche connesse all'utilizzo di metodi FEA. I codici di calcolo impiegati sono Matlab<sup>®</sup> e Comsol Multiphysics<sup>®</sup>. Per quest'ultimo, si tratta di un software, sviluppato in ambiente Matlab<sup>®</sup>, che nasce con lo scopo di modellare e simulare problemi scientifici e ingegneristici basati sulla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali (*Partial Differential Equations - PDEs*).

In Comsol Multiphysics<sup>®</sup> è possibile distinguere due tipologie differenti di approccio per l'analisi di problemi differenziali: le applicazioni più comuni come ad esempio acustica, elettromagnetismo, trasmissione del calore, meccanica strutturale, ecc., sono suddivise in moduli specifici nei quali, le equazioni differenziali sono già preimpostate all'interno del software; in questo caso si procede modellando le geometrie e definendo le quantità fisiche (proprietà del materiale costituente il modello, condizioni al contorno, carichi applicati, ecc.) necessarie per la risoluzione del problema; per altri tipi di applicazioni è possibile invece definire, oltre alla geometria del dominio, le equazioni differenziali che governano lo specifico problema. Il software offre infatti la possibilità di modellare il problema mediante tre diverse formulazioni delle equazioni differenziali [Comsol<sup>®</sup> 07\_a]:

- formulazione a coefficienti impiegata per problemi lineari
- formulazione forte (o generale) per problemi non lineari
- formulazione debole (o integrale)

Utilizzando inoltre l'ambiente multifisico è possibile definire contemporaneamente più moduli di analisi per risolvere problemi di tipo accoppiato.

L'equazione differenziale (2.22) del modello a gradiente implicito è di fatto una classica equazione differenziale, alle derivate parziali, di tipo ellittica anche detta equazione di Helmholtz inomogenea [Peerlings 99]. Imponendo le condizioni al bordo di Newman (2.23), è possibile risolvere nell'intero dominio di analisi tale equazione in Comsol Multiphysics<sup>®</sup> utilizzando una formulazione a coefficienti.

Tuttavia il calcolo delle grandezze da utilizzare nel criterio multiassiale non possono essere direttamente eseguite in Comsol Multiphysics<sup>®</sup>, ma è necessario utilizzare un ambiente di calcolo esterno. Infatti, la stima del sistema di riferimento di massima varianza nello spazio deviatorico, consiste nel risolvere, nodo per nodo, un classico problema agli autovalori ed autovettori che quindi può essere efficientemente affrontato in Matlab<sup>®</sup>.

Nel seguito vedremo come verrà trattato dal punto di vista computazionale l'implementazione del calcolo multiassiale, del modello a gradiente implicito e l'importazione-esportazione delle soluzioni tensionali tra i due software. Infatti la messa a punto di una procedura efficiente per affrontare complessivamente il problema del calcolo proposto in 5.1, rende necessaria la definizione di routine specifiche che permettano di variare, senza la perdita di informazioni, l'ambiente di calcolo a seconda delle necessità.

Lo schema proposto di seguito ha lo scopo di illustrare la procedura computazionale evidenziando gli ambienti di calcolo utilizzati durante il percorso di analisi.

Inizialmente devono essere creati i modelli FEM per ogni tipologia di carico che insiste sul componente ( ad esempio trazione, torsione, flessione, taglio,...) e risolti utilizzando il modulo strutturale. In questa prima fase può essere definita una qualsiasi tipologia di analisi del modulo strutturale supportata dal software. A seconda delle necessità infatti possono essere risolte analisi statiche, quasi-statiche, elasto-plastiche, transitorie, ecc, per la determinazione iniziale dei campi tensionali. Nel seguito del lavoro verranno tuttavia utilizzate analisi lineari statiche.

Eseguite le analisi FEM, tutte le informazioni del modello risolto in Comsol Multiphysics<sup>®</sup> vengono memorizzate in un array multidimensionale chiamato *structure FEM*, ossia una tipologia di dato strutturato di Matlab<sup>®</sup>.

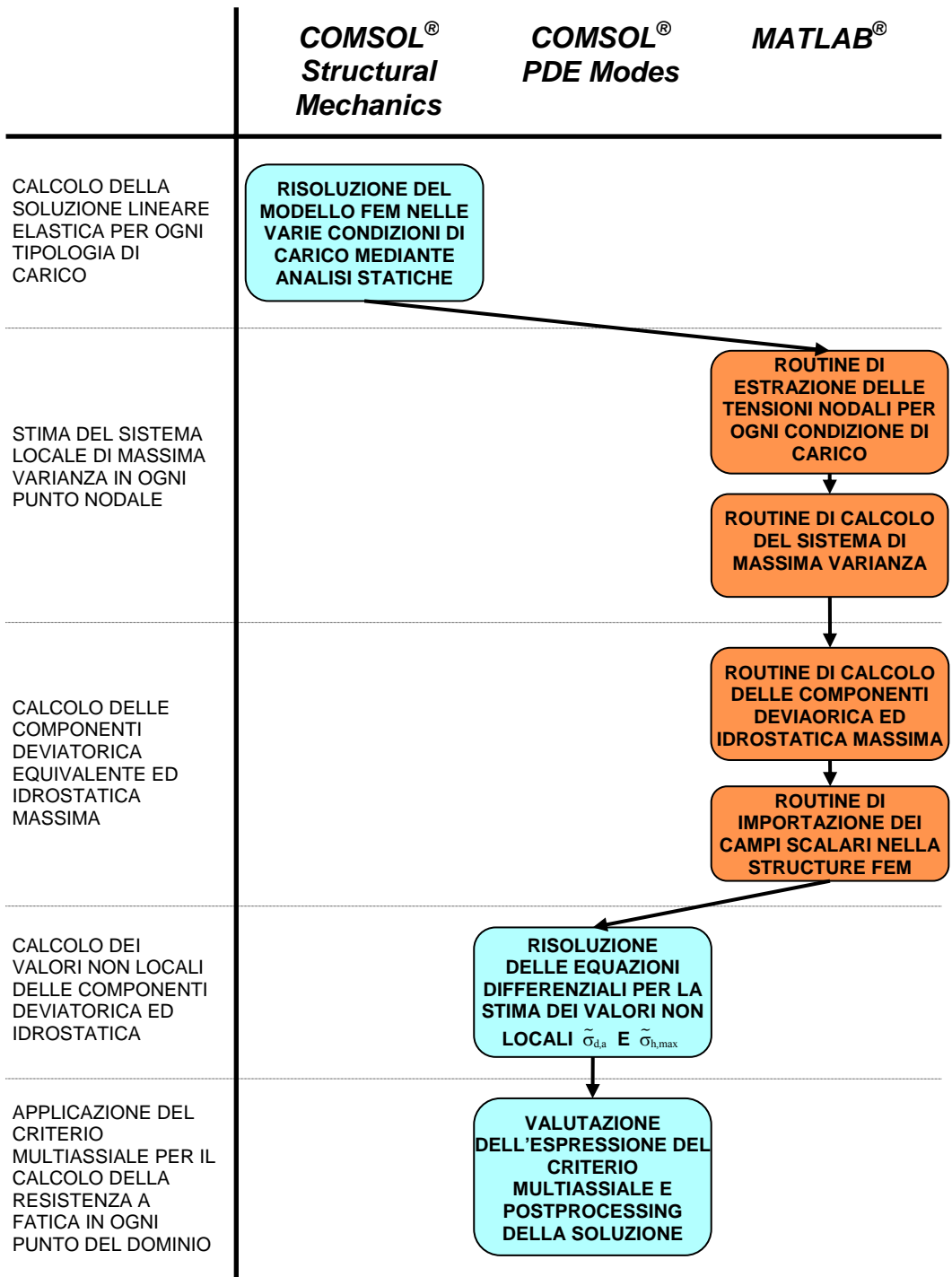


Fig. 6.1: Lay-out della procedura computazionale adottata.

Le strutture di dati memorizzate nei campi della *structure FEM* definiscono i vari aspetti del problema differenziale, come ad esempio le informazioni sul modello fisico, la discretizzazione utilizzata, il processo risolutivo, le soluzioni nodali, il postprocessing, ecc. La *structure FEM* può essere esportata nel workspace di Matlab<sup>®</sup> e le informazioni contenute nei campi possono essere estratte mediante l'utilizzo di specifiche routine. Nel caso in esame le grandezze di interesse sono le soluzioni tensionali ai nodi che verranno utilizzate per il calcolo multiassiale. Dopo aver estratto le soluzioni nodali in ambiente Matlab<sup>®</sup>, viene inizialmente calcolato, per ogni nodo, il sistema di massima varianza. Successivamente la componente deviatorica viene proiettata nel sistema così definito calcolando l'ampiezza deviatorica equivalente e la tensione idrostatica massima. I due campi tensionali calcolati, che di fatto possono essere trattati come campi scalari, vengono importati nei nodi del modello FEM inizialmente definito. In ambiente Comsol Multiphysics<sup>®</sup> quindi, tali campi vengono utilizzati come termine sorgente nelle equazioni di Helmholtz (5.1), (5.2) per il calcolo dei valori non locali  $\tilde{\sigma}_{d,a}$  e  $\tilde{\sigma}_{h,max}$  nell'intero dominio. La risoluzione delle (5.1) e (5.2) permette di ottenere i campi tensionali non locali per la componente deviatorica ed idrostatica che vengono a loro volta utilizzati nell'espressione del criterio multiassiale. Infine, l'equazione del criterio multiassiale può essere valutata in Comsol Multiphysics<sup>®</sup> ed il postprocessing fornisce la previsione di resistenza a fatica per l'intera geometria analizzata.

Riassumendo quindi la procedura prevede inizialmente la risoluzione dei modelli FEM in Comsol Multiphysics<sup>®</sup>, l'esportazione delle soluzioni nodali in ambiente Matlab<sup>®</sup>, dove vengono calcolate le grandezze utilizzate nel criterio multiassiale, l'importazione in Comsol Multiphysics<sup>®</sup> dei campi scalari relativi alla componente deviatorica  $\sigma_{d,a}$  ed idrostatica  $\sigma_{h,max}$ , la risoluzione delle equazioni differenziali per il calcolo dei valori non locali  $\tilde{\sigma}_{d,a}$  e  $\tilde{\sigma}_{h,max}$  ed infine l'applicazione del criterio multiassiale.

## 6.2 Routine di estrazione dati FEM ed importazione campi scalari

Abbiamo visto come la procedura computazionale precedentemente esposta prevede il calcolo multiassiale in ambiente Matlab<sup>®</sup>, mentre la risoluzione dell'equazione differenziale del modello a gradiente implicito in ambiente Comsol Multiphysics<sup>®</sup>. Il trasferimento dei dati tra gli ambienti di calcolo richiede la definizione di specifiche routine che siano al tempo stesso affidabili ed efficienti. A tale scopo è innanzitutto necessario definire la tipologia e l'ordine dell'elemento con cui eseguire l'intera analisi. Inizialmente sono stati presi in considerazione elementi cubici ad 8 nodi con funzioni di forma lineari. Tuttavia gli elementi lineari, per particolari condizioni di carico, possono fornire soluzioni, in termini di campo tensionale, caratterizzate da scarsa regolarità. Inoltre, tali elementi non riescono a descrivere con accuratezza gradienti di tensione molto forti, quali quelli in prossimità dei raggi di raccordo ridotti, di cave, di spallamenti, e quindi forniscono risultati più approssimati di altri elementi di ordine superiore. Per tali motivi e con l'intento di fornire strumenti di calcolo utilizzabili in più applicazioni di calcolo strutturale, è stata posta l'attenzione su elementi cubici a 20 nodi, isoparametrici del secondo ordine. La figura seguente riporta una rappresentazione simbolica della tipologia di elemento adottato nelle analisi eseguite in ambiente Comsol Multiphysics<sup>®</sup>.

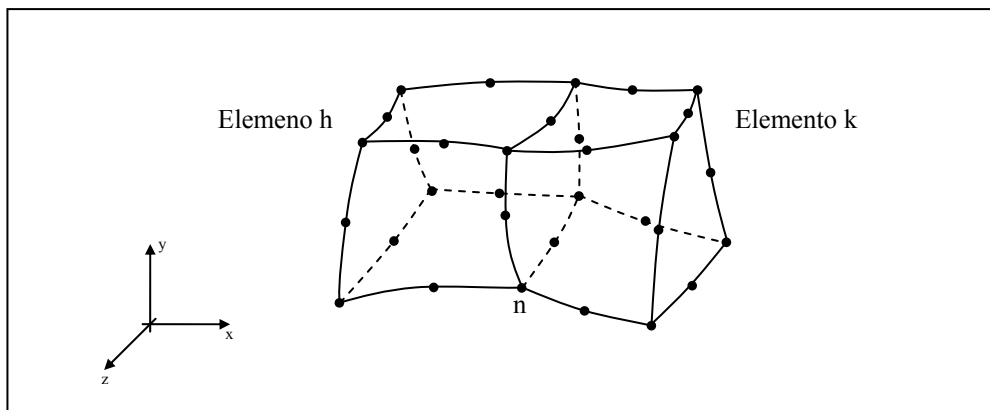


Fig. 6.2: Rappresentazione degli elementi di mesh.

Senza entrare nel merito delle routine di estrazione dei dati FEM ed importazione dei campi scalari nei punti nodali, è opportuno evidenziare che inizialmente, per ogni nodo, vengono estratte le soluzioni primarie, ossia gli spostamenti nodali  $(u_x, u_y, u_z)_n$  e successivamente il postprocessing effettuato dal software, relativo alle tensioni  $\sigma_{ij}$ , viene salvato nel workspace di Matlab<sup>®</sup>. Dalla teoria classica degli elementi finiti, con riferimento alla figura 6.2, osserviamo che considerando il nodo  $n$  della mesh, possiamo valutare, per tale nodo, le tensioni  $[\sigma_{ij,n}]$  rispetto all'elemento h-esimo  $[\sigma_{ij,n}]_h$  e rispetto all'elemento k-esimo  $[\sigma_{ij,n}]_k$ . In generale, le componenti dei vettori tensione  $[\sigma_{ij,n}]_h$  e  $[\sigma_{ij,n}]_k$  risulteranno diverse in quanto il campo delle deformazioni è discontinuo nel dominio ossia, al bordo tra i due elementi h e k non è garantita la continuità del campo deformativo.

### 6.2.1 Valutazione dell'errore di importazione-esportazione dei dati

Molti codici di calcolo ad elementi finiti eseguono medie più o meno affinate per offrire all'utente un valore univoco di tensione in ogni nodo. Dopo numerose analisi è apparso evidente che il software Comsol Multiphysics<sup>®</sup> non contiene routine per il calcolo di soluzioni tensionali mediate. Tale aspetto ha portato ad osservare in fase di validazione delle routine, minime differenze tra soluzioni tensionali calcolate ed esportate, presumibilmente dovute a criteri di riordinamento dei nodi interni al software e non gestibili dall'utente.

Ciò nonostante è lecito ipotizzare che all'aumentare del numero di nodi l'errore d'esportazione tenderà ad annullarsi in quanto i vettori tensione  $[\sigma_{ij,n}]_h$  e  $[\sigma_{ij,n}]_k$  tenderanno a coincidere. Sono state eseguite alcune analisi comparative allo scopo di valutare il comportamento di tale errore all'aumentare dell'affinamento della mesh. I modelli utilizzati sono rappresentati in figura 6.3.



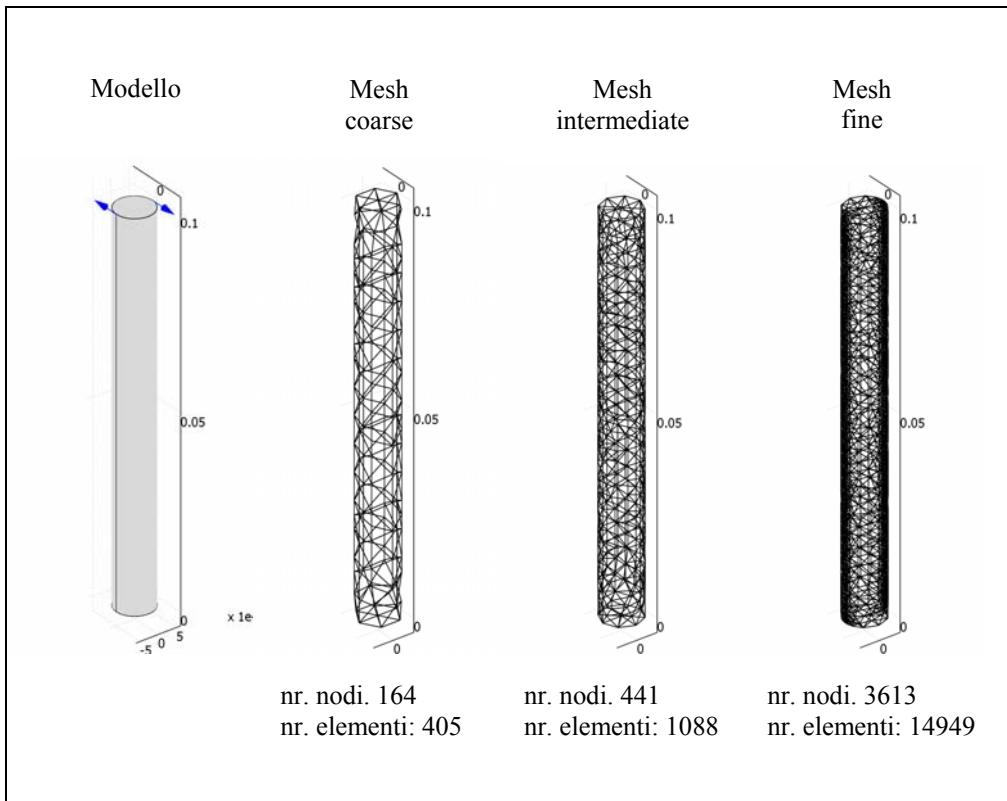


Fig. 6.3: Rappresentazione degli elementi di mesh.

Il modello consiste in un semplice provino liscio sollecitato da un carico torsionale. Le soluzioni tensionali vengono calcolate utilizzando il modulo strutturale di Comsol Multiphysics<sup>®</sup>, successivamente vengono esportate in ambiente Matlab<sup>®</sup> ed infine memorizzate nella *structure FEM* per essere importata in ambiente Comsol Multiphysics<sup>®</sup>. L'indice d'errore viene stimato utilizzando le soluzioni tensionali calcolate per mezzo del modulo strutturale e le soluzioni tensionali importate con la *structure FEM*.

Assumendo una distribuzione Gaussiana dell'indice d'errore le figure 6.4 e 6.5 rappresentano rispettivamente la densità di probabilità ed il cumulativo della probabilità d'errore per le tre tipologie di mesh analizzate.

