

ISBN: 9788894379914

Titolo: Atti del 37° Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche.

Sottotitolo: Ingegneria delle acque: cambiamenti globali e sostenibilità.

Curatori: Felice Arena, Stefano Lanzoni, Giovanni Malara

MODELLAZIONE DEL FLUSSO SANGUIGNO IN RETI DI VASI VISCOELASTICI

Francesco Piccioli ^{1*}, Giulia Bertaglia ², Alessandro Valiani ¹ & Valerio Caleffi ¹

(1) Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi di Ferrara (Ferrara, Italy)

(2) Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara (Ferrara, Italy)

*email: francesco.piccioli@unife.it

ASPETTI CHIAVE

- Modellazione delle giunzioni tra vasi sanguigni viscoelastici e delle condizioni al contorno.
- Confronto tra vaso sanguigno con giunzione e corrispondente caso di vaso continuo.
- Applicabilità del modello sia per arterie che per vene.
- Presentazione di una rete circolatoria arteriosa e coppia di isteresi tipo.

1 INTRODUZIONE

L'utilizzo di modelli matematici robusti ed efficienti basati su un'appropriata modellazione dell'interazione meccanica tra fluido e pareti è fondamentale per l'analisi dei fenomeni di propagazione di onde di pressione nei vasi sanguigni. È stato dimostrato che modelli monodimensionali del flusso sanguigno forniscono risultati soddisfacenti per lo studio delle onde suddette, evidenziando come il moto del sangue venga influenzato dal comportamento meccanico dei vasi (*Formaggia et al.*, 2002; *Bertaglia et al.*, 2020a). In questo contesto, la corretta caratterizzazione viscoelastica dei vasi è determinante (*Reymond et al.*, 2009; *Nichols et al.*, 2011; *Salvi*, 2012). Infatti, attribuendo al vaso sanguigno l'appropriata caratteristica di smorzamento delle onde di pressione causate dagli impulsi cardiaci, si nota una buona corrispondenza tra risultati simulati e misurazioni effettuate *in-vivo* su pazienti volontari sani, come mostrato in *Bertaglia et al.* (2020b). In questo lavoro viene implementato il contributo viscoso del vaso sanguigno seguendo la metodologia presentata in *Bertaglia et al.* (2020a), cioè adottando un modello Standard Linear Solid (SLS) per rappresentare il comportamento del materiale delle pareti del vaso (*Lakes*, 2009). Tramite questa caratterizzazione, il modello permette di simulare uno degli aspetti più significativi del comportamento viscoelastico: il decadimento esponenziale nel tempo delle tensioni normali nella parete per una deformazione costante imposta. Per ottenere un modello intrinsecamente coerente è fondamentale trattare numericamente le equazioni di governo delle sezioni singolari dei singoli vasi (sezioni di contorno in ingresso ed in uscita dalla rete e adiacenti alle giunzioni) contemplando il comportamento viscoelastico considerato nella modellazione dei vasi stessi. Come riportato da *Reymond et al.* (2009), sono pochi i contributi in letteratura che si concentrano sulla simulazione viscoelastica delle giunzioni. Tra i metodi esistenti, *Muller et al.* (2016) trattano la viscoelasticità nella giunzione tramite un problema di Riemann, ma a fronte di un modello viscoelastico dei vasi meno articolato dello SLS. Altri lavori sfruttano il metodo delle caratteristiche (*Sherwin et al.*, 2003; *Alastruey et al.*, 2012). In questo contesto, si sceglie di utilizzare un metodo delle caratteristiche aumentato (a-MOC) che sfrutta, oltre ai classici invarianti di Riemann che legano velocità ad area, anche un invariante aggiuntivo che pone in relazione pressione e area, definibile tramite lo studio del sistema di autovalori ed autovettori del sistema iperbolico di governo.

2 IL MODELLO MATEMATICO

Il modello emodinamico di interazione fluido-struttura con sistema aumentato (a-FSI) presentato in *Bertaglia et al.* (2020a), è qui ripreso per lo studio della propagazione del flusso in reti di vasi sanguigni. Le equazioni di governo sono scritte in forma monodimensionale e sono ottenute integrando sulla sezione trasversale del vaso sanguigno le equazioni 3-D di Navier-Stokes per fluido incomprimibile, nell'ipotesi di simmetria assiale della sezione stessa e del flusso (*Formaggia et al.*, 2009). Per chiudere il sistema si considera una legge del tubo qui estesa ai vasi viscoelastici. La legge rappresenta un legame costitutivo tra l'area della

