

ALCUNI SCHEMI PATH-CONSERVATIVI PER L'INTEGRAZIONE DELLE ACQUE BASSE SU FONDO MOBILE

Francesco Carraro¹, Valerio Caleffi¹ & Alessandro Valiani¹

(1) ENDIF - Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi di Ferrara, via Saragat 1, 44122, Ferrara.

ASPETTI CHIAVE

- Schemi $P_N P_M$ -ADER per le equazioni delle acque basse accoppiate all'equazione di Exner
- Implementazione analitica e approssimata del solutore di Riemann di tipo Dumbser-Osher-Toro
- Efficienza numerica delle formulazioni analitiche e approssimate rispetto all'utilizzo di strumenti iterativi

1 PREMESSA

Le equazioni che governano il problema morfodinamico in ambiente fluviale, in molte applicazioni ingegneristiche, possono essere ricondotte a quelle delle onde lunghe in acque basse associate all'equazione del bilancio dei sedimenti di Exner. Per modelli 1D, trascurando gli effetti dell'attrito al fondo e del trasporto di sedimenti in sospensione, il sistema iperbolico quasi lineare che si ottiene può essere scritto come segue:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{con:} \quad W = \begin{bmatrix} y \\ q \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathcal{A}(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & c^2 \\ \xi \frac{\partial q_s}{\partial y} & \xi \frac{\partial q_s}{\partial q} & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

in cui $y(x,t)$ è la profondità; $q(x,t)$ è la portata specifica per unità di larghezza; $z(x,t)$ è la quota del fondo; $u = q/y$ è la velocità media; $c = \sqrt{g y}$ è la celerità delle piccole perturbazioni; g l'accelerazione di gravità; $\xi = 1/(1-p)$, essendo p la porosità del fondo; $q_s = A_g \cdot u^3$ è la portata solida (in volume) descritta dalla formula di Grass (1981); A_g [s²/m] è una costante empirica che ingloba le caratteristiche fisiche dei sedimenti di cui è composto il fondo.

Per descrivere appropriatamente gli effetti dovuti alla variabilità della quota del fondo, il sistema (1) deve essere risolto mantenendo il completo accoppiamento delle equazioni (Cordier *et al.* 2011). In tal modo, tale sistema può essere espresso solo in forma non conservativa. In accordo con Castro *et al.* (2008), per ottenere soluzioni *formalmente consistenti* è necessario che il sistema sia opportunamente integrato, ad esempio con un metodo di tipo *path-conservativo* (Parés 2006). Lo scopo di questo lavoro è quello di confrontare tre diverse implementazioni dello schema path-conservativo, prestando altresì attenzione al costo computazionale.

2 IL MODELLO NUMERICO

Per la soluzione numerica del sistema (1) è stato utilizzato uno schema di calcolo appartenente alla famiglia degli $P_N P_M$ -ADER. Questi, sviluppati da Dumbser *et al.* (2008) come estensione dell'approccio *one step* ADER di Toro *et al.* (2001), hanno la peculiarità di comprendere una categoria molto ampia di algoritmi di calcolo, spaziando dai modelli ai Volumi Finiti (quando $N = 0$ e $M \geq 0$) a quelli agli Elementi Finiti di tipo Discontinuous Galerkin ($N = M \geq 1$). La struttura della soluzione numerica rimane la stessa per tutte le combinazioni di N ed M e prevede (come nell'approccio ADER originale), che l'integrazione nel tempo si compia in un unico passo, indipendentemente dall'ordine di accuratezza dello schema, incrementando così l'efficienza computazionale. L'integrazione nel tempo si realizza utilizzando una previsione locale della soluzione all'interno della singola cella, corretta in fase di aggiornamento della soluzione globale, sulla base della soluzione dei problemi di Riemann che nascono all'interfaccia delle celle. In questo lavoro si è utilizzato $N = 0$ e $M = 2$.

Per il calcolo delle fluttuazioni D^\pm all'interfaccia delle celle, è stato implementato un solutore di Riemann di tipo Dumbser-Osher-Toro (DOT, *Dumbser & Toro* 2011), utilizzando un path di tipo lineare per l'applicazione del metodo path-conservativo sviluppato da *Parés* (2006). In questo modo, adottando l'integrazione di Gauss-Lobatto per eseguire l'integrale lungo il path, si ottiene:

$$D_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \frac{1}{2} \left(W_{j+\frac{1}{2}}^+ - W_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \cdot \sum_{i=1}^G \mathcal{A}(\Psi(s_i)) \pm |\mathcal{A}(\Psi(s_i))| \quad (2)$$