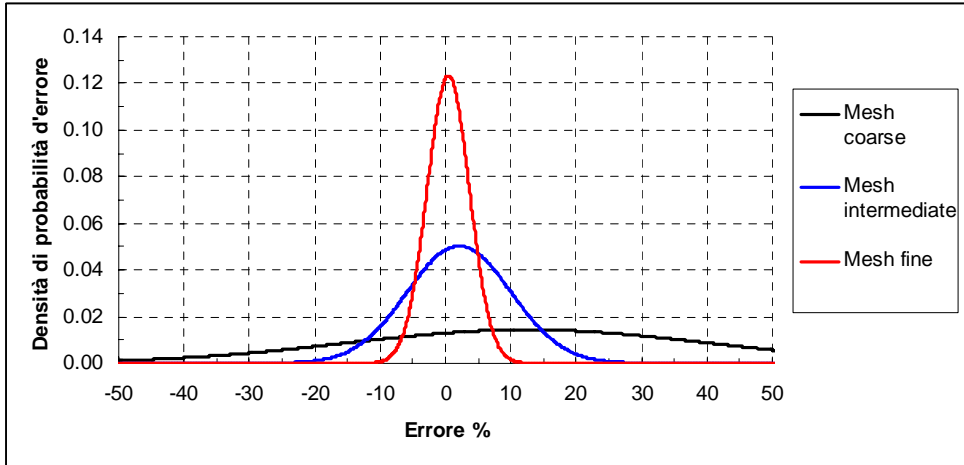


Fig. 6.4: Densità di probabilità d'errore

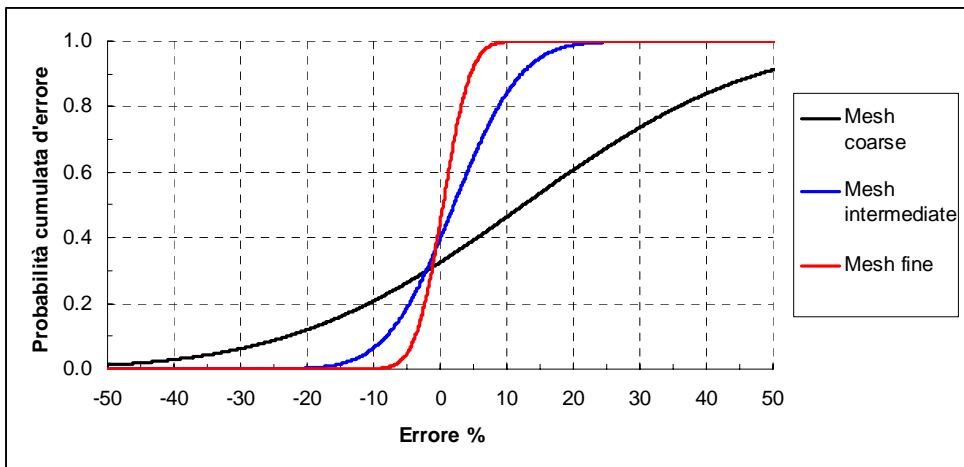
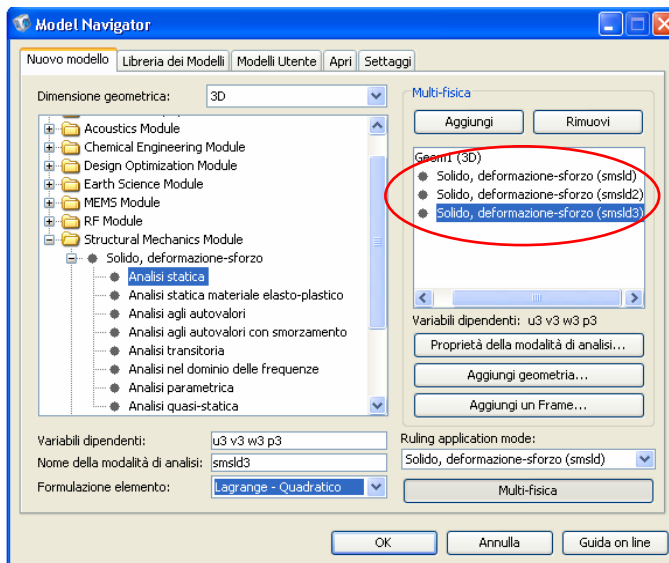


Fig. 6.5: Cumulativo della probabilità d'errore

Il diagramma della probabilità d'errore evidenzia che passando dalla mesh coarse alla mesh fine l'indice d'errore medio diminuisce dal 12% al 0.4%, mentre dal grafico relativo al cumulativo della probabilità d'errore, a parità d'errore ammesso, ad esempio 8%, la probabilità cumulata passa dal 43% della mesh coarse, al 77% per l'intermediate fino a raggiungere il 99% per la mesh fine. Tali evidenze ci permettono di concludere che al convergere dei modelli FEM l'indice d'errore sulle routine di estrazione ed importazione dei dati tenderà ad annullarsi.

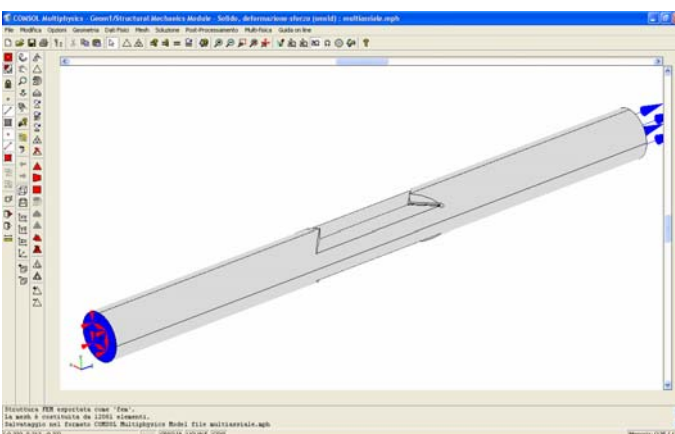
### 6.3 Esempio applicativo

Nel seguito verrà presentata nel dettaglio una applicazione della procedura computazionale senza tuttavia entrare nel merito dei risultati. Tale sezione infatti, ha lo scopo di evidenziare le operazioni necessarie per l'utilizzo della procedura validata. In particolare sarà preso in esame un caso biassiale costituito da una componente di carico normale ed una torsionale.

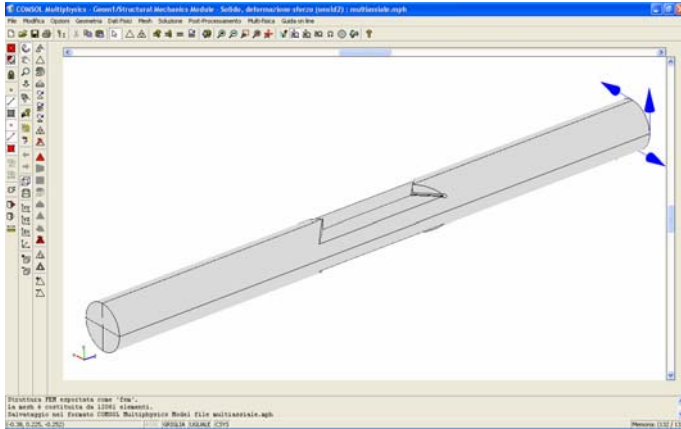


Definizione delle analisi statiche 1 e 2 relative a due tipologie di condizioni di carico.

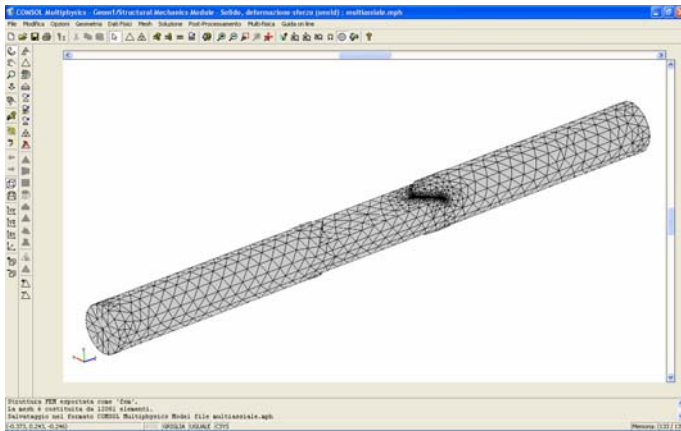
Definizione dell'analisi statica 3 necessaria per l'importazione dei campi scalari per il calcolo multiassiale.



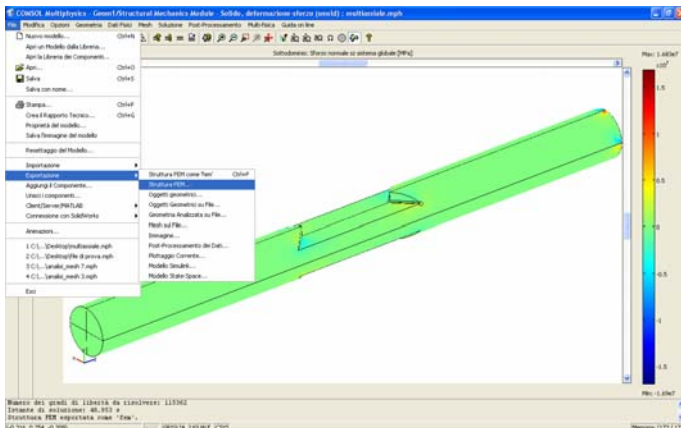
Condizioni al contorno per la tipologia di carico 1.



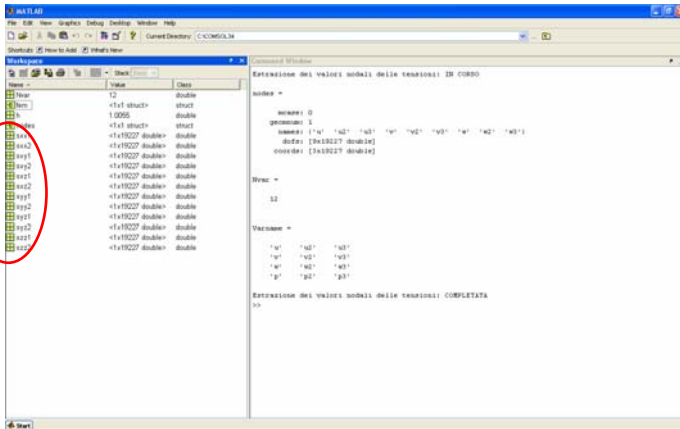
Condizioni al contorno per la tipologia di carico 2.



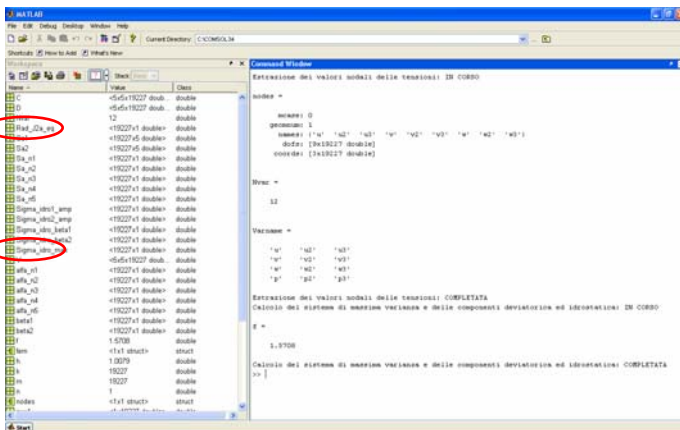
Discretizzazione del modello utilizzando elementi isoparametrici del secondo ordine.



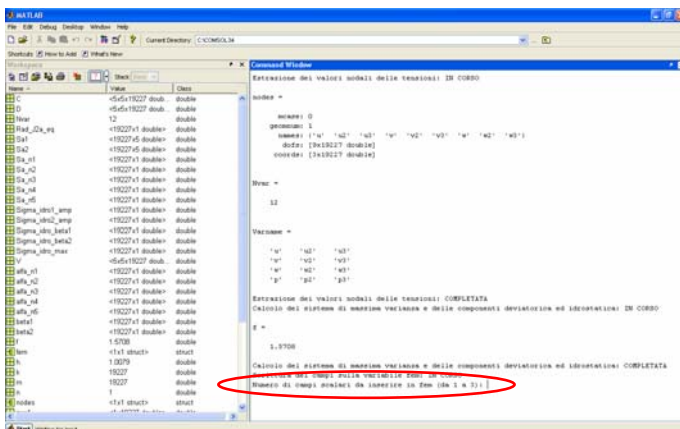
Risoluzione dei modelli FEM per la condizione di carico 1 e 2 ed esportazione in ambiente Matlab<sup>®</sup> della *structure FEM*.



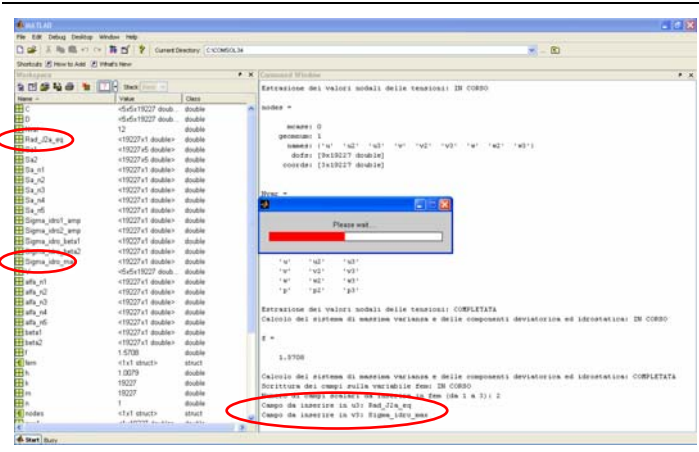
Estrazione delle soluzioni tensionali. In questo caso l'indice 1 identifica le tensioni nodali della soluzione statica 1 e l'indice 2 quelle della soluzione statica 2.



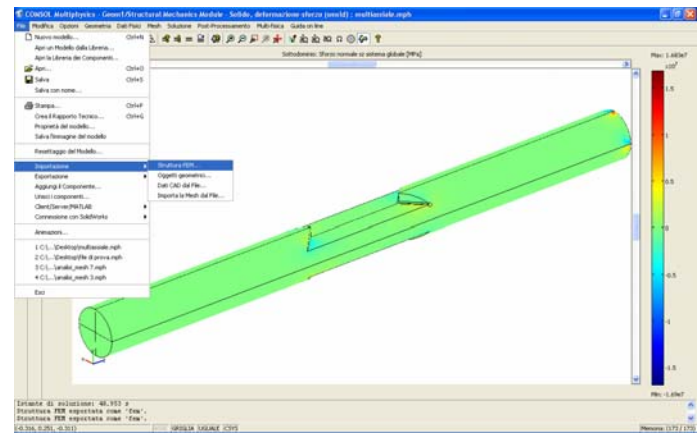
Calcolo del sistema di massima varianza. Proiezione della componente deviatorica nel sistema di riferimento stimato e calcolo della componente idrostatica massima.



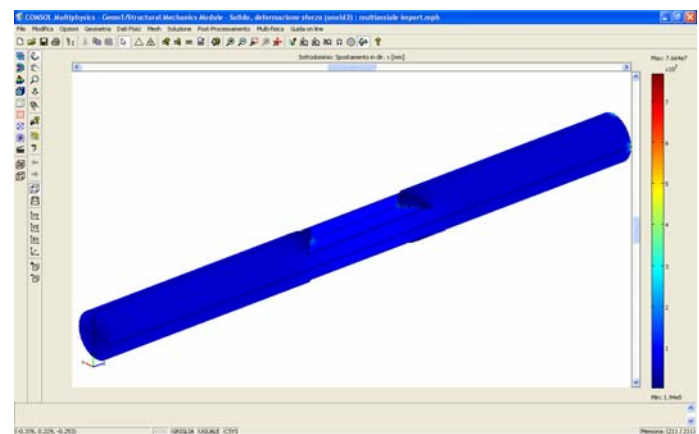
Scrittura della structure FEM. Definire il numero di campi scalari che si desidera importare nella structure FEM.



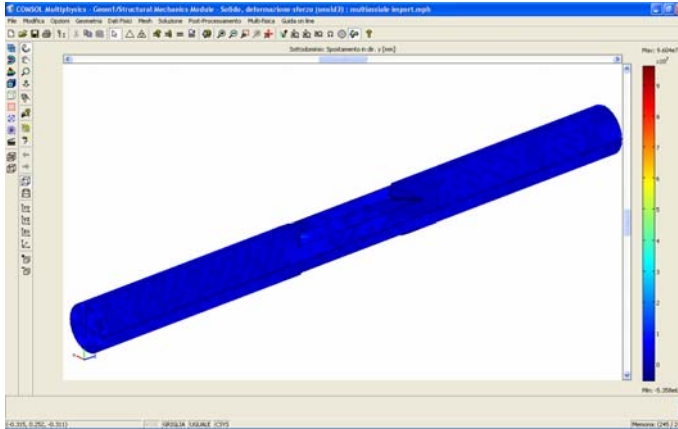
Inserire i campi scalari desiderati.  
 In questo caso viene importata la componente deviatorica ed idrostatica.



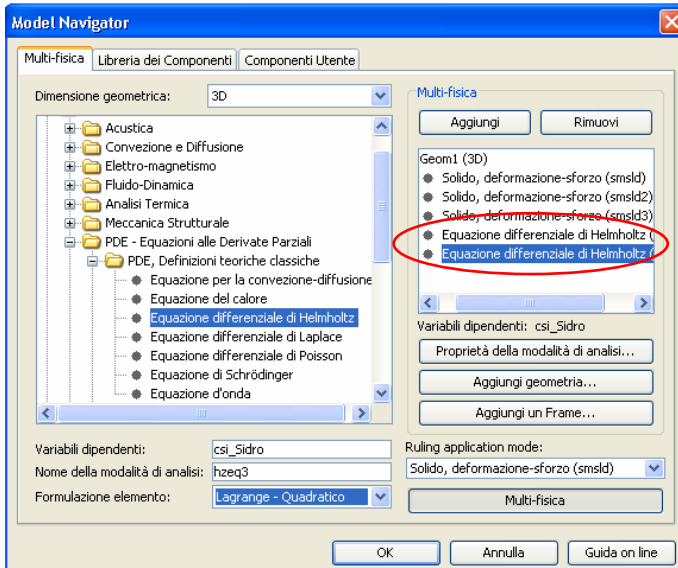
Importazione in ambiente Comsol Multiphysics® della *structure FEM*.



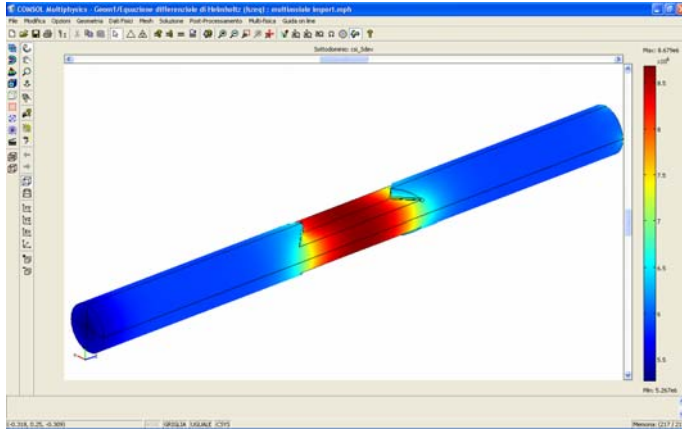
Esempio di plottaggio della componente deviatorica importata con la *structure FEM* da Matlab®.



Esempio di plottaggio della componente idrostatica importata con la *structure FEM* da Matlab®.

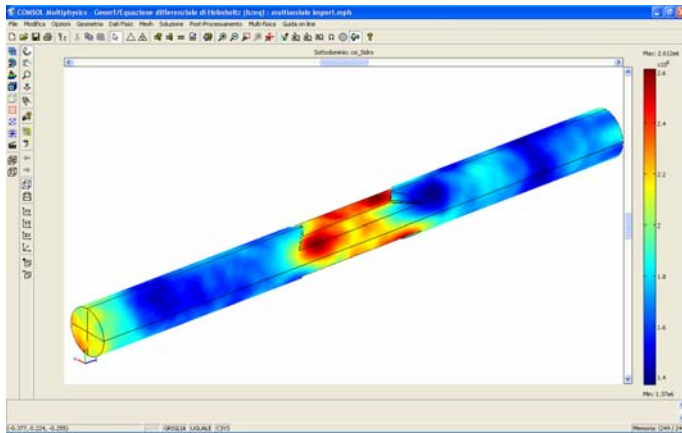


Definizione delle equazioni differenziali di helmholz per la risoluzione numerica del modello a gradiente implicito. In questo esempio verranno calcolati i valori non locali  $\tilde{\sigma}_{d,a}$  e  $\tilde{\sigma}_{h,max}$ .



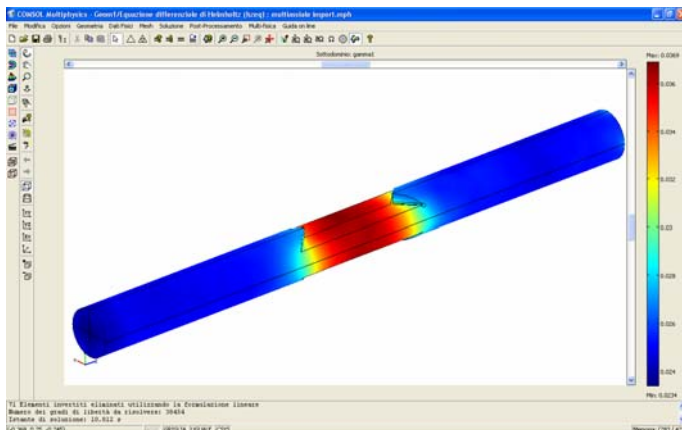
Postprocessing  
della componente  
deviatorica  
non locale

$$\tilde{\sigma}_{d,a}$$



Postprocessing  
della componente  
idrostatica  
non locale

$$\tilde{\sigma}_{h,max}$$



Valutazione  
dell'espressione del  
criterio multiassiale e  
postprocessing della  
soluzione.