sezione trasversale del vaso, la pressione e l'andamento nel tempo di quest'ultima. Nel modello a-FSI, tale legge del tubo è introdotta nel sistema di equazioni in forma di equazione alle derivate parziali (EDP), come descritto in Bertaglia et al. (2020a). Il sistema a-FSI discusso si presenta come segue:

$$\partial_t A + \partial_x(Au) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t(Au) + \partial_x(Au^2) + \frac{A}{\rho} \partial_x p = \frac{f}{\rho} \quad (1b)$$

$$\partial_t p + d \partial_x(Au) = S \quad (1c)$$

dove A rappresenta la sezione trasversale del vaso in condizione deformata, u la velocità del sangue mediata sulla sezione, p la pressione sanguigna, ρ la densità del sangue, x e t rispettivamente lo spazio ed il tempo. Nell'Eq. (1b) il termine f tiene conto delle perdite di carico per attrito alle pareti. Nell'Eq. (1c), che rappresenta la legge del tubo, il parametro $d = d(A)$ è relativo al contributo elastico. Infine, il termine sorgente S tiene conto del contributo viscoso delle pareti ($S = 0$ nel caso elastico). Per una descrizione dettagliata del modello a-FSI si rimanda il lettore a Bertaglia et al. (2020a).

Il sistema iperbolico non lineare e non conservativo (1) si può riscrivere in forma generale come:

$$\partial_t Q + A(Q) \partial_x Q = S(Q) \quad (2)$$

dove Q è il vettore delle variabili dipendenti del sistema e $A(Q)$ è la matrice Jacobiana del sistema. $S(Q)$ è il vettore dei termini sorgente. Data la natura iperbolica del sistema, è possibile definire gli autovalori reali e gli autovettori linearmente indipendenti. Ai tre autovalori sono associati un campo linearmente degenere e due campi genuinamente non lineari. Relativamente a questi ultimi valgono i seguenti Invarianti di Riemann:

$$\Gamma_{1,2} = u \pm \int \frac{c(A)}{A} dA, \quad \Gamma_3 = p - \int d(A) dA, \quad (3)$$

dove $c(A)$ è la celerità dell'onda. Si sottolinea che la presenza di Γ_3 è dovuta all'introduzione della legge del tubo viscoelastica in forma EDP nel sistema di governo.

3 LO SCHEMA NUMERICO

Lo schema numerico utilizzato è quello presentato in Bertaglia et al. (2020a): viene impiegato lo schema Implicito-Esplicito di tipo Runge-Kutta IMEX-SSP2 per risolvere il sistema a-FSI nel tempo, il quale permette la risoluzione di sistemi iperbolici con termini "stiff" di rilassamento (Pareschi & Russo, 2005), che in questo contesto sono legati al termine sorgente S e dovuti al comportamento viscoelastico del modello SLS utilizzato. I termini non "stiff" nel sistema a-FSI sono trattati mediante uno schema *Strong Stability Preserving* (SSP). La discretizzazione spaziale è ottenuta utilizzando uno schema ai volumi finiti (FV), sfruttando il solutore di Riemann di Dumbser-Osher-Toro (DOT), proposto da Dumbser & Toro (2011). Il modello risulta accurato al secondo ordine sia nello spazio che nel tempo.

3.1 Implementazione delle condizioni al contorno

Nel modello si identificano tre tipologie di sezioni di contorno al singolo vaso: in ingresso alla rete, in uscita dalla rete e di giunzione fra vasi. In queste sezioni è conveniente risolvere il problema all'interfaccia tramite l'uso delle curve caratteristiche. Per quanto riguarda la sezione di ingresso, viene imposta come condizione fisica la portata, ricavata dall'andamento sperimentale tipico osservabile da misure *in-vivo*. La condizione al contorno in uscita è simulata utilizzando un sistema a parametri concentrati RCR, in accordo con associate indicazioni di letteratura (Formaggia et al., 2009). L'aspetto innovativo del lavoro consiste nell'implementazione dell'a-MOC, che considera, oltre a Γ_1 e Γ_2 , l'invariante di Riemann aggiuntivo Γ_3 . Questo permette di creare un sistema coerente con il modello matematico a-FSI, che è costituito da una legge del tubo viscoelastica in forma EDP. In particolare, la giunzione viene implementata tramite un sistema non lineare di equazioni che assicura la conservazione della massa e la conservazione della pressione totale. Inoltre, si impone la costanza degli Invarianti di Riemann, presentati in Eq. (3), sulle curve caratteristiche entranti o uscenti dal dominio, a seconda che il vaso sia a valle o a monte della giunzione, rispettivamente.