in cui $W_{j+\frac{1}{2}}^\pm$ sono i valori puntuali di $[y, q, z]^T$, a sinistra e a destra dell'interfaccia $j + \frac{1}{2}$ della cella j -esima; G è il numero di punti di Gauss scelti per l'integrazione (nei calcoli qui presentati $G = 3$); $\Psi(s) = W_{j+\frac{1}{2}}^- + s(W_{j+\frac{1}{2}}^+ - W_{j+\frac{1}{2}}^-)$ è il path lineare. Per il calcolo di $|\mathcal{A}|$ si applica la notazione standard $|\mathcal{A}| = R |\Lambda| R^{-1}$, essendo R la matrice degli autovettori destri, $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$ la matrice del valore assoluto degli autovalori di \mathcal{A} e R^{-1} l'inversa di R . Si noti che nell'equazione (2), per il calcolo delle fluttuazioni, è richiesto diverse volte il calcolo degli autovalori e autovettori della matrice Jacobiana, fattore che può diventare una possibile fonte di rallentamento del modello numerico.

Per il sistema (1), il calcolo $|\mathcal{A}|$ può avvenire in tre diversi modi: il più comune e versatile – ma anche quello più computazionalmente oneroso – consiste nel calcolare gli autovalori e autovettori numericamente; una seconda opzione è la formulazione analitica delle matrici R e Λ dovuta a *Castro Díaz et al.* (2008); infine, si presenta qui un'approssimazione originale di $|\mathcal{A}|$ attraverso un'analisi perturbativa.

Se si considera che, nella maggior parte dei corsi d'acqua di pianura, nelle condizioni più frequenti di deflusso la portata solida è molto minore della portata liquida, la portata solida stessa può essere espressa come prodotto di un parametro piccolo K per una portata solida adimensionale; adottando una legge di potenza per le resistenze al moto si ottiene:

$$q_s = K \cdot \hat{q}_s \quad \text{con:} \quad \hat{q}_s = a_s \cdot \theta^{b_s}; \quad K = \xi \sqrt{g(S_g - 1)d_m^3}; \quad \theta = \frac{u_*^2}{g(S_g - 1)d_m}; \quad u_* = \frac{u}{C_0(y/e_s)^{1/6}} \quad (3)$$

in cui a_s e b_s sono due parametri rispettivamente posti pari a 4 e $3/2$ (*Wong & Parker* 2006), S_g è il rapporto tra la densità dei sedimenti al fondo e la densità dell'acqua, d_m è il diametro medio dei grani, $C_0 = 7.66$ è una costante empirica e $e_s = 2.5 \cdot d_m$ è una misura di scabrezza equivalente per la stima della tensione al fondo. Con queste assunzioni, lo sviluppo perturbativo degli autovalori in serie di potenze di K fornisce:

$$K \ll 1 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^{(0)} + K \lambda_i^{(1)} + o(K^2); \quad \text{con:} \quad \lambda_1^{(0)} = 0, \quad \lambda_2^{(0)} = u - c, \quad \lambda_3^{(0)} = u + c$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{c^2}{u^2 - c^2} \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial y}, \quad \lambda_2^{(1)} = -\frac{c}{2(u - c)} \left[\frac{\partial \hat{q}_s}{\partial y} + (u - c) \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial q} \right], \quad \lambda_3^{(1)} = +\frac{c}{2(u + c)} \left[\frac{\partial \hat{q}_s}{\partial y} + (u + c) \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial q} \right]. \quad (4)$$

Per il calcolo approssimato della matrice R è possibile procedere introducendo gli autovalori risultanti dalla (4) nella formulazione analitica proposta da *Castro Díaz et al.* (2008), elidendo i termini di ordine superiore al primo.

3 RISULTATI E CASI TEST

L'analisi delle tre implementazioni del solutore di Riemann è compiuta simulando alcuni casi test in cui è nota la soluzione analitica del sistema (1). Per motivi di spazio, si riportano di seguito solamente i risultati ottenuti riproducendo numericamente un crollo diga su fondo mobile – la cui soluzione analitica è originale – e simulando la soluzione gradualmente variabile proposta da *Berthon et al.* (2012).