# ANALISI NUMERICHE E RISULTATI

## 7.1 Introduzione

Il metodo proposto nei precedenti capitoli, sia in termini teorici che puramente applicativi, vuole essere uno strumento che permette al progettista una rapida valutazione visiva del comportamento a fatica del componente dando la possibilità di individuare potenziali punti critici e stimarne la resistenza a fatica, indipendentemente dalla complessità geometrica analizzata e dalle condizioni di carico.

Recentemente sono stati proposti alcuni metodi, basati sulla teoria del volume critico originariamente formulata da Peterson [Peterson 59] e Neuber [Neuber 58], tra i quali ricordiamo “Theory of Critical Distances”(TCD) [Taylor 99],[Tanaka 83], “Crack Modelling Method”(CMM), [Taylor 99\_b], “Pluvinage approach” [Bellett 02], con lo scopo di estendere la previsione della resistenza a fatica da geometrie bidimensionali (2D) a tridimensionali (3D).

Taylor et al. [Bellett 05] hanno messo in evidenza come tali metodi risultano sufficientemente affidabili se applicati a concentratori tridimensionali che inducono campi di tensione per i quali una componente dello stress è dominante rispetto alle altre, mentre l'errore nella previsione aumenta considerevolmente in presenza di intagli per i quali il campo di tensione indotto risulta multiassiale.

Inoltre è fondamentale ricordare che tali metodi sono legati alla conoscenza o stima del punto di “hot spot”, cioè il punto critico del componente ed al concetto di “focus path” ossia la direzione lungo la quale è eseguita la previsione dal punto di hot spot.

Nella pratica il progettista può trovarsi nella condizione di non conoscere il punto critico per via della complessità della geometria o delle condizioni al contorno applicate e quindi tali metodi risultano di difficile diffusione in ambito industriale.

La procedura utilizzata in questo lavoro è stata sviluppata con l'obiettivo di applicare il criterio non locale esteso agli invarianti nell'intero dominio di analisi svincolando perciò il progettista dalla conoscenza o stima a priori di eventuali punti di hot spot.

In questa sezione verranno riassunti i risultati numerici ottenuti sulle geometrie testate sperimentalmente, mediante l'applicazione del modello non locale a gradiente implicito esteso al criterio agli invarianti per la verifica a fatica in presenza di multiassialità tensionali. Nel seguito verrà inoltre presentata la formulazione del criterio multiassiale adottata ed il procedimento utilizzato per la taratura del parametro diffusivo  $c$ .

## 7.2 Equazione del criterio multiassiale

Il criterio per il calcolo della resistenza a fatica è stato ottenuto riformulando l'approccio di piano critico proposto da Lazzarin-Susmel [Susmel 02] in termini di invarianti del tensore degli sforzi. Come risultato dell'applicazione delle ipotesi di Lazzarin-Susmel, la valutazione del limite di fatica è eseguita calcolando il rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$  tra la componente idrostatica e la componente deviatorica del tensore degli sforzi. In accordo con la relazione (3.18), in condizioni di limite di fatica,  $\rho_{FL}$  viene definito da:

$$\rho_{FL} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sigma_{H,max}}{\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}} \quad (7.1)$$

dove  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$  rappresenta il limite di fatica del materiale al variare del rapporto di carico multiassiale. Tale parametro assume valore nullo per sollecitazioni di torsione alterna, a cui corrisponde un limite a fatica pari a  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=0}$ , valore unitario per sollecitazioni di trazione alterna a cui corrisponde un limite a fatica pari a  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=1}$ , ed infine è pari a 2 per

sollecitazioni di trazione a rapporto nullo a cui corrisponde un limite di fatica pari a  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}=2}$ .

Nella tabella seguente vengono riassunti i risultati sperimentali ottenuti sul materiale base dalla campagna di prove condotta in diverse condizioni di carico:

<b>EN3B</b>								
Serie	Nr. provini	D <sub>n</sub> [mm]	R	k	$\sigma_{A,50\%}$ a $1 \cdot 10^6$ cicli	$\sigma_{A,50\%}$ a $2 \cdot 10^6$ cicli	$\tau_{A,50\%}$ a $1 \cdot 10^6$ cicli	$\tau_{A,50\%}$ a $2 \cdot 10^6$ cicli
					[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
Monoassiale	14	5	-1	19.7	345.9	334.0	-	-
Monoassiale	11	5	0	37.4	303.3	297.7	-	-
Torsione	9	5	-1	18.7	-	-	268.3	258.6

Tab. 7.1: Resistenza a fatica del materiale per diverse condizioni di carico

La resistenza a fatica del materiale base, valutata a  $10^6$  e  $2 \cdot 10^6$  cicli, può essere espressa in termini della componente deviatorica equivalente definita dalla (3.17), ricavando il corrispondente valore di  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$ :

<b>EN3B</b>				
Serie	R	$\rho_{FL}$	$\sigma_{d,A} _{\rho_{FL}}$ a $1 \cdot 10^6$ cicli	$\sigma_{d,A} _{\rho_{FL}}$ a $2 \cdot 10^6$ cicli
			[MPa]	[MPa]
Monoassiale	-1	1	199.7	192.8
Monoassiale	0	2	175.1	171.9
Torsione pura	-1	0	268.6	258.6

Tab. 7.2: Resistenza a fatica del materiale in termini della componente deviatorica

Assumendo una variazione di tipo esponenziale del limite di fatica  $\sigma_{d,A}|_{\rho_{FL}}$  rispetto al rapporto di carico multiassiale  $\rho_{FL}$  ed impiegando i limiti di fatica del materiale base, espressi in termini di invarianti tensionali ottenuti per le diverse condizioni di carico, si ottiene, in prima approssimazione, la seguente espressione:

$$\sigma_{d,A}(\rho_{FL})[\text{MPa}] = - \left( 130 \cdot e^{\left( \frac{-0.77}{\rho_{FL} + 0.2} \right)} \right) + 262 \quad (7.2)$$

Tale espressione rappresenta quindi la variazione della resistenza a fatica del materiale base in funzione del rapporto di carico multiassiale valutata a  $2 \cdot 10^6$  cicli.

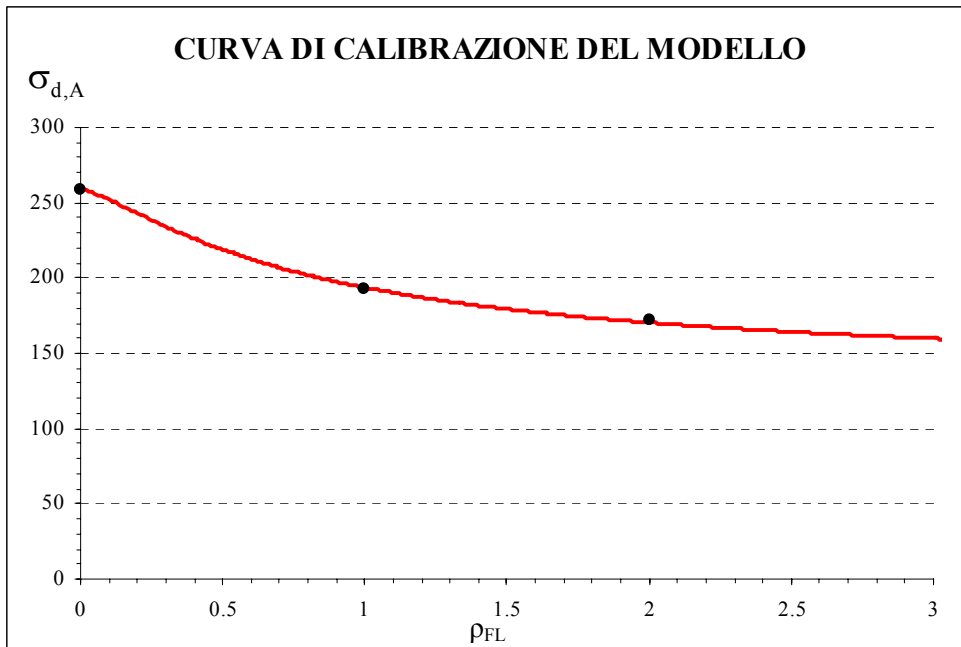


Fig. 7.1: Curva di calibrazione

### 7.3 Taratura del parametro diffusivo $c$

Di fondamentale importanza per l'applicazione del criterio di cedimento non locale è la valutazione del parametro diffusivo  $c$  che moltiplica il termine Laplaciano dell'equazione differenziale (2.28). Tale parametro svolge il ruolo di una lunghezza diffusiva ed è legato all'ampiezza della zona di processo assunta nel modello. Accettando l'ipotesi che  $c$  dipenda solamente dalle proprietà del materiale, in condizioni di carichi affaticanti, la valutazione di tale parametro è basata su un procedimento numerico iterativo utilizzando i dati disponibili per il materiale oggetto dello studio.

I dati necessari alla taratura sono il valore di soglia del fattore di intensificazione degli sforzi per carichi affaticanti,  $\Delta K_{th}$ , stimato per  $R=-1$  ed i limiti di fatica del materiale in varie condizioni di carico e rapporto di sollecitazione.

Partendo dal caso particolare di una cricca sollecitata a modo I, possiamo imporre che la condizione di cedimento:

$$\tilde{\sigma}_{d,a} = \sigma_{d,A} \Big|_{\rho_{FL}} \quad (7.3)$$

sia verificata quando lo Stress Intensity Factor eguaglia il valore di soglia, cioè quando  $\Delta K_I = \Delta K_{th}$

La geometria di riferimento utilizzata nel procedimento di taratura proposto in questo lavoro è una piastra, a spessore non nullo, di dimensioni finite con cricca centrale di lunghezza pari a  $2a$ .

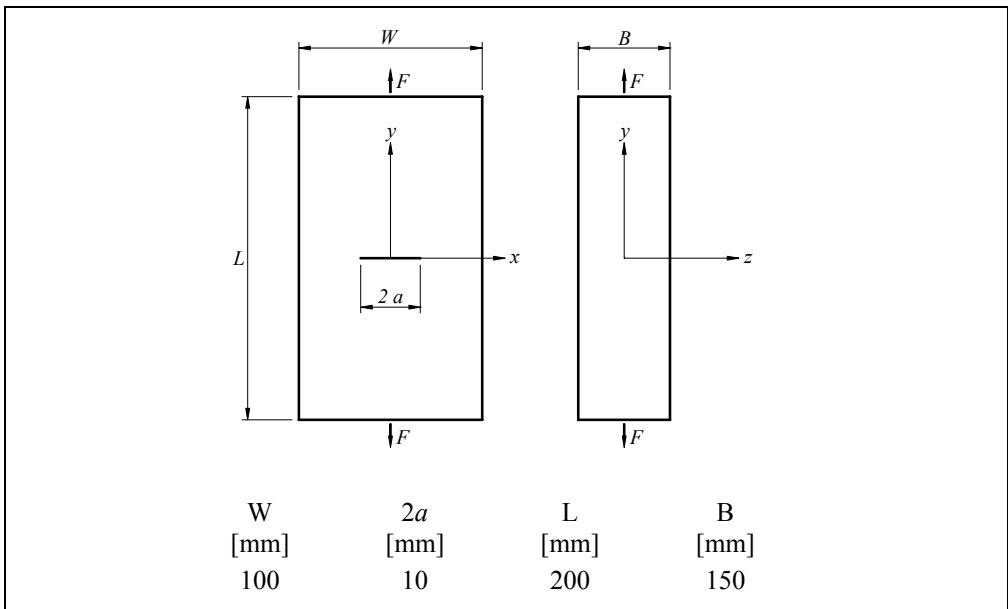


Fig. 7.2: Geometria della cricca 3D

Eguagliando lo Stress Intensity Factor  $\Delta K_I$  con il valore di soglia  $\Delta K_{th}$  otteniamo il valore della tensione nominale con cui eseguire le analisi numeriche:

$$\Delta K_I = y \cdot \sigma_{a,nom} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = \Delta K_{th} \quad (7.4)$$

dalla quale si ottiene  $\sigma_{a,nom} = 50.75\text{MPa}$ .

Nella figura seguente è riportato, sfruttando le simmetrie del problema, il modello e la mesh 3D utilizzati nelle analisi numeriche eseguite per la taratura di  $c$ . Nelle analisi sono stati utilizzati elementi tetraedrici del secondo ordine con dimensione pari a  $0.002\text{mm}$  in corrispondenza dell'apice della cricca e lungo lo spessore della piastra.

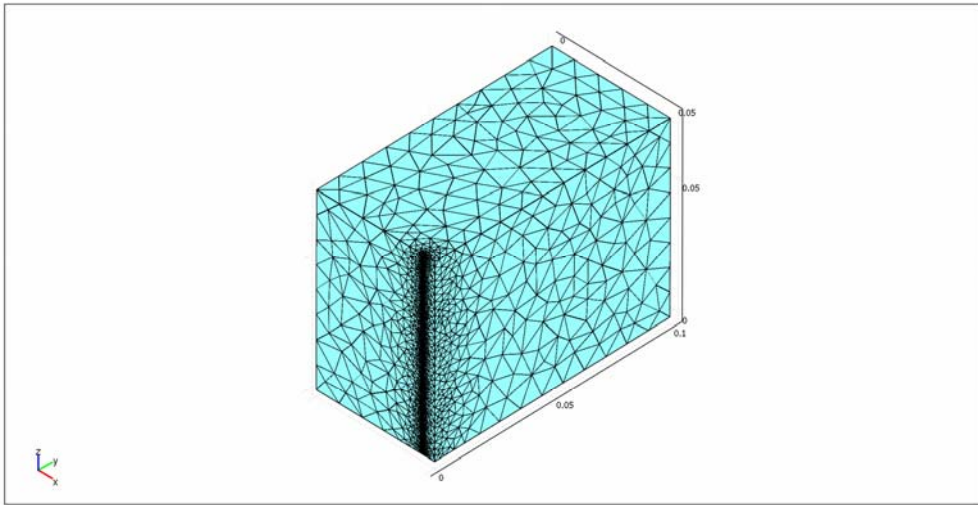


Fig. 7.3: Geometria e mesh utilizzati nella procedura di taratura

Il punto critico è definito come il punto che sperimenta il valore più basso del coefficiente di sicurezza a fatica per vita infinita definito come:

$$\gamma = \frac{\sigma_{d,A} |_{\rho_{FL}}}{\tilde{\sigma}_{d,a}} \quad (7.5)$$

Considerando le ipotesi formulate per il criterio multiassiale, la resistenza a fatica ed il punto critico dipendono dal rapporto di carico multiassiale  $\rho$  e dal coefficiente diffusivo  $c$ , perciò è stata adottata una procedura iterativa per stimare il valore del parametro  $c$  che meglio approssima la condizione di cedimento (7.3) che è equivalente ad ottenere un valore di minimo per  $\gamma$  pari ad 1.

Nella figura seguente viene riportato il valore di  $\gamma_{\min}$  ottenuto dalle analisi numeriche eseguite sul modello tridimensionale di piastra con cricca centrale al variare del parametro  $c$ .

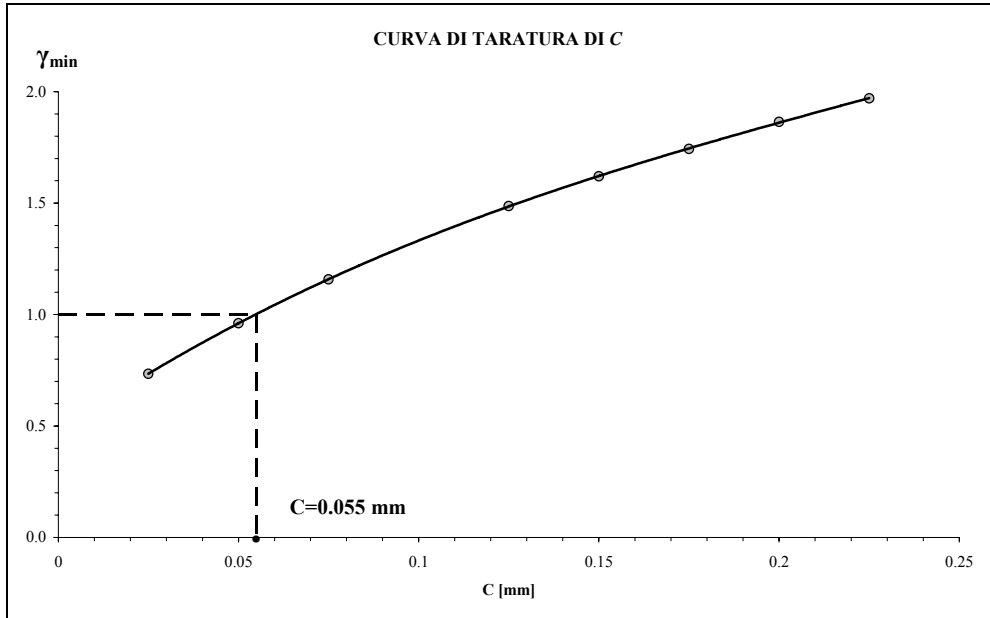


Fig. 7.4: Taratura di  $c$

Il valore di  $c$  ottenuto a convergenza della procedura di taratura risulta di 0.55mm.

Ricordiamo che la (7.4) è valida nell'ipotesi di stato piano di tensione o deformazione e per distanze ridotte dall'apice della cricca.

Nel modello tridimensionale analizzato lo stato di tensionale risulta piano in corrispondenza delle superfici libere mentre spostandosi verso la parte centrale dello spessore si passa ad una stato piano di deformazione.

Nella figura seguente è possibile osservare l'andamento del coefficiente  $\gamma$  lungo lo spessore della piastra ottenuto per il valore di  $c$  stimato a convergenza.

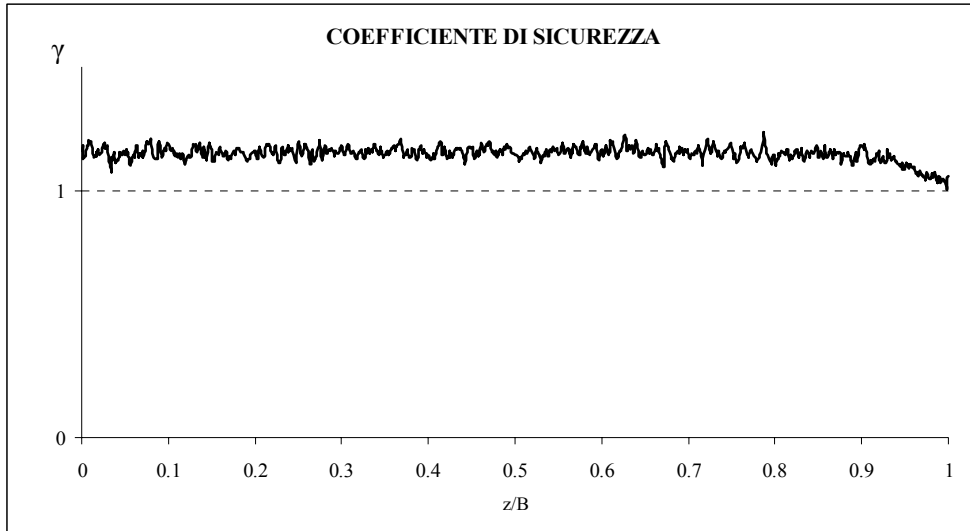


Fig. 7.5: Andamento di  $\gamma_{\min}$  lungo lo spessore della piastra

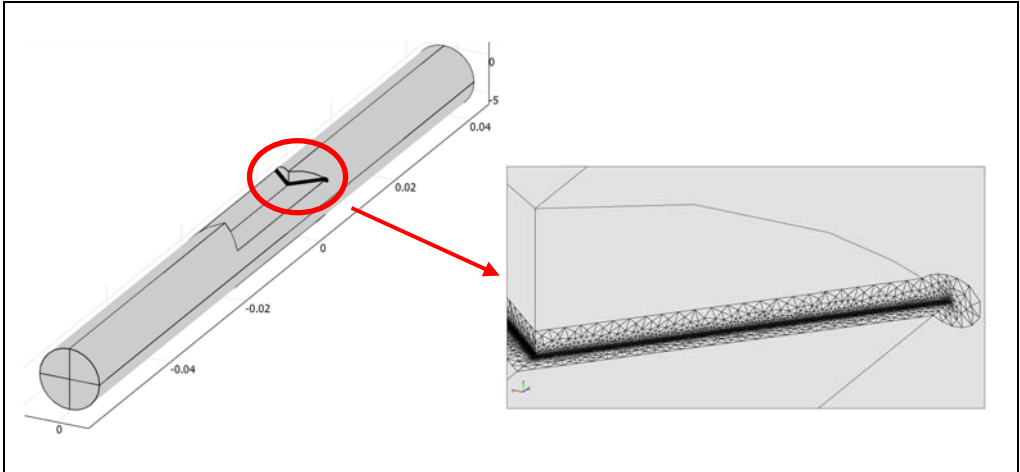
Si può osservare come il valore di  $\gamma_{\min}$  è ottenuto, lungo lo spessore della piastra, in prossimità della superficie, zona in cui vale lo stato piano di tensione.