Operativamente, data una giunzione generica con N vasi confluenti, si identificano $2N$ insiemi di variabili dipendenti: i primi N insiemi sono relativi alle variabili di centro cella adiacenti la giunzione, $[A, Au, p]^T$, i secondi N insiemi rappresentano le variabili, incognite, sulle sezioni notevoli di confine dominio-giunzione, $[A^*, A^*u^*, p^*]^T$. Le variabili dei due insiemi sono legate dalle curve caratteristiche sulle quali valgono gli Invarianti di Riemann Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 . Il sistema non lineare della giunzione è espresso, nella forma completa, come segue:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \Theta_{v_i} A_i^* u_i^* = 0, \\ p_1^* + \frac{1}{2} \rho u_1^{*2} - \left(p_i^* + \frac{1}{2} \rho u_i^{*2} \right) = 0, \quad i = 2, \dots, N \\ u_i^* - u_i + \Theta_{v_i} \int_{A_i}^{A_i^*} \frac{c(A)}{A} dA = 0, \quad i = 1, \dots, N \\ p_i^* - p_i - \int_{A_i}^{A_i^*} d(A) dA = 0, \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (4)$$

dove $\Theta_{v_i} = +1$ se il vaso è entrante nella giunzione, $\Theta_{v_i} = -1$ se invece è uscente, coerentemente con le usuali convenzioni utilizzate nei bilanci di massa alle giunzioni. Si noti che la terza e la quarta equazione del sistema sono rispettivamente gli Invarianti di Riemann $\Gamma_{1,2}$ e Γ_3 delle Eq. (3). Nel caso di vasi elastici, nell'Eq. (4) viene rimossa l'ultima equazione in quanto la pressione è calcolata *a posteriori* con la legge del tubo elastica in funzione dell'area: $p^* = p(A^*)$. Conseguentemente diminuisce il numero di incognite. Il sistema non lineare dell'Eq. (4) si può utilizzare sia in caso di arteria che di vena, semplicemente selezionando opportunamente i coefficienti che caratterizzano la specifica legge del tubo. Si sottolinea che per tenere in considerazione il contributo viscoelastico sulla pressione, Γ_3 è stato utilizzato anche per risolvere le altre sezioni di contorno (in ingresso e in uscita dalla rete), garantendo ovunque la coerenza interna dello schema.

4 RISULTATI E DISCUSSIONE

Per la validazione del sistema non lineare della giunzione formulato con l'a-MOC è stato implementato il caso denominato *2-vasi*, consistente in due tratti di arteria di uguale geometria e medesime caratteristiche meccaniche, raccordati da una giunzione. La soluzione di riferimento è ottenuta simulando un singolo vaso continuo con le stesse caratteristiche del *2-vasi* e uguali condizioni iniziali ed al contorno. I parametri geometrici e meccanici utilizzati per questo test sono tratti da *Muller et al. (2016)*. I risultati sono presentati in Figura 1, dove si può notare come l'onda attraversi imperturbata la giunzione, sovrapponendosi alla soluzione di riferimento. Sempre in Figura 1 si può osservare il confronto tra i risultati numerici ottenuti con modello elastico e viscoelastico nel test *2-vasi*, dal quale si notano gli effetti di smorzamento e ritardo dell'onda rispetto al caso elastico dovuti all'utilizzo del modello SLS. Questi risultati confermano che l'implementazione della giunzione come in Eq. (4) permette di preservare il contributo viscoso tenuto in considerazione nella modellazione dei vasi. Al contrario, simulazioni dove la giunzione è modellata senza ricorrere all'invariante Γ_3 hanno evidenziato nella sezione di raccordo improprie distorsioni delle forme d'onda (tali risultati non sono riportati per ragioni di sintesi).

I test successivi si riferiscono ad un intero apparato circolatorio arterioso. L'esempio riportato in questa sede consiste in una versione costituita da 56 arterie della rete presentata da *Blanco et al. (2014, 2015)*, denominata ADAN56.

