

## 1. PREMESSA

Per descrivere appropriatamente gli effetti dovuti alla mobilità del fondo, il problema morfodinamico deve essere risolto mantenendo il completo accoppiamento tra le equazioni coinvolte (Cordier et al. 2011). In tal modo il sistema iperbolico può essere espresso solo in forma non conservativa. È necessario, quindi, che il sistema di equazioni sia opportunamente integrato, ad esempio con un metodo di tipo path-conservativo (Parés 2006).

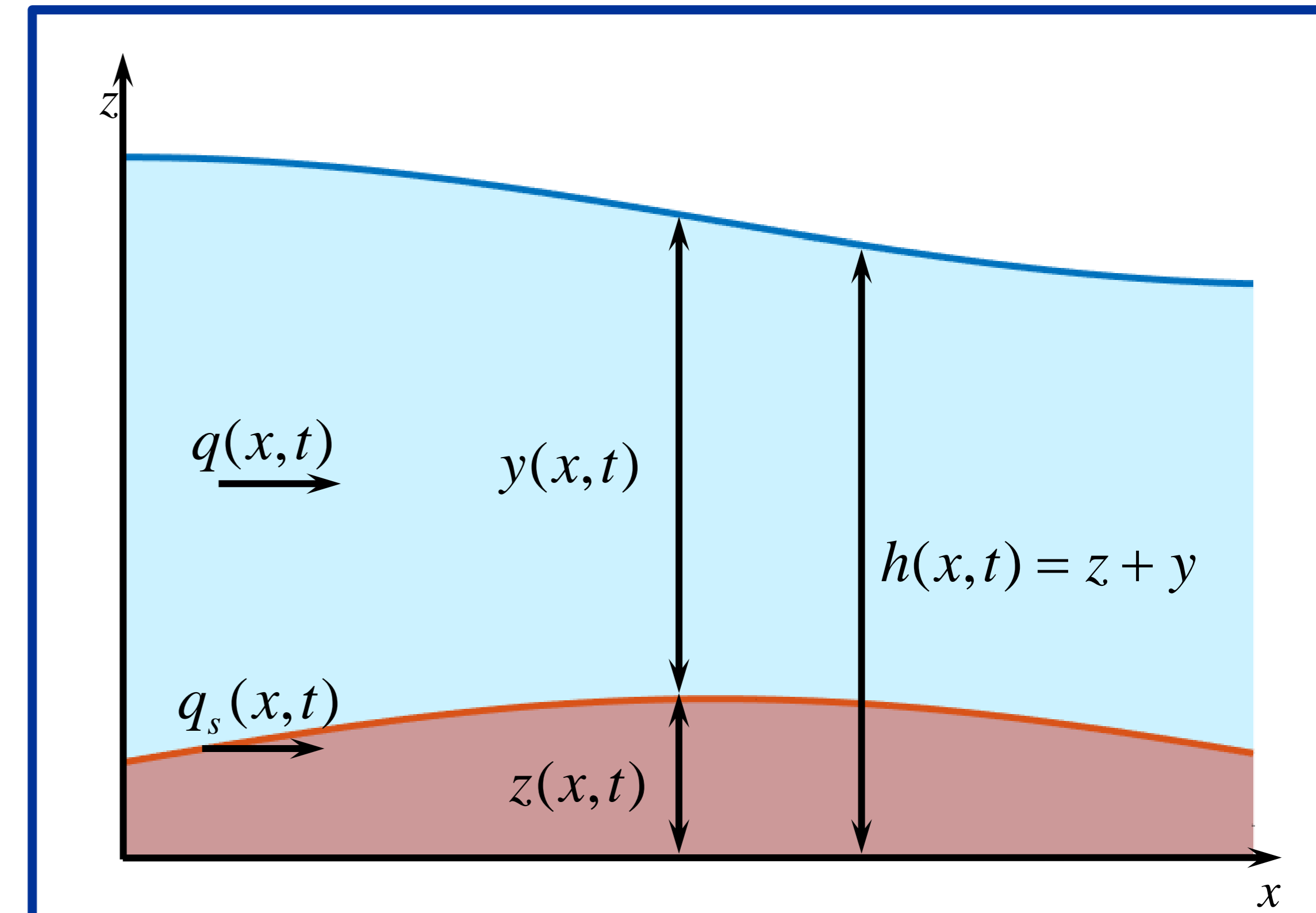
## SCOPO DEL LAVORO

Confrontare tre diverse implementazioni dello schema path-conservativo, nel caso di problemi retti dalle equazioni delle acque basse accoppiate all'eq. di Exner.