Tali evidenze risultano in accordo con le ipotesi formulate per il calcolo dello Stress Intensity Factor  $\Delta K_I$ .



## 7.4 Risultati numerici

Le analisi agli elementi finiti sono state condotte utilizzando la tecnica di sub-modelling con lo scopo di poter utilizzare una mesh molto fitta lungo il raccordo di fondo intaglio, zona in cui si sono riscontrati inneschi di cricche (par. 4.2.4).



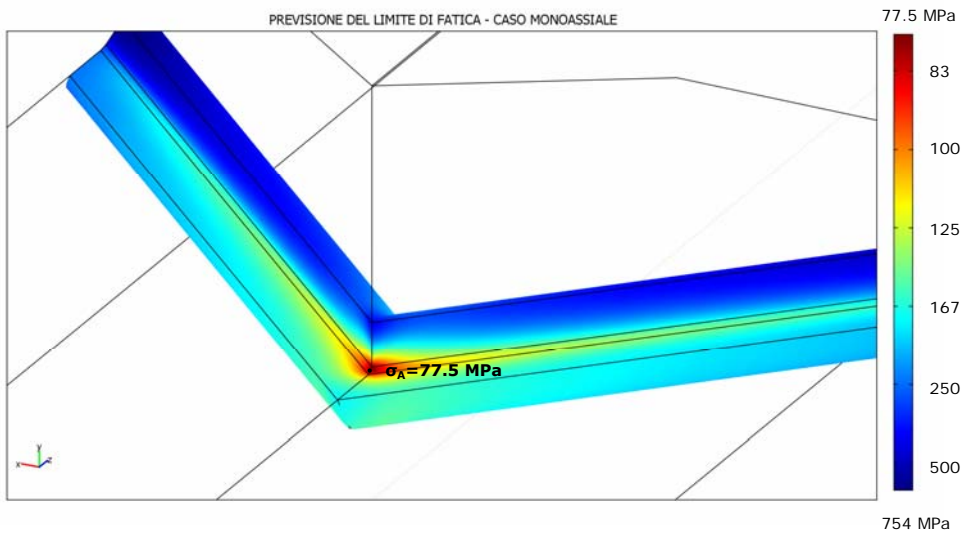
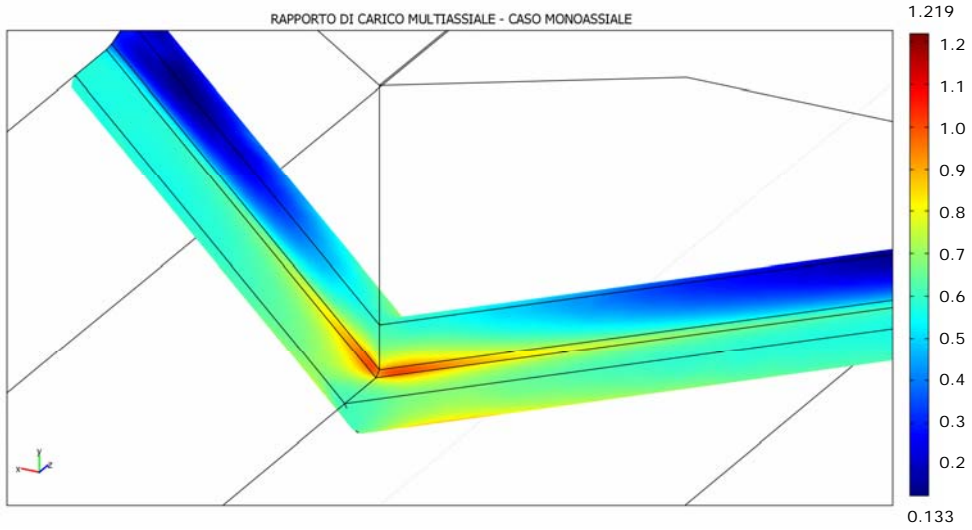
*Fig. 7.6: Sub-modelling utilizzato nelle analisi numeriche*

Nel modello ad elementi finiti sono stati utilizzati elementi tetraedrici del secondo ordine con dimensione della mesh nella zona di fondo intaglio pari a 0.015mm, valore che garantisce la convergenza del modello non locale nella zona di interesse.

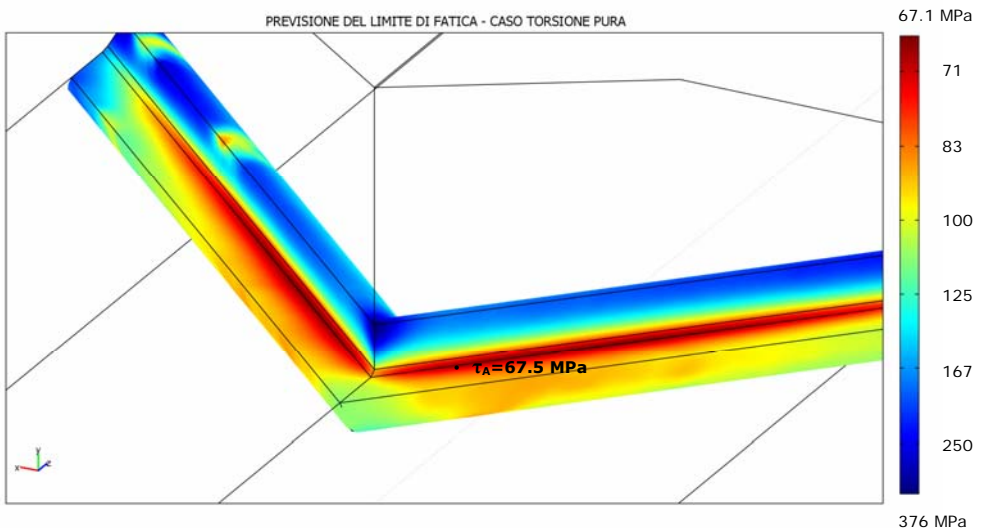
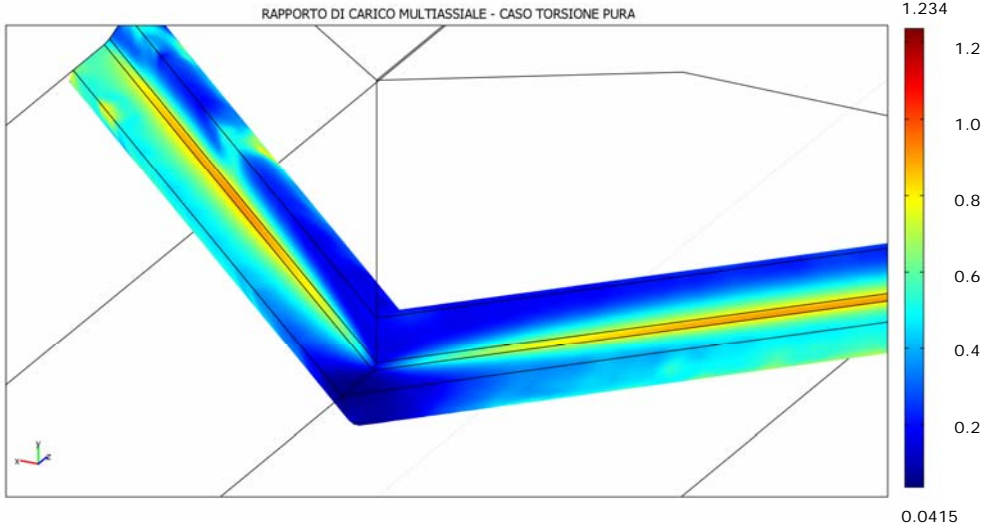
I risultati esposti mostrano quindi il post-processing limitatamente alla regione di sottomodellazione, per la quale verrà presentato il campo relativo all'indice di carico multiassiale e la previsione del limite di fatica localizzando il punto con valore più basso del coefficiente di sicurezza a fatica per vita infinita.

La previsione sulla resistenza a fatica è proposta in termini di ampiezza della tensione normale calcolata sulla sezione lorda coerentemente ai risultati sperimentali (par. 4.2.3).

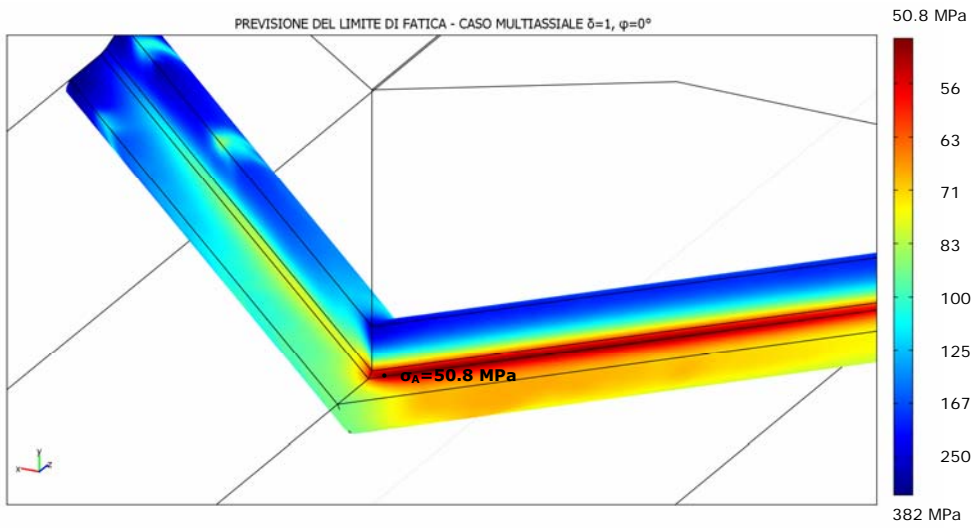
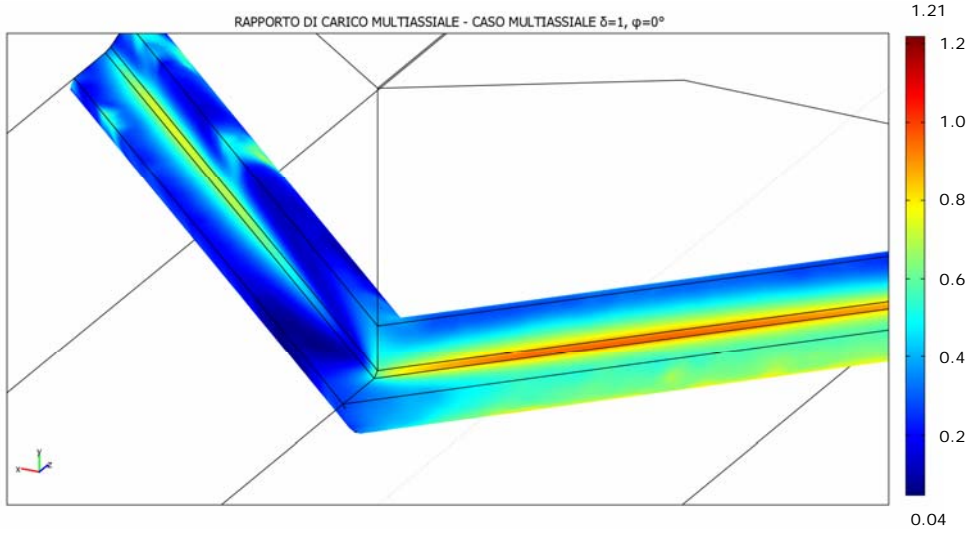
### 7.4.1 Sforzo assiale



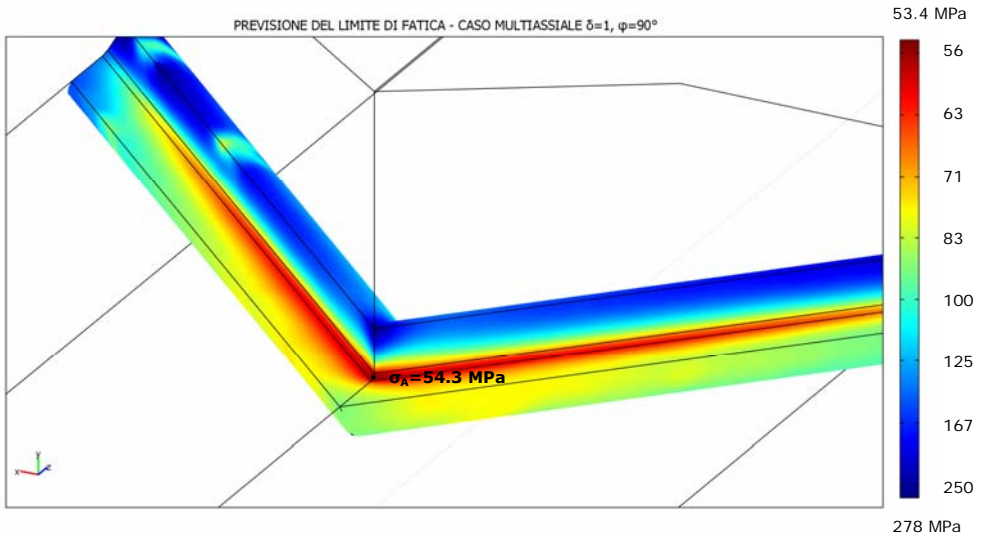
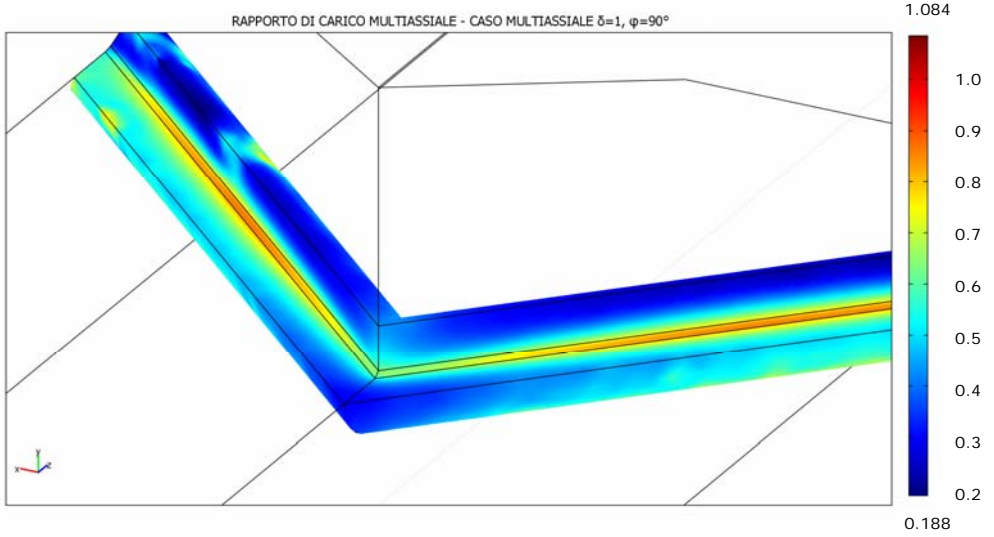
### 7.4.2 Torsione pura



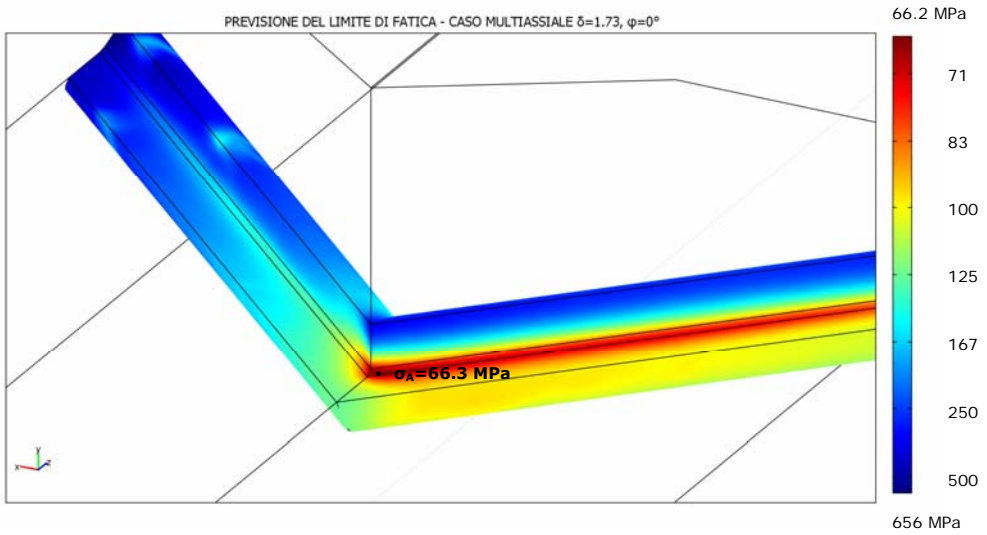
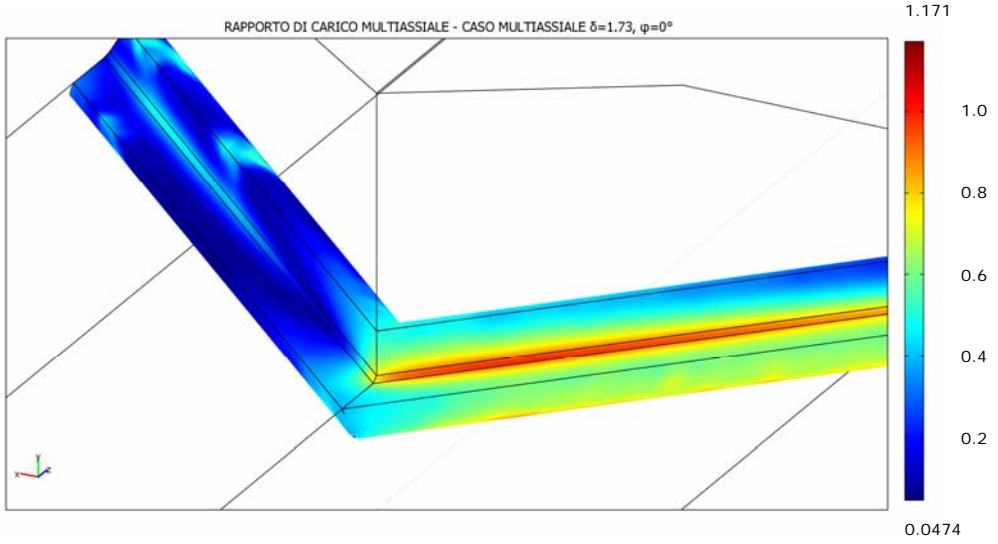
### 7.4.3 Carichi combinati $\delta=1, \varphi=0^\circ$