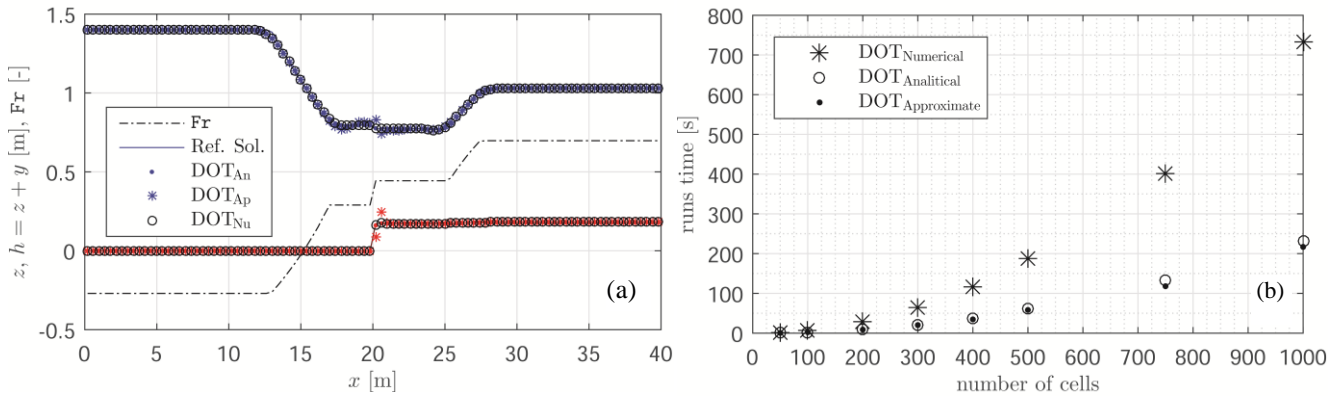


Figura 1. Nel pannello (a) è riportato (in termini di quota del fondo e della superficie libera, essendo Fr il numero di Froude della corrente) il confronto tra soluzione analitica e simulazioni numeriche di un crollo diga su fondo mobile, all'istante $t=1.5[s]$; il pannello (b) illustra i tempi di calcolo necessari a simulare il test descritto nel paragrafo 3.2 utilizzando i tre DOT implementati.

3.1 Soluzione di un crollo diga su fondo mobile

Per questa verifica del modello è stata presa in considerazione la soluzione analitica di un crollo diga su fondo mobile. I parametri utilizzati per il calcolo del trasporto solido sono:

$$A_g = 0.005 [s^2/m]; \quad \xi = 1; \quad d_m = 3.1 \cdot 10^{-4} [m]; \quad S_g = 2.6; \quad \Rightarrow \quad K = 2.3 \cdot 10^{-3} [m^3/(s \cdot m)]. \quad (5)$$

Il dominio spaziale, della lunghezza di 40 metri, è stato discretizzato utilizzando 100 celle, di dimensione costante e uniforme. Le condizioni iniziali prevedono due stati costanti a sinistra (W_L^0) e a destra (W_R^0) di una discontinuità posta al centro del dominio e – espresse in doppia precisione – risultano:

$$W_L^0 = \begin{cases} y_L = 1.4 [m] \\ q_L = -1.4 [m^3/(s \cdot m)] \\ z_L = 0.0 [m] \end{cases} \quad W_R^0 = \begin{cases} y_R = 1.0 [m] \\ q_R = 1.71141870830291 [m^3/(s \cdot m)] \\ z_R = 1.80879769244152 [m] \end{cases} \quad (6)$$

Date le condizioni iniziali (6) ed i valori dei parametri in (5), i risultati che si ottengono con i tre differenti solutori DOT sono illustrati in Figura 1a. Come si vede dal grafico, i tre metodi sono in grado di ben approssimare la soluzione analitica: solo in corrispondenza dell'onda a fronte ripido, che si sviluppa in un intorno di $x = 20 [m]$, la soluzione ottenuta con il calcolo approssimato di $|\mathcal{A}|$ presenta alcune discrepanze dalla soluzione analitica. D'altra parte, si osserva che l'utilizzo della formulazione analitica di autovalori e autovettori di \mathcal{A} produce (a meno della precisione di macchina) esattamente gli stessi risultati ottenuti calcolando $|\mathcal{A}|$ numericamente.

3.2 Soluzione gradualmente variabile e analisi del costo computazionale

Con gli stessi valori dei parametri espressi in (5) è stato indagato il funzionamento delle tre varianti del modello nella riproduzione della soluzione di riferimento proposta da *Berthon et al.* (2012). Questa soluzione analitica è costituita da un profilo di corrente in moto permanente, a portata costante, che scorre su un fondo la cui risposta è una deformazione lineare nel tempo. Nota la portata costante \bar{q} , si ottiene:

$$u(x) = \left[\frac{\alpha x + \beta}{A_g} \right]^{1/3}; \quad y(x) = \bar{q} / u(x); \quad z_b(x, 0) = -\frac{u(x)^3 + 2gq}{2gu(x)} + C; \quad z_b(x, t) = -\alpha t + z_b(x, 0) \quad (7)$$

in cui α , β e C sono delle costanti.