## 2. MODELLO MATEMATICO

Le equazioni che governano il problema morfodinamico in ambiente fluviale ed estuarino possono essere ricondotte a quelle delle onde lunghe in acque basse, associate all'equazione del bilancio dei sedimenti di Exner. Per modelli 1D, trascurando gli effetti dell'attrito al fondo e del trasporto in sospensione, il sistema iperbolico quasi lineare che si ottiene può essere scritto come:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{con: } W = \begin{bmatrix} y \\ q \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathcal{A}(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - \left(\frac{q}{y}\right)^2 & \frac{2q}{y} & gy \\ \xi \frac{\partial q_s}{\partial y} & \xi \frac{\partial q_s}{\partial q} & 0 \end{bmatrix}$$



## 3. MODELLO NUMERICO AI VOLUMI FINITI

È stato implementato un modello ai volumi finiti in cui i termini non conservativi sono stati trattati con un solutore di Riemann di tipo DOT (Dumbser & Toro 2011). In questo modo l'integrazione nel tempo avviene secondo il seguente schema:

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{j+1/2}^- - D_{j-1/2}^+)$$

Utilizzando un path lineare e adottando la regola di quadratura di Gauss-Lobatto, le fluttuazioni numeriche  $D$  possono essere espresse come:

$$D_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2} (W_{j+1/2}^+ - W_{j+1/2}^-) \cdot \sum_{i=1}^G \mathcal{A}(\Psi(s_i)) \pm |\mathcal{A}(\Psi(s_i))|$$

Per questo lavoro il modello è stato quindi esteso al terzo ordine d'accuratezza, sfruttando uno schema  $P_N P_M$ -ADER (Dumbser et al. 2008).

## 4. SOLUTORE DOT NUMERICO

Dal punto di vista numerico, il punto debole del metodo concerne nella presenza, all'interno della sommatoria per il calcolo delle fluttuazioni, del valore assoluto della matrice Jacobiana: applicando la notazione standard del valore assoluto di matrice è necessario calcolare molte volte autovalori e autovettori della Jacobiana stessa. Questa operazione, eseguita numericamente, fa incrementare notevolmente l'onere computazionale del metodo.

## 5. SOLUTORE DOT ANALITICO

Una prima variante dello schema numerico consiste nell'eseguire l'integrale lungo il path sfruttando la formulazione analitica di autovalori e autovettori per lo specifico modello matematico qui studiato (Castro Díaz et al. 2008).

## 6. SOLUTORE DOT APPROSSIMATO PER DEFLUSSO SUBCRITICO

Nella maggior parte dei corsi d'acqua di pianura, nelle condizioni più frequenti di deflusso subcritico, la portata solida può essere espressa come prodotto di un parametro piccolo  $K$  e una portata solida adimensionale:

$$q_s = K \cdot \hat{q}_s \quad \text{con: } \hat{q}_s = a_s \cdot \theta^b; \quad K = \xi \sqrt{g(S_g - 1)d_m^3}; \quad \theta = \frac{u_*^2}{g(S_g - 1)d_m}; \quad u_* = \frac{u}{C_0(y/e_s)^{1/6}}$$

in cui  $S_g$  è il rapporto tra la densità dei sedimenti al fondo e la densità dell'acqua,  $d_m$  è il diametro medio dei grani,  $C_0$  è una costante empirica e  $e_s$  è una misura di scabrezza equivalente.