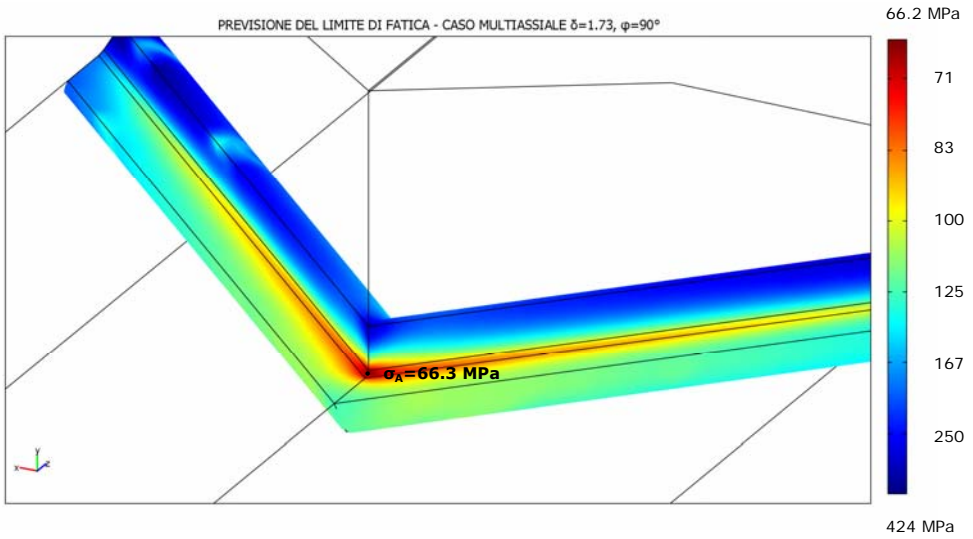
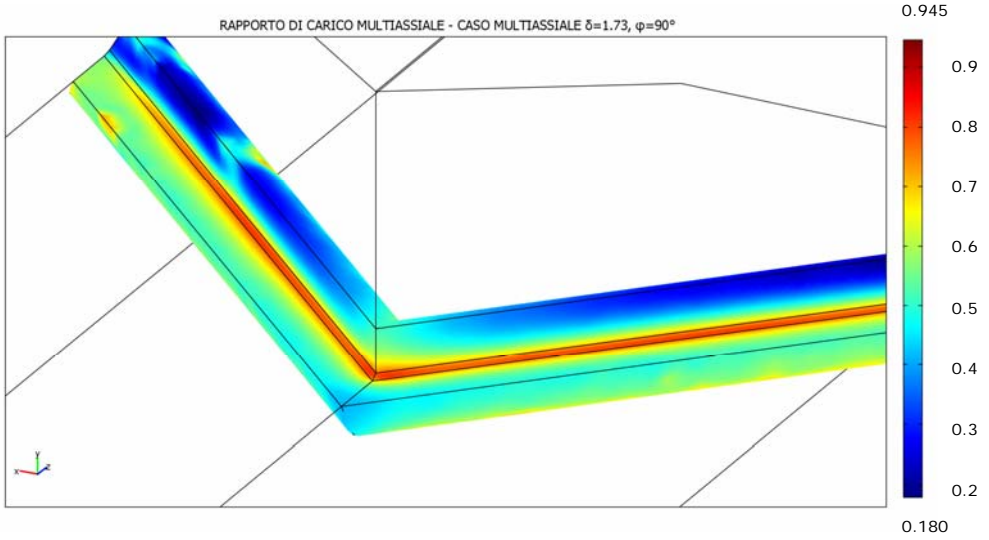
### 7.4.4 Carichi combinati $\delta=1, \varphi=90^\circ$




### 7.4.5 Carichi combinati $\delta=1.73, \varphi=0^\circ$



### 7.4.6 Carichi combinati $\delta=1.73, \varphi=90^\circ$




### 7.4.7 Sintesi dei risultati

GEOMETRIA	CONDIZIONI DI CARICO				RISULTATI SPERIMENTALI		RISULTATI NUMERICI			
	$\sigma_a$ [Mpa]	$\tau_a$ [Mpa]	$\varphi$	R	$\sigma_A$ [Mpa]	$\tau_A$ [Mpa]	$\sigma_A$ [Mpa]	$\tau_A$ [Mpa]	$\rho_{min}$	$\rho_{max}$
	1	0	0°	-1	75.7	–	77.5	–	0.13	1.23
	0	1	0°	-1	–	66.1	–	67.5	0.04	1.23
	1	1	0°	-1	52.7	–	50.8	–	0.05	1.22
	1	1	90°	-1	52.9	–	54.3	–	0.19	1.08
	1.73	1	0°	-1	68.7	–	66.3	–	0.05	1.17
	1.73	1	90°	-1	66.7	–	66.3	–	0.18	0.95

Tab. 7.3: Resistenza a fatica del materiale in termini della componente deviatorica

Per meglio valutare l'accuratezza del metodo adottato è possibile definire un indice di errore  $E(\%)$ , per il quale nel caso di  $E < 0$  la stima risulta non conservativa, al contrario, per  $E > 0$  risulta conservativa:

$$E(\%) = \frac{\sigma_{A,sper} - \sigma_{A,num}}{\sigma_{A,num}} \times 100 \quad (7.6)$$

GEOMETRIA	CONDIZIONI DI CARICO				INDICE DI ERRORE	POSIZIONE DEL PUNTO CRITICO			
	$\sigma_a$ [Mpa]	$\tau_a$ [Mpa]	$\varphi$	R		E(%)	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]
	1	0	0°	-1	-2.3%	0.00	0.00	0.00	0.94
	0	1	0°	-1	-2.1%	0.84	0.00	0.85	0.78
	1	1	0°	-1	3.7%	-0.25	0.00	0.25	0.81
	1	1	90°	-1	-2.6%	-0.00	0.02	0.04	0.64
	1.73	1	0°	-1	3.6%	-0.03	0.01	0.06	0.82
	1.73	1	90°	-1	0.6%	-0.00	0.02	0.04	0.79

Tab. 7.4: Resistenza a fatica del materiale in termini della componente deviatorica



I risultati proposti permettono di trarre le prime considerazioni sull'applicazione del metodo; innanzitutto risulta evidente come l'indice di errore rimane contenuto al variare dell'angolo di fase e rapporto delle componenti di carico esterne applicate, confermando che il modello proposto è sensibile alla variabilità delle condizioni al contorno applicate. Passando infatti da carichi monoassiali a multiassiali, l'indice di errore rimane nell'ordine del 2-3% sia per carichi in fase che fuori fase.

È interessante notare inoltre come il campo di variabilità del rapporto di carico multiassiale, valutato nell'intero dominio (0.04-1.23), rimane compreso nella zona di calibrazione del modello dove sono disponibili i dati sperimentali sul materiale liscio.

Analisi comparative tuttavia, hanno messo in evidenza come l'indice di errore aumenta se nel criterio di taratura vengono usati due punti sperimentali anziché tre o se la curva di taratura viene ottenuta per interpolazione lineare. È chiaro quindi che il procedimento di taratura è un passaggio fondamentale del metodo proposto sottolineando la necessità di poter disporre di dati a fatica sul materiale base in varie condizioni di carico al fine di poter eseguire una accurata calibrazione del criterio multiassiale.

Per quanto riguarda la localizzazione del punto che presenta il valore più basso del limite di fatica e quindi punto in cui si prevede l'insorgere della rottura è confermata la bontà del modello confrontando i risultati delle analisi con le evidenze sperimentali (4.2.4). I risultati numerici mostrano come il punto critico sia stimato in prossimità dell'apice dell'intaglio per i casi monoassiale e multiassiale, mentre per il caso a torsione pura il punto calcolato si sposta lungo il raggio di raccordo di fondo intaglio verso il bordo esterno.

In sintesi quindi si è visto come la procedura proposta per il modello non locale a gradiente implicito esteso ad un approccio basato sugli invarianti tensionali si è dimostrata affidabile per la valutazione del danneggiamento in condizioni di limite di fatica.

Tuttavia la validazione del modello necessita di ulteriori analisi comparative numerico-sperimentali su provini e componenti che presentano variazioni per geometrie d'intaglio o condizioni al contorno.

# CENNI SULLE APPLICAZIONI DEL GRADIENTE IMPLICITO IN CAMPO NON LINEARE

## 8.1 Introduzione

Nei corpi con discontinuità geometriche l'ipotesi di materiale lineare elastico, come ben noto, può portare ad avere campi di tensione singolari. Con riferimento ad un intaglio a V acuto a bordi liberi, il campo di tensione in prossimità dell'apice dell'intaglio può essere descritto se è noto il solo Notch Stress Intensity Factors poiché nelle equazioni di Williams, per materiale lineare elastico, è solamente l'angolo di apertura ad imporre la pendenza del campo di tensione.

È stato predentemente dimostrato (2.2.3) che il metodo del gradiente implicito, applicato di recente alla progettazione meccanica nelle referenze [Tovo 06] e [Tovo 08], è capace di regolarizzare il campo di tensione senza abbandonare lo schema di materiale lineare elastico. L'introduzione di una funzione peso permette di definire una tensione efficace come media pesata di una tensione presa a riferimento in tutto il volume del componente. In questo modo, anche partendo da campi di tensione singolari, si ha la possibilità di definire un massimo tensionale da porre a confronto con un limite del materiale [Capetta 07] [Tovo 06] [Tovo 08].

Abbiamo visto che il problema del calcolo della tensione equivalente non locale  $\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$  può essere trasferito alla risoluzione di una equazione differenziale del secondo ordine [Peerlings 96]. Il calcolo della media pesata in tutto il volume  $V$  del componente, equivale a risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\tilde{\sigma}_{\text{eff}}(\mathbf{x}) \cong \sigma_{\text{eff}}(\mathbf{x}) + c^2 \nabla^2 \tilde{\sigma}_{\text{eff}}(\mathbf{x}) \quad (8.1)$$

dove  $\sigma_{\text{eff}}$  è la tensione equivalente locale ritenuta responsabile del danneggiamento del materiale.

La tensione equivalente presa in esame fino a questo momento, nelle referenze [Capetta 07] [Tovo 07] [Tovo 08] e nei capitoli precedenti per analizzare il comportamento a fatica, considerava sempre come tensione equivalente non locale  $\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$  una tensione derivante da analisi lineari elastiche. Nel seguito, invece, si vuole abbandonare l'ipotesi di materiale lineare elastico per analizzare l'effetto della non linearità del materiale sulla tensione efficace  $\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$ , conservando tuttavia il valore del parametro  $c$  di integrazione calcolato sulla base delle caratteristiche di resistenza a fatica ad alto numero di cicli. Per esempio, nel caso di giunzioni saldate in acciaio il valore di  $c$  è dell'ordine di qualche decimo di millimetro [Tovo 08], perciò sembra lecito porsi il problema se variazioni locali dello stato tensionale in prossimità del piede del cordone di saldatura possono influenzare o meno il valore della tensione efficace. D'altra parte non è detto che qualora si entri pesantemente in campo plastico la grandezza da prendere in esame per il calcolo della vita a fatica sia ancora una tensione.

Applicazioni di modelli agli elementi finiti che risolvono il problema della non-linearità del materiale con il gradiente implicito sono presenti in letteratura da alcuni anni ma sono sempre stati applicati a problemi prevalentemente statici associati a modelli di danneggiamento che degradano l'incrudimento del materiale in modo continuo [Peerlings 08].

L'obiettivo del lavoro è quello di poter studiare la vita a termine dei componenti prendendo in esame l'effetto della non linearità del materiale mantenendo disaccoppiato il problema dell'equilibrio locale e della congruenza del materiale dal problema dell'effetto gradiente. Verranno presentati i primi risultati ottenuti con il gradiente implicito associato ad una non linearità del materiale. Con riferimento al modello di comportamento non lineare introdotto da Hutchinson [Hutchinson 68], Rice e Rosergren [Rice 68] (soluzione HRR), nel seguito del lavoro verranno messe a confronto, in termini di gradiente implicito, le soluzioni ottenute per materiale lineare elastico e quelle derivanti da ipotesi di non linearità del materiale ottenute risolvendo l'equazione implicita (8.1).

Si esamineranno, inoltre, provini con intagli laterali raccordati a  $U$  aventi raggio di raccordo variabile da qualche decimo di millimetro a qualche millimetro. Infine, si mostreranno alcuni esempi di strutture saldate

sollecitate a trazione proponendo il confronto fra il modello lineare elastico ed elastoplastico al variare del numero di cicli di vita a fatica.

## 8.2 Il campo di tensione in prossimità di un intaglio acuto realizzato in materiale non lineare

Negli intagli a V sollecitati a modo I e II, nell'ipotesi di materiale elastoplastico, le equazioni che descrivono il campo tensionale risultano meno maneggevoli rispetto alla soluzione lineare elastica di Williams [Williams 52]. Nella soluzione di Williams, noti i Notch Stress Intensity Factors (NSIF) [Lazzarin 98] dell'intaglio a V è possibile determinare, con precisione al primo ordine, l'andamento delle tensioni e delle deformazioni in prossimità dell'apice dell'intaglio con grado di singolarità che dipende dall'angolo di apertura.

Il problema della non-linearità del materiale nello studio dei campi di tensione indotti da un intaglio acuto a V, è stato proposto da Hutchinson nella referenza [Hutchinson 68] utilizzando una espansione in serie della funzione di Airy. Contemporaneamente, utilizzando il J-integral, Rice e Rosengren [Rice 68] studiarono il grado di singolarità della soluzione non-lineare ottenendo risultati simili ad Hutchinson (soluzione HRR). Con il modello di Hutchinson è possibile risolvere, al primo ordine, il problema elastoplastico imponendo che le deformazioni elastiche siano trascurabili rispetto alle relative deformazioni plastiche ritenute responsabili dello snervamento del materiale. Data la complessità del problema, Hutchinson propose la formulazione in forma chiusa in termini di funzione di Airy, demandando il calcolo delle tensioni ad una risoluzione numerica dell'equazione differenziale ottenuta. Solamente nel caso della cricca, Hutchinson riuscì a pervenire ad alcuni interessanti risultati analitici grazie alla semplificazione dovuta alla particolare geometria. L'aggiunta di altri termini nello sviluppo in serie delle tensioni fu considerato successivamente da vari autori: Li e Wang [Li 86], Xia et al. [Xia 93], Yuan e Lin [Yuan 94], i quali, seguendo la via indicata da Sharma e Aravas [Sharma 91] studiarono l'effetto al secondo ordine dei termini elastici. Una soluzione per materiale nonlineare in termini di costanti di campo denominati Plastic Notch Stress Intensity Factor (pNSIF) fu proposta nella referenza [Lazzarin 01-B] dove i campi di tensione asintotici furono studiati con uno sviluppo in serie fino al secondo ordine finalizzato ad analizzare l'influenza di modo II per angoli di apertura  $2\alpha$  maggiori di  $90^\circ$ . Tuttavia, in

questa prima analisi, considereremo solamente il caso in cui la soluzione di modo I sia dominante sulla distribuzione delle tensioni.

Con riferimento ad un sistema polare con l'origine nel vertice dell'intaglio a V (figura 8.1), le tensioni di modo I in prossimità di un intaglio acuto a V realizzato in materiale non-lineare con legge  $\sigma$ - $\varepsilon$  di Ramberg-Osgood, possono essere scritte nel seguente modo [Lazzarin 01-B]:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_{NP} \cdot r^{-s} \bar{\sigma}_{ij}(\theta) + \dots \quad (8.2)$$

dove  $K_{NP}$  rappresenta il pNSIF dell'intaglio,  $s$  è l'autovalore del campo di tensione determinato dalla soluzione agli autovalori e legato sia all'angolo di apertura dell'intaglio e sia al coefficiente di incrudimento del materiale. Le  $\bar{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta)$  sono invece la parte armonica delle tensioni che, come l'autovalore del campo di tensione dipendono dall'angolo di apertura e dal materiale in esame. Per convenzione, le  $\bar{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta)$  sono state adimensionalizzate imponendo che il valore massimo della tensione  $\bar{\sigma}_e(\theta)$  di Von Mises, in condizione di stato piano di deformazione, sia pari ad uno [Lazzarin 01-B] ( $\bar{\sigma}_{e|_{\max}} = 1$ ).

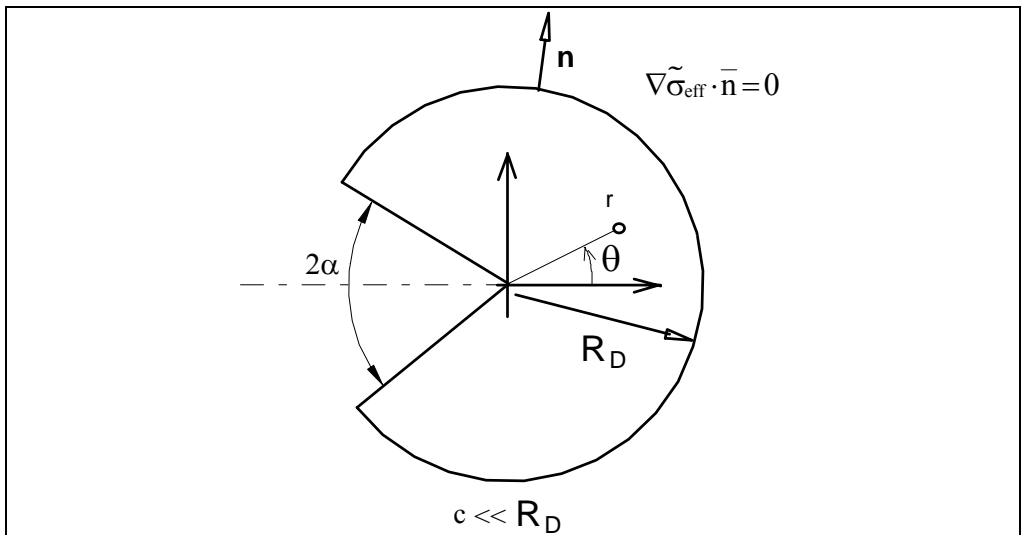


Figura 8.1: Dominio circolare di integrazione per un intaglio acuto a V

### 8.3 Calcolo della tensione efficace con il metodo del gradiente implicito per materiale non lineare

#### 8.3.1 Soluzione analitico-numerica in un dominio circolare

Con riferimento ad un modello di comportamento non lineare del tipo HRR, è possibile risolvere il problema differenziale del gradiente implicito (8.1) con tecniche agli elementi finiti in un dominio di integrazione circolare. Come proposto in [Tovo 06] la (8.1) è risolta imponendo condizioni al bordo di Neumann nell'ipotesi che il parametro di integrazione  $c$  sia piccolo rispetto alla dimensione del raggio  $R_D$  del settore circolare di figura 8.1 preso a riferimento come dominio di integrazione. La procedura di integrazione messa a punto precedentemente può essere adattata al materiale con comportamento non-lineare. Con il metodo del gradiente implicito, al variare del tipo di modello condotto per il materiale, è sufficiente modificare il termine della tensione locale  $\sigma_{\text{eff}}$  che compare a secondo membro della (8.1). Sfruttando le espressioni delle tensioni date dalla (8.2) è possibile omogeneizzare con il gradiente implicito i campi di tensione singolari indotti dall'intaglio acuto nell'ipotesi di materiale elastoplastico. Trattandosi questa volta di campi di tensione derivanti da comportamento non-lineare, l'effetto gradiente nelle tensioni sarà smorzato rispetto al caso lineare elastico, al contrario, le deformazioni risentiranno di un maggiore effetto di omogeneizzazione.

A titolo di esempio la figura (8.2) mostra l'andamento del campo di tensione lungo la bisettrice di un intaglio con l'angolo di apertura di  $120^\circ$  realizzato in acciaio e avente legge  $\sigma$ - $\varepsilon$  di tipo Ramberg Osgood con coefficiente di incrudimento pari a 8.33. In tali condizioni l'autovalore del campo di tensione  $s$  vale 0.0782 [Lazzarin 01-B]. Il confronto di figura (8.2) è fatto per una tensione nominale  $\sigma_{\text{nom}}$  di 200 MPa alla quale corrisponde un  $K_{\text{NP}}$  di circa  $400\text{MPa}\cdot\text{mm}^{0.088}$  (per dettagli si rimanda alla referenza [Lazzarin 01-B]). La figura 8.2 riporta le tensioni  $\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$ , adimensionalizzate rispetto al carico di snervamento  $\sigma_y$ , ottenute assumendo come  $\sigma_{\text{eff}}$  la tensione principale massima calcolata in ipotesi di materiale lineare elastico ed elastoplastico. Risulta evidente che per il materiale non lineare all'apice dell'intaglio si ha un valore finito della tensione ma sensibilmente inferiore rispetto al relativo caso lineare elastico. Ovviamente, i valori delle tensioni efficaci  $\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$  dipendono dal valore del parametro  $c$  assunto per il materiale.

Tuttavia, viste le ipotesi esemplificative assunte nel modello di tipo HRR, i risultati sono attendibili solo all'interno della zona plastica mentre quando ci si allontana dall'apice le tensioni calcolate tendono a differire da quelle che si otterrebbero con tecniche agli elementi finiti.