Questo caso test è stato scelto per studiare il costo computazionale dei tre solutori DOT implementati. In

particolare, fissati i parametri $\bar{q} = 2.0 [\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})]$, $C = 1$ e $\alpha = \beta = A_g = 0.005$, è stato misurato il tempo necessario a riprodurre numericamente la soluzione (7) al variare del numero di celle utilizzate per riprodurre il dominio spaziale $x = [0, 7]$. I risultati di questa analisi, illustrati in Figura 1b, mostrano che il calcolo numerico di $|\mathcal{A}|$ può risultare fino a tre volte più dispendioso rispetto al calcolo per via analitica, producendo esattamente gli stessi risultati; utilizzando invece l'approssimazione al primo ordine in K di tale matrice si ha un ulteriore risparmio di tempo – dell'ordine del 5-10% – rispetto alla formulazione analitica proposta da Castro Díaz et al. (2008), ma al crescere del trasporto solido la qualità dei risultati diminuisce considerevolmente.

4 CONCLUSIONI

Con questo lavoro viene presentato un confronto tra diversi metodi per il calcolo degli autovalori e autovettori della matrice Jacobiana del sistema (1), con lo scopo di evidenziare i vantaggi, in termini di efficienza computazionale, forniti da due formulazioni alternative all'utilizzo di metodi numerici iterativi. In particolare è stata introdotta una formulazione approssimata originale, basata su un'analisi perturbativa. I risultati prodotti dall'analisi delle tre soluzioni (qui solo riassunte), hanno messo in luce che la soluzione originale garantisce una maggiore velocità di calcolo. Tenendo conto che l'analisi perturbativa è stata condotta per basso trasporto solido, si evidenzia che l'errore introdotto dall'approssimazione suddetta tende ad aumentare al crescere della mobilità del fondo. Dalle prove effettuate è risultato che questo metodo è molto sensibile al valore del numero di Froude della corrente e risulta inutilizzabile quando Fr è prossimo al valore di 0.8; pertanto, qualora si debbano descrivere fenomeni di carattere torrentizio, è fortemente consigliato l'uso delle formule analitiche esatte proposte in Castro Díaz et al. (2008). L'uso di strumenti numerici per il calcolo degli autovettori e degli autovalori è invece sempre sconsigliato per il suo peso computazionale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Berthon, C., Cordier, S., Delestre, O., & Le, M. H. (2012). An analytical solution of the shallow water system coupled to the Exner equation. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(3-4), 183–186. doi:10.1016/j.crma.2012.01.007
- Castro Díaz, M. J., Fernández-Nieto, E. D., & Ferreiro, A. M. (2008). Sediment transport models in Shallow Water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers & Fluids*, 37(3), 299–316. doi:10.1016/j.compfluid.2007.07.017
- Castro, M. J., LeFloch, P. G., Muñoz-Ruiz, M. L., & Parés, C. (2008). Why many theories of shock waves are necessary: Convergence error in formally path-consistent schemes. *Journal of Computational Physics*, 227(17), 8107–8129. doi:10.1016/j.jcp.2008.05.012
- Cordier, S., Le, M. H., & Morales de Luna, T. (2011). Bedload transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Advances in Water Resources*, 34(8), 980–989. doi:10.1016/j.advwatres.2011.05.002
- Dumbser, M., Balsara, D. S., Toro, E. F., & Munz, C. D. (2008). A unified framework for the construction of one-step finite volume and discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(18), 8209–8253. doi:10.1016/j.jcp.2008.05.025
- Dumbser, M., & Toro, E. F. (2011). A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-conservative Hyperbolic Systems. *Journal of Scientific Computing*, 48(1-3), 70–88. doi:10.1007/s10915-010-9400-3
- Grass, A. J. (1981). *Sediment transport by waves and currents*. University College, London, Dept. of Civil Engineering.
- Parés, C. (2006). Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1). doi:10.1137/050628052
- Parés, C. (2006). Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a teoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1), 300–321.
- Toro, E. F., Millington, R. C., & Nejad, L. A. M. (2001). Towards Very High Order Godunov Schemes. In E. F. Toro (Ed.), *Godunov Methods* (pp. 907–940). Boston, MA: Springer US. doi:10.1007/978-1-4615-0663-8_87
- Wong, M., & Parker, G. (2006). Reanalysis and Correction of Bed-Load Relation of Meyer-Peter and Müller Using Their Own Database. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(11), 1159–1168. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:11(1159)