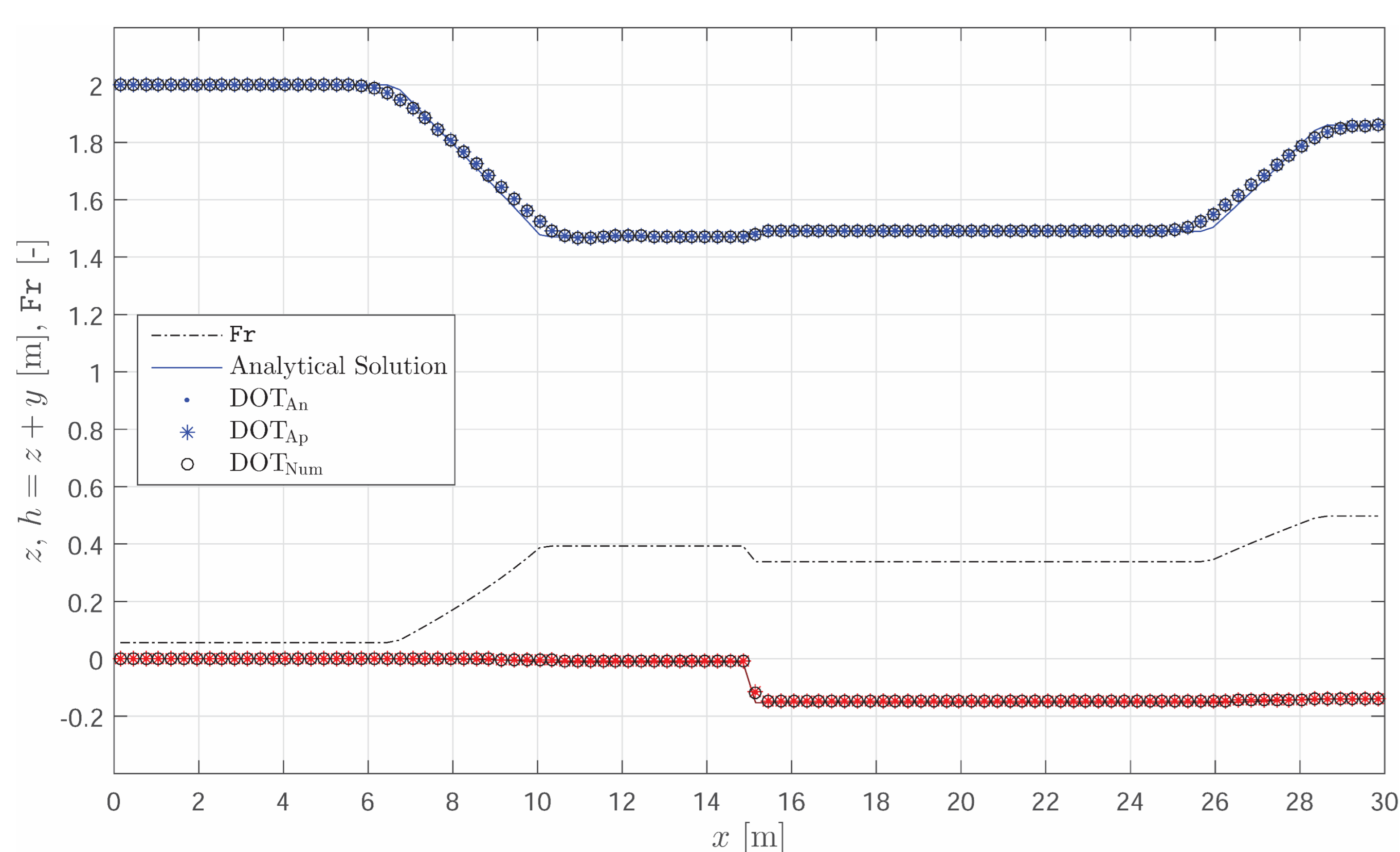
Sulla base dell'ipotesi di piccolo trasporto solido, è possibile definire una nuova approssimazione di autovalori e autovettori eseguendo uno sviluppo perturbativo degli autovalori in serie di potenze di  $K$ :

$$K \ll 1 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^{(0)} + K\lambda_i^{(1)} + o(K^2); \quad \text{con: } \lambda_1^{(0)} = 0, \lambda_2^{(0)} = u - c, \lambda_3^{(0)} = u + c$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{c^2}{u^2 - c^2} \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial y}, \lambda_2^{(1)} = -\frac{c}{2(u-c)} \left[ \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial y} + (u-c) \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial q} \right], \lambda_3^{(1)} = +\frac{c}{2(u+c)} \left[ \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial y} + (u+c) \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial q} \right]$$

Per il calcolo approssimato degli autovettori è possibile procedere introducendo gli autovalori risultanti nella formulazione analitica proposta da Castro Díaz et al. (2008).

## 7. TEST: SOLUZIONE ANALITICA DI UN CROLLO DIGA



## CONCLUSIONI

- Esiste una formulazione analitica di autovalori e autovettori della matrice Jacobiana del sistema acque basse-Exner con la quale è possibile abbattere il costo computazionale di un metodo DOT.
- Per deflusso in corrente subcritica, esiste una nuova formulazione degli autovalori e autovettori della Jacobiana, che possono essere determinati grazie a un'analisi perturbativa al primo ordine.
- Questa nuova approssimazione funziona appropriatamente per valori di Froude inferiori a 0.6 e, per la sua maggiore semplicità formale, può essere utile nello studio matematico dei processi fisici legati al trasporto al fondo.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Castro Díaz, M. J., Fernández-Nieto, E. D., & Ferreiro, A. M. (2008). Sediment transport models in Shallow Water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers & Fluids*, 37(3), 299–316. doi:10.1016/j.compfluid.2007.07.017
- Cordier, S., Le, M. H., & Morales de Luna, T. (2011). Bedload transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Advances in Water Resources*, 34(8), 980–989. doi:10.1016/j.advwatres.2011.05.002
- Dumbser, M., Balsara, D. S., Toro, E. F., & Munz, C. D. (2008). A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(18), 8209–8253. doi:10.1016/j.jcp.2008.05.025
- Dumbser, M., & Toro, E. F. (2011). A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-conservative Hyperbolic Systems. *Journal of Scientific Computing*, 48(1-3), 70–88. doi:10.1007/s10915-010-9400-3
- Parés, C. (2006). Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1). doi:10.1137/050628052

## 8. ANALISI DEL COSTO COMPUTAZIONALE