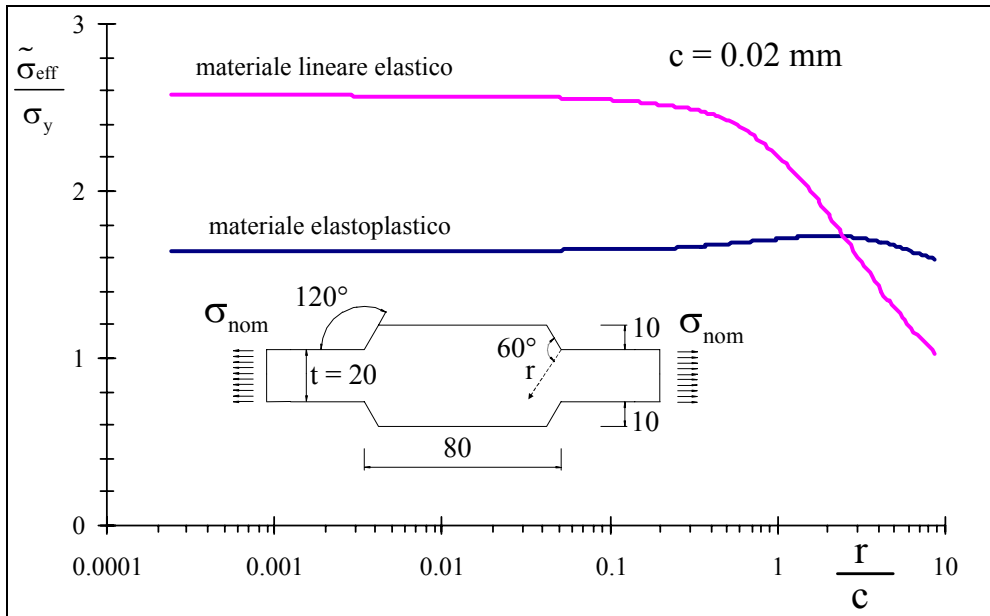


Figura 8.2: Confronto fra le tensioni efficaci lungo la bisettrice di un intaglio a V di  $120^\circ$  sollecitato prevalentemente a modo I

### 8.3.2 Soluzione numerica applicata alle saldature

La risoluzione del gradiente implicito per giunzioni saldate con tecniche agli elementi finiti per materiale a comportamento lineare elastico è già stata affrontata anche per geometrie molto complesse in cui era necessario un modello di tipo tridimensionale [Tovo 08]. La figura 8.3-a mostra un esempio di giunzione tubolare sollecitata a flessione. L'andamento della tensione principale lungo una generatrice del cilindro è singolare al piede del cordone di saldatura come evidenziato in figura 8.3-b. Tuttavia, l'impiego del metodo del gradiente implicito, riesce ad omogeneizzare il campo di tensione lineare elastico anche in corrispondenza della singolarità tensionale come evidenziato in figura 8.3-b. I valori sono normalizzati rispetto al valore massimo della tensione efficace  $\sigma_{eff,max}$  e sono

rappresentati in funzione della distanza  $z$  dal piede del cordone normalizzata rispetto al diametro esterno del tubo  $D$ .

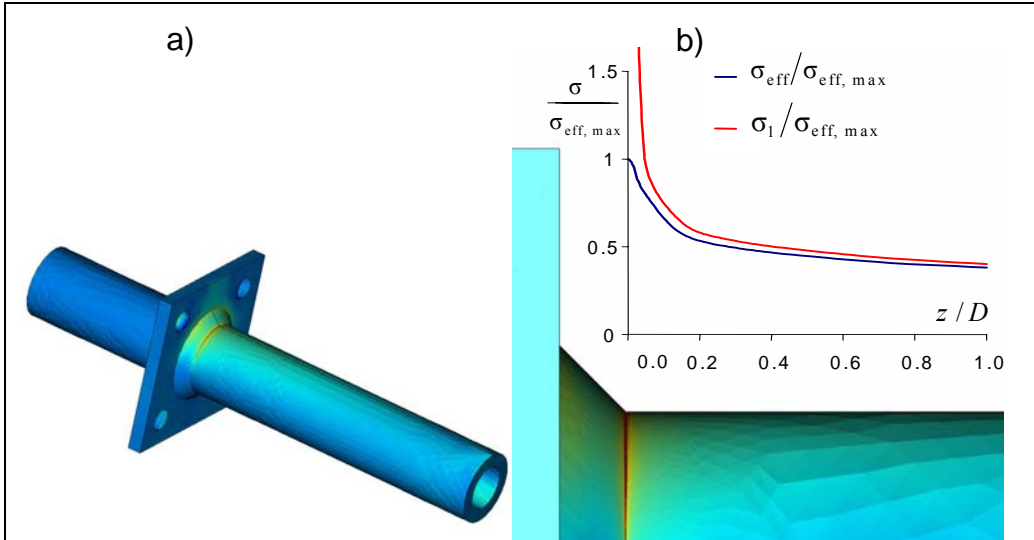


Figura 8.3: Esempio di soluzione ottenuta a partire da un modello tridimensionale di un giunto sollecitato a flessione: a) Modello tridimensionale e soluzione a scale di colori della tensione efficace; b) Andamento della tensione principale massima  $\sigma_1$  e della tensione efficace  $\sigma_{\text{eff}}$  normalizzate, lungo una generatrice esterna del cilindro.

Il passaggio ad uno schema di materiale non-lineare complica l'analisi dello stato tensionale precedente alla soluzione dell'equazione (8.1) mentre la soluzione completamente numerica dell'equazione differenziale di Helmholtz (8.1) può essere ottenuta con codici agli elementi finiti anche per materiale a comportamento non-lineare come fatto in precedenza per materiali lineari elastici [Tovo 08]. In prima approssimazione si è scelto di optare per un materiale a comportamento elastico-perfettamente plastico con tensione di snervamento di Von Mises ed incrudimento isotropo. L'esempio proposto in figura (8.4), considera un giunto a croce realizzato in acciaio da costruzione con carico di snervamento  $\sigma_y$  prossimo a 350 MPa [Gurney 91] ipotizzando che il carico ciclico di snervamento sia pari al doppio di  $\sigma_y$ . Il livello di carico cui si riferisce la simulazione numerica è quello relativo al valore medio per una vita a fatica di  $5 \cdot 10^5$  cicli a cui corrisponde una variazione di tensione nominale sul piatto principale di circa 140 MPa.



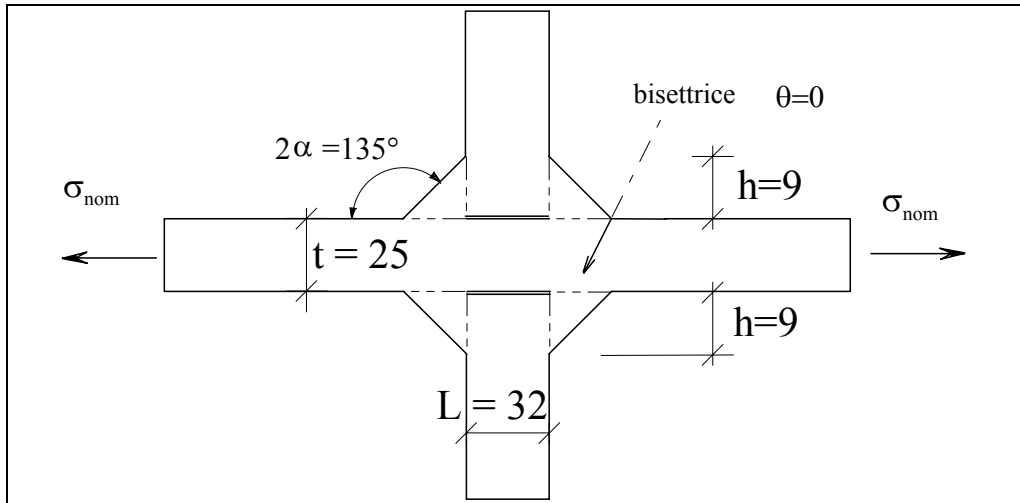


Figura 8.4. Giunzione saldata a croce realizzata in acciaio avente carico di snervamento di circa 350 MPa.

In accordo con la referenza [Tovo 08], il valore di  $c$  per le saldature ad arco in acciaio è di 0.2 mm.

La figura 8.5 riporta i valori della tensione principale massima valutata lungo la bisettrice dell'intaglio per materiale elastico e materiale elastico-perfettamente plastico in condizioni di stato piano di tensione. Lo stato piano di tensione è stato scelto per l'esempio di figura 8.4 allo scopo di esaltare l'effetto della non linearità del materiale. Si può osservare che il valore del raggio plastico evidenziato dall'andamento della tensione principale lungo la bisettrice, ottenuto con materiale a comportamento elastico-perfettamente plastico, è in accordo con il valore analitico approssimato che si può stimare considerando una condizione di rilassamento del materiale nell'intorno dell'apice dell'intaglio. Nell'ipotesi di trascurare l'apporto di modo II al piede cordone, il raggio plastico approssimato  $R_p$  è dato dalla seguente relazione [Lazzarin 00]:

$$R_p = \frac{1}{\lambda_1} \left( \frac{\beta_{1vm} K_I}{\sigma'_y} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}} \quad (8.3)$$

essendo:  $\lambda_1$  il primo autovalore delle equazioni di Williams di Modo I ( $\lambda_1 = 0.673$  per  $2\alpha=135^\circ$ ),  $K_I$  lo Stress Intensity Factors di modo I,  $\sigma'_y$  il carico di snervamento ciclico del materiale mentre  $\beta_{1vm}$  è un parametro legato

all'angolo di apertura del cordone di saldatura e alla direzione considerata. Per un angolo di apertura  $2\alpha=135^\circ$ , posta l'attenzione lungo la bisettrice,  $\beta_{1vm}$  assume il valore di 0.282 nel caso di stato piano di deformazione e 0.370 per stato piano di tensione. Il valore del  $K_1$  da inserire nell'equazione (8.3) per il giunto di figura 4, relativamente ad una vita di  $5 \cdot 10^5$ , è di  $470 \text{ MPa mm}^{0.326}$  che porta ad una stima della zona plastica di circa 0.019 mm in buon accordo con il valore di 0.02 mm dato dall'analisi FEM e verificabile dall'andamento della tensione principale  $\sigma_1$  di figura 8.5.

Relativamente alle tensioni principali omogeneizzate dal gradiente implicito, la figura 8.5 mette in luce che il valore efficace della tensione principale, data la modesta dimensione della zona plastica rispetto alle dimensioni del parametro  $c$ , differisce in modo poco apprezzabile al variare del modello costitutivo del materiale, inoltre, seppur in modo appena percepibile, la trasformata del modello non lineare è inferiore a quello ottenuto con un modello lineare elastico. Simulazioni numeriche fatte a carichi nominali diversi hanno evidenziato che per vite a fatica ad alto numero di cicli la differenza fra i due modelli è difficilmente evidenziabile se non con l'ausilio di mesh estremamente fitte, mentre, per vite a fatica inferiori a  $5 \cdot 10^5$  cicli il divario fra le tensioni effettive tende ad accentuarsi. La figura 8.6 riporta il grafico delle tensioni principali efficaci per un carico relativo ad una durata di  $10^5$  cicli. Il divario fra i due modelli all'interno della zona plastica è dell'ordine del 7% dove la differenza massima è raggiunta al piede del cordone di saldatura. In condizioni di stato piano di deformazione tale differenza scende al 4% accompagnata da una riduzione di  $2/3$  del raggio plastico.

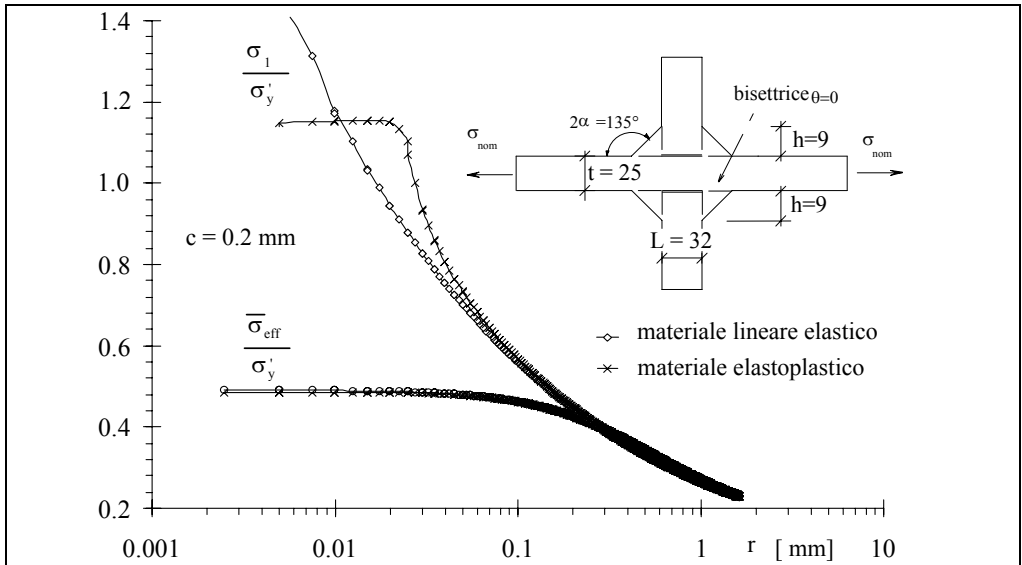


Figura 8.5: Confronto fra le tensioni efficaci lungo la bisettrice della saldatura di figura 8.4 sollecitata a trazione con una tensione nominale che porta ad una durata di  $5 \cdot 10^5$  cicli riferita al 50% della probabilità di rottura ( $\sigma_{nom} = 140$  MPa; stato piano di tensione)

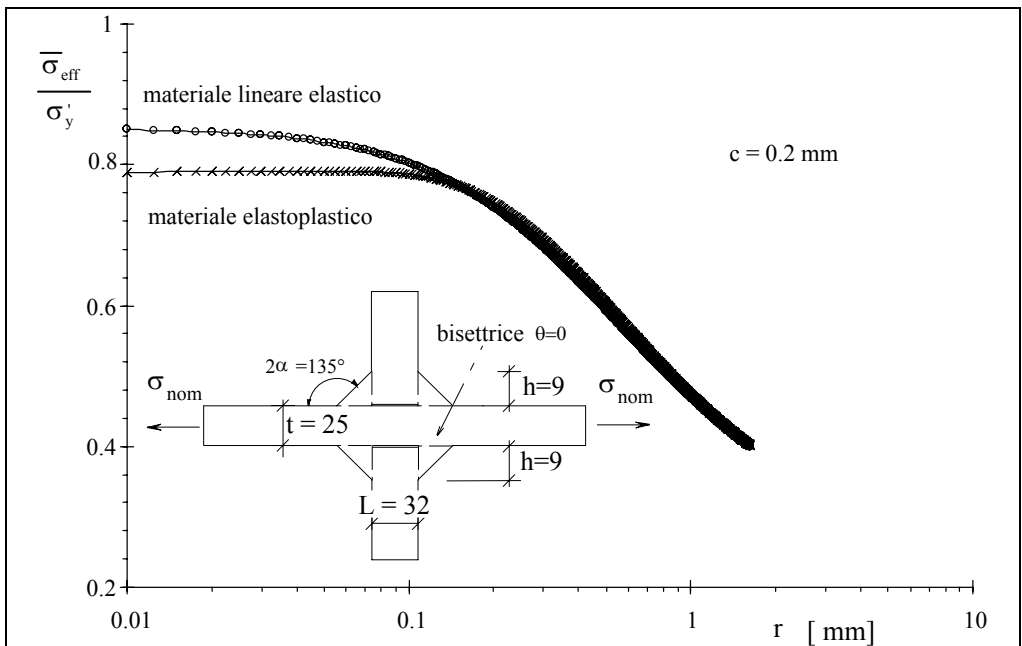


Figura 8.6: Confronto fra le tensioni efficaci lungo la bisettrice della saldatura di figura 8.4 sollecitata a trazione relativamente ad un carico che porta ad una durata a fatica di  $10^5$  cicli riferita al 50% della probabilità di rottura ( $\sigma_{nom} = 243$  MPa; stato piano di tensione)

### 8.3.3 Soluzione numerica per provini con intagli laterali

Nelle referenze [Atzori 92] e [Lazzarin 97] sono stati riportati i risultati sperimentali di prove di fatica di provini piani realizzati in FeP04 sollecitati a rapporto di ciclo costante R pari ad 0.1. Dato il basso valore del carico di snervamento (circa 145 MPa) è semplice verificare che, anche per vite a fatica ad alto e medio numero di cicli, la zona plastica interessa una zona paragonabile alle dimensioni del raggio di raccordo. Il calcolo del gradiente implicito può essere fatto con la medesima procedura di calcolo usata per analizzare la saldatura di figura 8.4.

A rigore, il metodo del gradiente implicito è adatto ad omogeneizzare qualunque grandezza fisica legata al campo tensionale. In generale abbiamo visto nella trattazione matematica generale del modello non locale che la (8.1) può essere scritta nei seguenti termini:

$$\tilde{\zeta}_{\text{eff}} \cong \zeta_{\text{eff}} + c^2 \nabla^2 \tilde{\zeta}_{\text{eff}} \quad (8.4)$$

in cui la grandezza  $\zeta_{\text{eff}}$  è la grandezza da omogeneizzare e calcolata con ipotesi di materiale lineare elastico o elastoplastico,  $\tilde{\zeta}_{\text{eff}}$  risulta la grandezza omogeneizzata dal gradiente implicito definita effettiva ai fini della verifica delle condizioni di sicurezza del componente in esame. Proprio per esaltare l'effetto della non linearità del materiale, con l'equazione (8.4) si è deciso di omogeneizzare la deformazione principale  $\varepsilon_1$  ipotizzando che il parametro di integrazione  $c$  dipenda solamente dal materiale e sia legato alle grandezze fisiche relative alla resistenza a fatica ad alto numero di cicli (limite di fatica del materiale base  $\sigma_A$  e  $\Delta K_{\text{th}}$  di soglia del materiale nelle condizioni nominali di sollecitazione  $R=0.1$ ).

Soluzioni numeriche ed analitiche [Tovo 06] [Tovo 08] hanno evidenziato che  $c$  è legato attraverso una costante di proporzionalità  $z$  alla distanza critica di El-Haddad et al. [El Haddad 79] definita dal limite di fatica del provino liscio  $\sigma_A$  e dal valore di soglia dello Stress Intensity Factor  $\Delta K_{\text{th}}$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{\text{th}}}{\Delta \sigma_A} \right)^2 \quad (8.5)$$

In un caso generale, noto  $a_0$ , risulta immediato il calcolo di  $c$  in relazione alla tensione equivalente assunta. La relazione fra  $a_0$  e  $c$  può essere scritta in modo relativamente semplice [Tovo 06]:

$$c = z a_0$$

Per la deformazione principale in stato piano di deformazione,  $z$  è di 0.43, che sulla base dei parametri riportati in [Atzori 92] e [Lazzarin 97] porta ad un valore di  $c$  pari a circa 0.19 mm.

La figura 8.7 evidenzia il rapporto fra la  $\tilde{\zeta}_{\text{eff}}$  ottenuta con un modello a comportamento non-lineare e quella relativa ad un comportamento lineare elastico  $\tilde{\zeta}_{\text{eff,el}}$ . Il confronto è limitato alla bisettrice di due intagli laterali presi a riferimento; la prima geometria presenta un intaglio ad U con raggio di fondo intaglio di 1.25 mm, mentre, la seconda geometria di riferimento presenta un intaglio acuto a V con apertura di  $90^\circ$  e raggio di fondo intaglio di circa 0.2 mm. Le analisi numeriche hanno evidenziato che tale rapporto dipende dalla vita a fatica e ciò consente, in linea teorica di modificare la pendenza della curva di Woehler in funzione del carico applicato. Allo stato attuale, la scelta più opportuna del parametro  $\tilde{\zeta}_{\text{eff}}$  da porre in relazione con la durata del componente nel campo della vita a termine è ancora in via di definizione. Ovviamente, tale parametro non deve contraddire quanto prevedibile con un modello lineare elastico qualora le dimensioni della zona plastica siano trascurabili rispetto al parametro  $c$  del materiale come avviene, per esempio, nelle saldature per vite a fatica maggiori di  $10^4$  cicli.

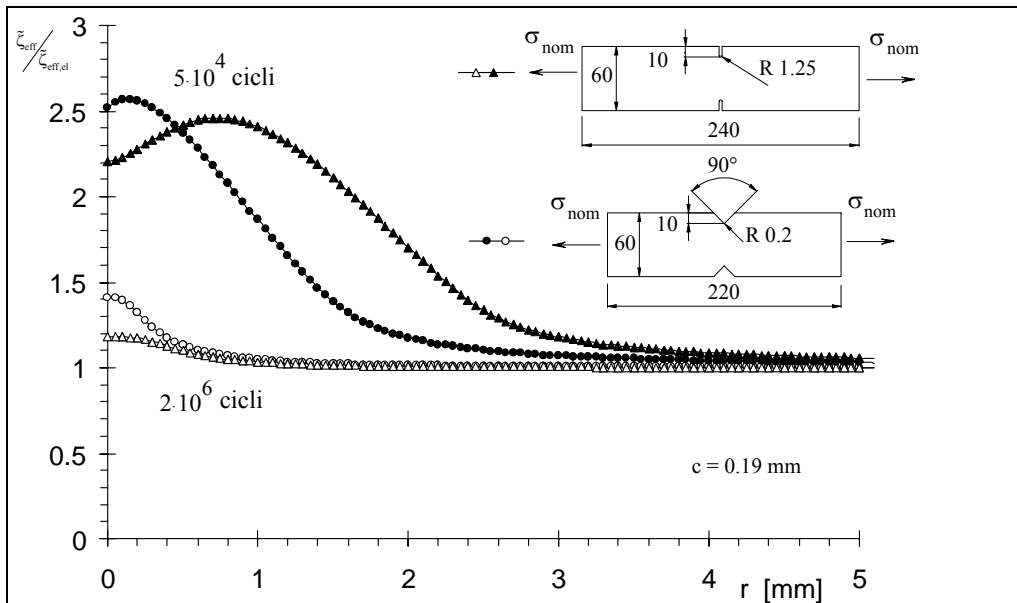


Figura 8.7: Rapporto fra le deformazioni principali ottenute con il gradiente implicito per materiale bilineare  $\tilde{\zeta}_{\text{eff}}$  (carico di snervamento di 145 MPa e modulo tangente di 5 GPa) e materiale lineare elastico  $\tilde{\zeta}_{\text{eff,el}}$ . Il confronto è fatto lungo la bisettrice dell'intaglio per una vita a fatica di  $5 \cdot 10^4$  e  $2 \cdot 10^6$  cicli riferita al 50% di probabilità di sopravvivenza (analisi in stato piano di tensione).

A parità di condizioni di vincolo e di carico, si è riscontrato che il passaggio dallo schema di calcolo lineare elastico ad uno schema di tipo elastoplastico porta ad una riduzione della tensione efficace principale valutata con il metodo del gradiente implicito. Per le giunzioni saldate tale abbassamento è dell'ordine del 7% per carichi che comportano una vita a fatica di circa  $5 \cdot 10^5$  cicli in condizioni di stato piano di tensione. Il valore della tensione efficace dipende in modo sensibile dal rapporto fra il parametro di integrazione  $c$ , presente nell'equazione di Helmholtz del gradiente implicito e le dimensioni della zona plasticizzata. Inoltre, si è verificato che per provini intagliati ad U, presa come grandezza di riferimento la deformazione principale, il rapporto fra le grandezze trasformate non rimane costante in funzione del carico applicato e ciò potrebbe consentire di variare la pendenza della curva di Woehler nel campo della vita a termine.

## **CONSIDERAZIONI FINALI**

Il lavoro di tesi ha affrontato una parte delle varie problematiche ed aspetti che coinvolgono la progettazione a fatica di componenti meccanici. Tuttavia si è cercato di proporre un metodo di calcolo flessibile ed applicabile ad un'ampia gamma di casi pratici, potendo considerare elementi strutturali indipendentemente dalla loro complessità geometrica, caratterizzati da intagli acuti e condizioni di carico multiassiali sia in fase che in presenza di sfasamento tra le componenti di carico.

Il lavoro si proponeva di fornire un metodo di calcolo nella progettazione a fatica dei componenti meccanici che andasse in contro alle esigenze del settore industriale dove i tempi di produzione ristretti si contrappongono a complessità di calcolo notevoli. In tale settore è ormai diffusa la modellazione solida degli elementi strutturali e il calcolo tensionale in campo elastico mediante tecniche agli elementi finiti. La metodologia proposta, che utilizza tali tecniche, offre inoltre la possibilità al progettista di svincolarsi dalla conoscenza o stima a priori dei punti critici per la resistenza a fatica del componente fornendo un coefficiente di sicurezza a fatica in ogni punto del dominio.

Oltre agli aspetti puramente teorici il lavoro ha dato la possibilità, in fase sperimentale, di osservare che nelle indagini a fatica è indispensabile poter definire un criterio di cedimento sensibile all'innesco di cricche propaganti. Nel caso dei test a torsione e multiassiali infatti possono verificarsi fenomeni dissipativi fra le superficie a contatto delle cricche, creando così una forte dipendenza fra geometria della provetta e risultati dei test in quanto, in tali casi, la fase di propagazione può estendersi fino al 30% della vita del provino prima di giungere a completa rottura. La definizione di un criterio di cedimento basato sulla rigidità torsionale ha permesso di

valutare il comportamento a fatica dei provini nella fase iniziale di propagazione delle cricche.

Dal confronto tra i dati sperimentali e le analisi numeriche risulta evidente come l'indice di errore rimane contenuto al variare dell'angolo di fase e rapporto delle componenti di carico esterne applicate, confermando che il modello proposto è sensibile alla variabilità delle condizioni al contorno applicate.

In sintesi quindi si è visto come la procedura proposta per il modello non locale a gradiente implicito esteso ad un approccio basato sugli invarianti tensionali si è dimostrata affidabile e con buona approssimazione per la valutazione del danneggiamento in condizioni di limite di fatica.

In fase di calibrazione del criterio multiassiale tuttavia, alcune analisi comparative hanno messo in evidenza come l'indice di errore aumenta se nel criterio di taratura vengono usate differenti curve di interpolazione dei dati sperimentali relativi al limite di fatica del materiale o se vengono utilizzati i limiti di fatica per due condizioni di carico anziché tre.

In ultima analisi, è opinione dell'autore che la taratura del criterio multiassiale svolge un ruolo fondamentale per ottenere previsioni a fatica affidabili ed accurate quando le condizioni di carico, valutate localmente, sono caratterizzate da una forte variabilità del rapporto di carico multiassiale. È consigliabile perciò, in fase di calibrazione, poter disporre delle proprietà a fatica del materiale in almeno tre diverse condizioni di carico.

In tale prospettiva la validazione del modello necessita di ulteriori analisi comparative numerico-sperimentali su provini e componenti che presentano variazioni per geometrie d'intaglio o condizioni al contorno.



# BIBLIOGRAFIA

- [Atzori 92] Atzori B., Lazzarin P., Tovo R., *Evaluation of the fatigue strength of a deep drawing steel*. Österreichische Ingenieur und Architekten Zeitschrift (ÖIAZ), Jg. 137, 1992; 11:556-561.
- [Atzori 94] Atzori B., Tovo R., *Evaluation of the local strength for fatigue design*. Österreichische Ingenieur und Architekten Zeitschrift (ÖIAZ), Sonderheft 7/A, 1994.
- [Atzori 00] Atzori B., Lazzarin P., *Analisi delle problematiche connesse con la valutazione numerica della resistenza a fatica*. XXIX Convegno nazionale AIAS, Lucca – Settembre 2000.
- [Bažant 87] Bažant Z., *Why continuum damage is nonlocal: justification by quasiperiodic microcrack array*. Mech Res Commun 1987; 14:407-419.
- [Bellett 02] Bellett D., Taylor D., *The effect of crack shape on the fatigue assessment of three-dimensional stress concentrations*. In FATIGUE 2002, Birmingham, UK: EMAS 2002; 2767-74.
- [Bellett 05] Bellett D., Taylor D., Marco S., Mazzeo E., Guillois J., Pircher T., *The fatigue behaviour of three-dimensional stress concentrations*. Int J Fatigue 2005; 27:207-221.
- [Benasciutti 05-A] Benasciutti D., Tovo R., *Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes*. Int J Fatigue 2005; 27:867-877.

- [Benasciutti 05-B] Benasciutti D., Tovo R., *Cycle distribution and fatigue damage assessment in broad-band non-Gaussian random processes*. Probabilistic Engineering Mechanics 2005; 20:115-127.
- [Benvenuti 04] Benvenuti E., Loret B., Tralli A., *A unified multifield formulation in nonlocal damage*. Eur J Mech A/Solids 2004; 23:539-559.
- [Bishop 00] Bishop J. E., *Characterizing the non-proportional and out-of-phase extent of tensor paths*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 2000; 23:1019-1032.
- [Brown 73] Brown M. W., Miller K. J., *A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions*. Proc Inst Mech Engrs 187, 754-755.
- [Capetta 07] Capetta S., Cristofori A., Livieri P., Tovo R., *Il metodo del gradiente implicito nella previsione della resistenza a fatica nei giunti saldati*. XXXIV Convegno nazionale AIAS; 137-138, 2007.
- [Carpinteri 99-A] Carpinteri A., Brighenti R., Macha E., Spagnoli A., *Expected principal stress directions under multiaxial random loading. Part I: theoretical aspects of the weight function method*. Int J Fatigue 1999; 21:83-88.
- [Carpinteri 99-B] Carpinteri A., Brighenti R., Macha E., Spagnoli A., *Expected principal stress directions under multiaxial random loading. Part II: numerical simulation and experimental assessment through the weight function method*. Int J Fatigue 1999; 21:89-96.
- [Carpinteri 01] Carpinteri A., Spagnoli A., *Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals*. Int J Fatigue 2001; 23:135-145.

- [Ciarlet 88] Ciarlet PG., *Mathematical elasticity, vol 1: three dimensional elasticity*. North-Holland, 1988.
- [Comsol<sup>®</sup> 07\_a] Comsol Multiphysics<sup>®</sup>, *Modeling guide*. Version 3.4-2007; pp.:238-280.
- [Comsol<sup>®</sup> 07\_b] Comsol Multiphysics<sup>®</sup>, *Scripting guide*. Version 3.4-2007; pp.:10-73.
- [Cristofori 07] Cristofori A., *A new perspective in multiaxial fatigue damage estimation*. PhD thesis, Department of Engineering, University of Ferrara, March 2007.
- [Cristofori 08] Cristofori A., Susmel L., Tovo R., *A stress invariant based criterion to estimate fatigue damage under multiaxial loading*. Int J Fatigue 2008; 30:1646-1658.
- [Crossland 56] Crossland B., *Effect of large hydroscopic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel*. In: Proceedings of international conference on fatigue of metals, London, NewYork, 1956; pp. 138-149.
- [Dang Van 93] Dang Van K., *Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue*. In: *Advance in Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 1191, (Edited by D. L. McDowell and R. Ellis). American Society for Testing and Materials, Philadelphia 1993; 120-130.
- [De Borst 92] De Borst R., Mühlhaus HB., *Gradient dependent plasticity: formulation and algorithmic aspect*. Int J Number Methods Eng 1992; 35:521-539.
- [Deperrois 91] Deperrois A., *Sur le calcul de limites d'endurance des aciers*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Paris, France, juin 1991.

- [El Haddad 79] El Haddad M.H., Topper T.H., Smith, K.N., *Fatigue crack propagation of short cracks*. ASME, Journal of engineering Material and Technology 1979; 101:42-45.
- [Ellyin 91] Ellyin F., Golos K., Xia Z., *In-phase and out-of-phase multiaxial fatigue*. Trans. ASME, Engng Mater Technol 1991; 113:112-118.
- [Ellyin 93] Ellyin F., Xia Z., *A general fatigue theory and its application to out-of-phase cyclic loading*. Trans. ASME, Engng Mater Technol 1993; 115:411-416.
- [Eringen 72] Eringen CA, Edelen DGB, *On nonlocal elasticity*. Int J Eng Sci 1972; 10:233-248.
- [Fatemi 88] Fatemi A. Socie D. F., *A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1988; 11:149-165.
- [Fenner 51] Fenner A.J., Owen N.B., Phillips C.E., *A note on the fatigue crack regarded as a stress raiser*. Engineering 1951; 171:163.
- [Findley 59] Findley WN., *A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending*. Trans ASME, J Eng Ind 1959; 301-306.
- [Frost 57] Frost N.E., *Non-propagating cracks in Vee-notched specimens subject to fatigue loading*. The aeronautical quarterly 1957; 8:1-20.
- [Frost 59] Frost N.E., *A relation between the critical alternating propagation stress and crack length for mild steel*. Proc Instn Mech Engrs 1959; 173:811-827.
- [Frost 74] Frost N.E., Marsh K.J., Pook L.P., *Metal Fatigue*. Oxford University Press 1974; Oxford.

- [Glinka 87] Glinka G., Newport A., *Universal features of elastic notch-tip stress fields*. Int J Fatigue 1987; 9:143-150.
- [Gonçalves 05] Goncalves CA, Araujo JA, Mamiya EN, *Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals*. Int J Fatigue 2005; 177-187.
- [Gross 72] Gross B., Mendelson A., *Plane elastostatic analysis of V-notched plates*. International Journal of Fracture Mechanics 1972; 8:267-276.
- [Gurney 91] Gurney TR., *The fatigue strength of transverse fillet welded joints*. Abington Publishing, Abington, Cambridge, 1991.
- [Hutchinson 68] Hutchinson J.W., *Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1968; 16:13-31.
- [Kenmeugne 96] Kenmeugne B., Vidal-Salle E., Robert JL., Bahuau RJ., *On a new multiaxial fatigue criterion based on a selective integration approach*. In: Fatigue '96, Proc. of the Sixth Int. Fatigue Congress, Vol. II. Red. G. Lütjering, Berlin, Pergamon 1996; 1013-1018.
- [Kirsch 98] Kirsch G., *Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre*. V.D.I., 1898, Vol. 42.
- [Kolossoff 09] Kolossoff G.V., *On an application of complex function theory to a plane problem of the mathematicall theory of elasticity*. Yuriev, 1909.
- [Kueppers 06] Kueppers M., Sonsino C.M., *Assessment of the fatigue behaviour of welded aluminium joints under multiaxial spectrum loading by a critical plane approach*. Int J Fatigue 2006; 28:540-546.

- [Łagoda 96] Łagoda T., Macha E., Dragon A., Petit J., *Influence of correlation between stresses on calculated fatigue life of machine elements*. Int J Fatigue 1996; 8:547-555.
- [Lazzarin 96] Lazzarin P., Tovo R., *A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighbourhood of cracks and notches*. International Journal of Fracture 1996; 78:3-19.
- [Lazzarin 97] Lazzarin P., Tovo R., Meneghetti G., *Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity*. International Journal of Fatigue 1997; 19:647-665.
- [Lazzarin 98] Lazzarin P., Tovo R., *A notch stress intensity approach to the stress analysis of welds*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1998; 21:1098-1104.
- [Lazzarin 00] Lazzarin P., Livieri P., *Dimensione della zona plastica al piede dei cordoni in giunti saldati in acciaio e lega leggera*. Rivista italiana della saldatura, 2000; 431-437.
- [Lazzarin 01-A] Lazzarin P., Zambardi R., *A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behaviour of components with sharp V-shaped notches*. Int J Fract 2001; 112:275-298.
- [Lazzarin 01-B] Lazzarin P., Zambardi R., Livieri P., *Plastic Notch Stress Intensity Factors for Large V-Shaped Notches under Mixed Load Conditions*. International Journal of Fracture 2001; 107:361-377.
- [Lemaitre 90] Lemaitre J., Chaboche JL. *Mechanics of Solids Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Li 86] Li Y.C., Wang T.C., *Scientia Sinica* A29, 941, 1986.

- [Li 02] Li B., De Freitas M., *A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading*. Journal of Mechanical Design 2002; 124:558-563.
- [Matake 77] Matake T., *An explanation on fatigue limit under combined stress*. Bulletin of JSME 1977; 20:257-263.
- [McDiarmid 87] McDiarmid DL., *Fatigue under out-of-phase bending and torsion*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1987; 9:457-475.
- [McDiarmid 91] McDiarmid DL., *A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1991; 4:429-453.
- [McDiarmid 94] McDiarmid DL., *A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1994; 12:1475-1484.
- [Miller 93] Miller K.J., *The two thresholds of fatigue behaviour*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1993; 16:931-939.
- [Morel 98] Morel F., *A fatigue life prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1998; 21:241-256.
- [Muskhelishvili 53] Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff-Groningen, 1953.
- [Neuber 58] Neuber H., *Theory of notch stresses*. Springer-Verlag, Berlino 1958.
- [Neuber 68] Neuber H., *Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen*. Konstruktion 1968; 20:245-251.

- [Papadopoulos 93] Papadopoulos I.V., *Fatigue limit of metals under multiaxial stress conditions: the microscopic approach*. Technical Note No. I.93.101, Commission of the European Communities, Joint Research Centre, ISEI/IE 2495/93.
- [Papadopoulos 97-A] Papadopoulos I.V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A., *A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals*. International Journal of Fatigue 1997; 19:219-235.
- [Papadopoulos 97-B] Papadopoulos I.V., *Exploring the high-cycle fatigue behaviour of metals from the mesoscopic scale*. In: Notes of the CISM Seminar, Udine, Italy, 1997.
- [Papadopoulos 98] Papadopoulos I.V., *Critical Plane Approaches in High-Cycle Fatigue: on the Definition of the Amplitude and Mean Value of the Shear Stress Acting on the Critical Plane*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1998; 21:269-285.
- [Peerlings 96] Peerlings RHJ, de Borst R., Brekelmans WAM, de Vree JHP, *Gradient enhanced damage for quasibrittle material*. Int J Number Methods Eng 1996; 39:3391-3403.
- [Peerlings 99] Peerlings RHJ, *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Ph.D. Dissertation 1999; T.U. Eindhoven.
- [Peerlings 08] Peerlings RHJ, Mediavilla J., Engelen A.B., Geers M.G.D., *Towards a micromechanics-based modelling of damage development during the forming of food-can lids*. Eng Fract Mech 2008; 75:3294-3305.
- [Peterson 59] Peterson R.E., *Notch sensitivity*. In: Sines G, Waisman JL, editors. Metal fatigue. New York: McGraw Hill 1959; 293-306.



- [Peterson 73] Peterson R.E., *Stress concentration factors*. John Wiley & Sons, 1973.
- [Picu 02] Picu R.C., *On the functional form of non-local elasticity kernels*. J Mech Phys Solids 2002; 50:1923-1939.
- [Pijaudier-Cabot 87] Pijaudier-Cabot G., Bažant ZP., *Nonlocal damage theory*. J Eng Mech 1987; 10:1512-1533.
- [Pilkey 93] Pilkey W.D., Wunderlich W., *Mechanics of structures, Variational and computational methods*. CRC Press, 1993.
- [Polizzotto 01] Polizzotto C., *Non-local elasticity and related variational principles*. Int J Solids Struct 2001; 38:7359-7380.
- [Rice 68] Rice J.R., Rosengren G.F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1968; 16:1-12.
- [Seweryn 95] Seweryn A., Mroz Z., *A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading*. Eng Fract Mech 1995; 51:955-973.
- [Sharma 91] Sharma S.M., Aravas N., *Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1991; 39:1043-1072.
- [Smith 78] Smith R.A., Miller K.J., *Prediction of fatigue regimes in nothed components*. Int J Mechanical Sciences 1978; 20:201-206.
- [Socie 87] Socie D. F., *Multiaxial fatigue damage models*. Trans. ASME Engng Mater Technol 1987; 109:293-298.

- [Susmel 02] Susmel L., Lazzarin P., *A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 2002; 25:63-78.
- [Susmel 03] Susmel L., Taylor D., *Two methods for predicting the multiaxial fatigue limits of sharp notches*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 2003; 26:821-833.
- [Susmel 07] Susmel L., Taylor D., *A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 2007; 30:567-581.
- [Susmel 08] Susmel L., Taylor D., *The modified wöhler curve method applied along with the theory of critical distances to estimate finite life of notched components subjected to complex multiaxial loading paths*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 2008; 31:1047-1064.
- [Tanaka 83] Tanaka K., *Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches*. Int J Fract 1983; 22:39-45.
- [Taylor 94] Taylor D., O'Donnell M., *Notch geometry effects in fatigue: a conservative design approach*. Engineering Failure Analysis 1994; 1:275-87.
- [Taylor 99] Taylor D., *Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model*. Int J Fatigue 1999; 21:413-420.
- [Taylor 99\_b] Taylor D., Zhou W., Ciepalowicz A.J., Devlukia J., *Mixed-mode fatigue from stress concentrations: an approach based on equivalent stress intensity*. Int J Fatigue 1999; 21:173-8.
- [Taylor 00] Taylor D., Wang G., *The validation of some methods of notch fatigue analysis*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 2000; 23:387-394.

- [Taylor 00\_b] Taylor D., Bologna P., Bel Knani K., *Prediction of fatigue failure location on a component using a critical distance method*. Int J Fatigue 2000; 22:735-742.
- [Taylor 01] Taylor D., *A mechanistic approach to critical-distance methods in notch fatigue*. Fatigue Fract Eng Mater Struct 2001; 24:215-24.
- [Timoshenko 34] Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of elasticity*. McGraw-Hill Book Company, 1934.
- [Tovo 05] Tovo R., Susmel L., Cristofori A., Benasciutti D., *Le verifiche di resistenza a fatica in sollecitazioni multiassiali ad ampiezza variabile*. Giornata studio su Progettazione a Fatica in presenza di Multiassialità Tensionali, Ferrara, 6-7 giugno 2005, Edited by Susmel L., Tovo R.
- [Tovo 06] Tovo R., Livieri P., Benvenuti E., *An implicit gradient type of static failure criterion for mixed-mode loading*. Int J Fract 2006; 141(3):497-511.
- [Tovo 07] Tovo R., Livieri P., *An implicit gradient application to fatigue of sharp notches and weldments*. Engng Fract Mech 2007; 74:515-26.
- [Tovo 08] Tovo R., Livieri P., *An implicit gradient application to fatigue of complex structures*. Engng Fract Mech 2008; 75:1804-1814.
- [Wang 93] Wang C. H., Brown M. W., *A path-independent parameter for fatigue under proportional and non-proportional loading*. Fatigue Fract Engng Mater Struct 1993; 16:1285-1298.
- [Williams 52] Williams M.L., *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension*. Journal of Applied Mechanics 1952; 19:526-528.

- [Xia 93] Xia L., Wang T.C., Shih C.F., *Higher-order analysis of crack tip fields in elastic power-law hardening materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1993; 41:665-687.
- [Yates 87] Yates J.R., Brown M.W., *Prediction of the length of non-propagating fatigue cracks*. Fatigue Fract Eng Mater Struct 1987; 10:187-201.
- [Yuang 94] Yuang H., Lin G., *Analysis of elastoplastic sharp notches*. Int J Fract 1994; 67:187-216.
- [Zenner 00-A] Zenner H., Pötter K., Yousefi F., *Experiences with Lifetime Prediction Under Multiaxial Random Loading Multiaxial Fatigue and Deformation: Testing and Prediction*. ASTM STP 2000; 1387:157-172.
- [Zenner 00-B] Zenner H., Liu J., Simbürger A., *On the Fatigue Limit of Ductile Metals Under Complex Multiaxial Loading*. International Journal of Fatigue 2000; 22:137-145.

# APPENDICE

## A.1 Routine di estrazione delle tensioni nodali

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ESTRAZIONE DELLE SOLUZIONI NODALI DALLE ANALISI LINEARI
ELASTICHE %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear;
clc;
close all;
disp(['Estrazione dei valori nodali delle tensioni: IN
CORSO'])

        h=waitbar(0,'Please wait...');

%genera la structur NODES nel workspace
nodes = xmeshinfo(fem,'out','nodes')
Nvar=size(fem.equ.dim,2)

%restituisce una matrice con dimensioni che dipendono dal
campo fem.equ.dim
Varname=reshape(fem.equ.dim,4,Nvar/4)

assignin('base',['sxx'num2str(1)],postinterp(fem,['sx_smsld']
,nodes.coords))
assignin('base',['syy'num2str(1)],postinterp(fem,['sy_smsld']
,nodes.coords))
assignin('base',['szz'num2str(1)],postinterp(fem,['sz_smsld']
,nodes.coords))

assignin('base',['sxy'num2str(1)],postinterp(fem,['sxy_smsld']
,nodes.coords))
assignin('base',['sxz'num2str(1)],postinterp(fem,['sxz_smsld']
,nodes.coords))
assignin('base',['syz'num2str(1)],postinterp(fem,['syz_smsld']
,nodes.coords))

for i=2:((Nvar/4)-1)
```

```

assignin('base', ['sxx' num2str(i)], postinterp(fem, ['sx_smsld'
' num2str(i)], nodes.coords))
assignin('base', ['syy' num2str(i)], postinterp(fem, ['sy_smsld'
' num2str(i)], nodes.coords))
assignin('base', ['szz' num2str(i)], postinterp(fem, ['sz_smsld'
' num2str(i)], nodes.coords))

assignin('base', ['sxy' num2str(i)], postinterp(fem, ['sxy_smsl
d' num2str(i)], nodes.coords))
assignin('base', ['sxz' num2str(i)], postinterp(fem, ['sxz_smsl
d' num2str(i)], nodes.coords))
assignin('base', ['syz' num2str(i)], postinterp(fem, ['syz_smsl
d' num2str(i)], nodes.coords))

waitbar(i/((Nvar/4)-1))

end

close (h)

disp(['Estrazione dei valori nodali delle tensioni:
COMPLETATA'])
clear Varname i
clear Varname h

```

## A.2 Routine per il calcolo dell'ampiezza della componente deviatorica e della tensione idrostatica massima

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% CALCOLO DELL'AMPIEZZA DEVIATORICA EQUIVALENTE E DELLA
TENSIONE IDROSTATICA MASSIMA%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp(['Calcolo del sistema di massima varianza e delle
componenti deviatorica ed idrostatica: IN CORSO'])

h=waitbar(0, 'Please wait...');

f=pi/2
[n,m]=size(sxx1);
for k=1:m

%calcolo dei coefficienti dalla matrice di varianza
C(1,1,k)=(1/24)*(4*(sxx1(k)^2)+4*(sxx2(k)^2)+syy1(k)^2+syy2
(k)^2+szz1(k)^2+szz2(k)^2+8*sxx1(k)*sxx2(k)*cos(f)-
4*sxx1(k)*syy1(k)-4*sxx1(k)*syy2(k)*cos(f)-

```

$$\begin{aligned}
&4*sxx1(k)*szz1(k)-4*sxx1(k)*szz2(k)*\cos(f)- \\
&4*sxx2(k)*syy1(k)*\cos(f)-4*sxx2(k)*syy2(k)- \\
&4*sxx2(k)*szz1(k)*\cos(f)- \\
&4*sxx2(k)*szz2(k)+2*syy1(k)*syy2(k)*\cos(f)+2*syy1(k)*szz1(k) \\
&+2*syy1(k)*szz2(k)*\cos(f)+2*syy2(k)*szz1(k)*\cos(f)+2*syy2(k) \\
&*szz2(k)+2*szz1(k)*szz2(k)*\cos(f)); \\
C(2,2,k)=(1/8)*(syy1(k)^2+syy2(k)^2+szz1(k)^2+szz2(k)^2+2*s \\
yyl(k)*syy2(k)*\cos(f)-2*syy1(k)*szz1(k)- \\
2*syy1(k)*szz2(k)*\cos(f)-2*syy2(k)*szz1(k)*\cos(f)- \\
2*syy2(k)*szz2(k)+2*szz1(k)*szz2(k)*\cos(f)); \\
C(3,3,k)=(1/2)*(sxy1(k)^2+sxy2(k)^2+2*sxy1(k)*sxy2(k)*\cos(f) \\
)); \\
C(4,4,k)=(1/2)*(sxz1(k)^2+sxz2(k)^2+2*sxz1(k)*sxz2(k)*\cos(f) \\
)); \\
C(5,5,k)=(1/2)*(syzl(k)^2+syzz(k)^2+2*syzl(k)*syzz(k)*\cos(f) \\
)); \\
C(1,2,k)=(1/(8*3^0.5))*(2*sxx1(k)*syy1(k)+2*sxx1(k)*syy2(k) \\
*\cos(f)-2*sxx1(k)*szz1(k)- \\
2*sxx1(k)*szz2(k)*\cos(f)+2*sxx2(k)*syy1(k)*\cos(f)+2*sxx2(k) \\
*syy2(k)-2*sxx2(k)*szz1(k)*\cos(f)-2*sxx2(k)*szz2(k)- \\
syy1(k)^2-syy2(k)^2+szz1(k)^2+szz2(k)^2- \\
2*syy1(k)*syy2(k)*\cos(f)+2*szz1(k)*szz2(k)*\cos(f)); \\
C(1,3,k)=(1/(4*3^0.5))*(2*sxx1(k)*sxy1(k)+2*sxx2(k)*sxy1(k) \\
*\cos(f)-syy1(k)*sxy1(k)-syy2(k)*sxy1(k)*\cos(f)- \\
szz1(k)*sxy1(k)- \\
szz2(k)*sxy1(k)*\cos(f)+2*sxx1(k)*sxy2(k)*\cos(f)+2*sxx2(k)*s \\
xy2(k)-syy1(k)*sxy2(k)*\cos(f)-syy2(k)*sxy2(k)- \\
szz1(k)*sxy2(k)*\cos(f)-szz2(k)*sxy2(k)); \\
C(1,4,k)=(1/(4*3^0.5))*(2*sxx1(k)*sxz1(k)+2*sxx2(k)*sxz1(k) \\
*\cos(f)-syy1(k)*sxz1(k)-syy2(k)*sxz1(k)*\cos(f)- \\
szz1(k)*sxz1(k)- \\
szz2(k)*sxz1(k)*\cos(f)+2*sxx1(k)*sxz2(k)*\cos(f)+2*sxx2(k)*s \\
xz2(k)-syy1(k)*sxz2(k)*\cos(f)-syy2(k)*sxz2(k)- \\
szz1(k)*sxz2(k)*\cos(f)-szz2(k)*sxz2(k)); \\
C(1,5,k)=(1/(4*3^0.5))*(2*sxx1(k)*syzl(k)+2*sxx2(k)*syzl(k) \\
*\cos(f)-syy1(k)*syzl(k)-syy2(k)*syzl(k)*\cos(f)- \\
szz1(k)*syzl(k)- \\
szz2(k)*syzl(k)*\cos(f)+2*sxx1(k)*syzz(k)*\cos(f)+2*sxx2(k)*s \\
yzz(k)-syy1(k)*syzz(k)*\cos(f)-syy2(k)*syzz(k)- \\
szz1(k)*syzz(k)*\cos(f)-szz2(k)*syzz(k)); \\
C(2,3,k)=(1/4)*(syy1(k)*sxy1(k)+syy2(k)*sxy1(k)*\cos(f)- \\
szz1(k)*sxy1(k)- \\
szz2(k)*sxy1(k)*\cos(f)+syy1(k)*sxy2(k)*\cos(f)+syy2(k)*sxy2(k) \\
-szz1(k)*sxy2(k)*\cos(f)-szz2(k)*sxy2(k)); \\
C(2,4,k)=(1/4)*(syy1(k)*sxz1(k)+syy2(k)*sxz1(k)*\cos(f)- \\
szz1(k)*sxz1(k)- \\
szz2(k)*sxz1(k)*\cos(f)+syy1(k)*sxz2(k)*\cos(f)+syy2(k)*sxz2(k) \\
-szz1(k)*sxz2(k)*\cos(f)-szz2(k)*sxz2(k));
\end{aligned}$$

```

C(2,5,k)=(1/4)*(syy1(k)*syzl(k)+syy2(k)*syzl(k)*cos(f)-
szz1(k)*syzl(k)-
szz2(k)*syzl(k)*cos(f)+syy1(k)*syz2(k)*cos(f)+syy2(k)*syz2(
k)-szz1(k)*syz2(k)*cos(f)-szz2(k)*syz2(k));
C(3,4,k)=(1/2)*(sxy1(k)*sxz1(k)+sxy1(k)*sxz2(k)*cos(f)+sxy2
(k)*sxz1(k)*cos(f)+sxy2(k)*sxz2(k));
C(3,5,k)=(1/2)*(sxy1(k)*syzl(k)+sxy1(k)*syz2(k)*cos(f)+sxy2
(k)*syzl(k)*cos(f)+sxy2(k)*syz2(k));
C(4,5,k)=(1/2)*(sxz1(k)*syzl(k)+sxz1(k)*syz2(k)*cos(f)+sxz2
(k)*syzl(k)*cos(f)+sxz2(k)*syz2(k));
C(2,1,k)=C(1,2,k);
C(3,1,k)=C(1,3,k);
C(4,1,k)=C(1,4,k);
C(5,1,k)=C(1,5,k);
C(3,2,k)=C(2,3,k);
C(4,2,k)=C(2,4,k);
C(5,2,k)=C(2,5,k);
C(4,3,k)=C(3,4,k);
C(5,3,k)=C(3,5,k);
C(5,4,k)=C(4,5,k);

```

```

%diagonalizzazione della matrice di varianza(le colonne di
V sono gli autovettori)
[V(:, :, k), D(:, :, k)] = eig(C(:, :, k));

```

```

%ampiezza del vettore deviatorico
Sa1(k, :) = [((2*sxx1(k) - syy1(k) -
szz1(k)) / (2*3^0.5)), (syy1(k) -
szz1(k)) / 2, sxy1(k), sxz1(k), syzl(k)];
Sa2(k, :) = [((2*sxx2(k) - syy2(k) -
szz2(k)) / (2*3^0.5)), (syy2(k) -
szz2(k)) / 2, sxy2(k), sxz2(k), syz2(k)];

```

```

%calcolo degli angoli per i quali le singole proiezioni
sono massime
alfa_n1(k, :) = atan(-
((Sa1(k, :) * V(:, 1)) / (Sa2(k, :) * V(:, 1))) * (1/sin(f)) - 1/tan(f));
alfa_n2(k, :) = atan(-
((Sa1(k, :) * V(:, 2)) / (Sa2(k, :) * V(:, 2))) * (1/sin(f)) - 1/tan(f));
alfa_n3(k, :) = atan(-
((Sa1(k, :) * V(:, 3)) / (Sa2(k, :) * V(:, 3))) * (1/sin(f)) - 1/tan(f));
alfa_n4(k, :) = atan(-
((Sa1(k, :) * V(:, 4)) / (Sa2(k, :) * V(:, 4))) * (1/sin(f)) - 1/tan(f));
alfa_n5(k, :) = atan(-
((Sa1(k, :) * V(:, 5)) / (Sa2(k, :) * V(:, 5))) * (1/sin(f)) - 1/tan(f));

```



---

```

%calcolo delle ampiezze delle proiezioni di S
Sa_n1(k,:)=(Sa1(k,:)*V(:,1))*sin(alfa_n1(k,:))+(Sa2(k,:)*V(
:,1))*sin(alfa_n1(k,:)-f);
Sa_n2(k,:)=(Sa1(k,:)*V(:,2))*sin(alfa_n2(k,:))+(Sa2(k,:)*V(
:,2))*sin(alfa_n2(k,:)-f);
Sa_n3(k,:)=(Sa1(k,:)*V(:,3))*sin(alfa_n3(k,:))+(Sa2(k,:)*V(
:,3))*sin(alfa_n3(k,:)-f);
Sa_n4(k,:)=(Sa1(k,:)*V(:,4))*sin(alfa_n4(k,:))+(Sa2(k,:)*V(
:,4))*sin(alfa_n4(k,:)-f);
Sa_n5(k,:)=(Sa1(k,:)*V(:,5))*sin(alfa_n5(k,:))+(Sa2(k,:)*V(
:,5))*sin(alfa_n5(k,:)-f);

%calcolo dell'ampiezza deviatorica equivalente
Rad_J2a_eq(k,:)=(Sa_n1(k,:)^2+Sa_n2(k,:)^2+Sa_n3(k,:)^2+Sa_
n4(k,:)^2+Sa_n5(k,:)^2)^0.5;

%calcolo della tensione idrostatica massima%
Sigma_idro1_amp(k,:)=(sxx1(k)+syy1(k)+szz1(k))/3;
Sigma_idro2_amp(k,:)=(sxx2(k)+syy2(k)+szz2(k))/3;

beta1(k,:)=atan(-
(Sigma_idro1_amp(k,:)/Sigma_idro2_amp(k,:))*(1/sin(f))-
(1/tan(f)));
beta2(k,:)=beta1(k,:)+(pi/2);

Sigma_idro_beta1(k,:)=Sigma_idro1_amp(k,:)*sin(beta1(k,:))+
Sigma_idro2_amp(k,:)*sin(beta1(k,:)-f);
Sigma_idro_beta2(k,:)=Sigma_idro1_amp(k,:)*sin(beta2(k,:))+
Sigma_idro2_amp(k,:)*sin(beta2(k,:)-f);

    if Sigma_idro_beta1(k,:)>Sigma_idro_beta2(k,:);
        Sigma_idro_max(k,:)=Sigma_idro_beta1(k,:);
    else
        Sigma_idro_max(k,:)=Sigma_idro_beta2(k,:);
    end

        waitbar(k/m)
end

        close (h)
disp(['Calcolo del sistema di massima varianza e delle
componenti deviatorica ed idrostatica: COMPLETATA'])

```

---

### A.3 Routine di importazione dei campi scalari nella structure fem

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IMPORTAZIONE DEI CAMPI SCALARI NELLA STRUCTURE FEM %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fem0=fem;
Nvar=size(fem.equ.dim,2);
disp(['Scrittura dei campi sulla variabile fem: IN CORSO'])

%Introduzione di una soluzione fittizia in fem0.mesh.p per
individuare la sequenza di riordino
solutionord=1:size(fem0.sol.u,1);
fem0.sol=femsol(solutionord');

% Estrazione della soluzione fittizia da fem0 per individuare
la sequenza di riordino
u_aux=postinterp(fem0,['u' num2str(Nvar/4)],nodes.coords);
v_aux=postinterp(fem0,['v' num2str(Nvar/4)],nodes.coords);
w_aux=postinterp(fem0,['w' num2str(Nvar/4)],nodes.coords);
u0t=[u_aux';v_aux';w_aux'];

%definizione dei campi scalari da inserire nella structure
fem
su=zeros(size(u_aux'));
sv=zeros(size(u_aux'));
sw=zeros(size(u_aux'));
user_entry = input('Numero di campi scalari da inserire in
fem (da 1 a 3): ');
if isempty(user_entry)
    disp(['End'])
    return
elseif user_entry>3|user_entry<1;
    disp(['Inserire un numero da 1 a 3'])
    return
end
user_entry_u = input(['Campo da inserire in u'
num2str(Nvar/4) ': '], 's');
su=eval(user_entry_u);
if user_entry>1
user_entry_v = input(['Campo da inserire in v'
num2str(Nvar/4) ': '], 's');
sv=eval(user_entry_v);
end
if user_entry>2

```

---

```
user_entry_w = input(['Campo da inserire in w'  
num2str(Nvar/4) ': '], 's');  
sw=eval(user_entry_w);  
end  
  
%inserimento dei campi scalari nella structure fem  
    h=waitbar(0,'Please wait...');  
uord=fem.sol.u;  
for i=1:size(u_aux')  
uord(round(u_aux(i)))=su(i);  
uord(round(v_aux(i)))=sv(i);  
uord(round(w_aux(i)))=sw(i);  
    waitbar(i/size(u_aux',1))  
end  
    close (h)  
fem0.sol=femsol (uord);  
fem=fem0;  
  
disp(['Scrittura dei campi sulla variabile fem: COMPLETATA'])  
disp(['è ora possibile importare la variabile fem in consol  
ed eseguire il calcolo del gradiente implicito'])  
  
clear Nvar fem0 h i solutionord su sv sw u0t uord user_entry  
user_entry_u user_entry_v user_entry_w u_aux v_aux w_aux
```

---