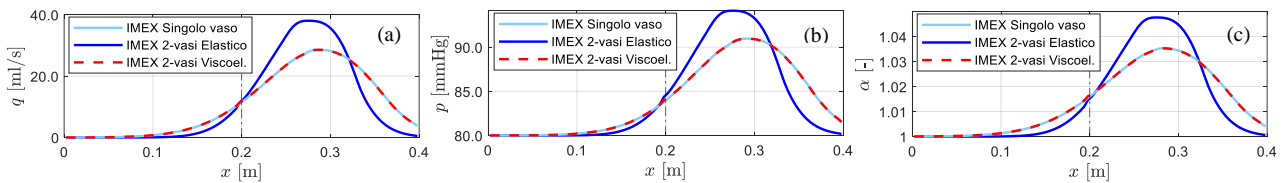


Figura 1. Test *2-vasi*. Soluzione di riferimento ottenuta applicando lo schema IMEX-SSP2(3,3,2) con modello viscoelastico di parete per la risoluzione del sistema a-FSI applicato ad un singolo vaso. La linea verticale tratteggiata è posta in corrispondenza della giunzione. Le soluzioni sono riportate all'istante $t = 0.068$ s: (a) portata, (b) pressione e (c) sezione trasversale adimensionale α .

La topologia e le caratteristiche geometriche e meccaniche della rete sono tratte da *Boileau et al. (2015)*. Inizialmente si è proceduto con la validazione della rete in caso elastico, per la quale si dispone di un caso di riferimento in letteratura (*Boileau et al., 2015*), che viene correttamente riprodotto. La simulazione viscoelastica introduce modifiche nella risposta del sistema, qualitativamente rispondenti alla risposta meccanica del modello SLS. A titolo esemplificativo, in Figura 2 è possibile osservare i risultati, in termini di pressione, per cinque differenti arterie. Inoltre, il coppia d'isteresi per l'arco aortico, Figura 2 (f), dimostra come nel modello viscoelastico l'energia ciclicamente immessa nel sistema non venga recuperata totalmente durante la fase di contrazione del vaso sanguigno, ma venga parzialmente dissipata. È possibile notare che i valori di pressione del tratto sistolico (percorso inferiore del coppia) sono superiori, a parità di area, a quelli del tratto diastolico, in quanto caratterizzati da un modulo di Young istantaneo maggiore dell'asintotico, che invece caratterizza il tratto diastolico.

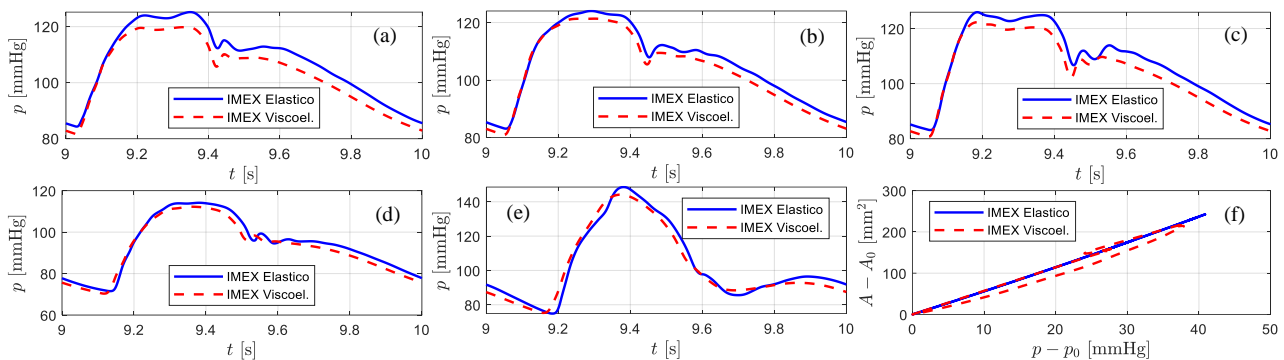


Figura 2. Modellazione della rete ADAN56. I risultati sono riferiti alla sezione mediana dell'arteria. Confronto tra simulazioni elastica e viscoelastica delle onde di pressione per (a) arco aortico, (b) aorta toracica, (c) arteria carotide comune destra, (d) arteria radiale destra e (e) arteria femorale destra; (f) coppia di isteresi per l'arco aortico.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Alastruey, J., Parker, K. H., & Sherwin, S. J. (2012). Arterial pulse wave haemodynamics. *BHR Group - 11th International Conferences on Pressure Surges, October 2012*, 401–442.
- Bertaglia, G., Caleffi, V., & Valiani, A. (2020). Modeling blood flow in viscoelastic vessels: the 1D augmented fluid–structure interaction system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 360, 112772.
- Bertaglia, G., Navas-Montilla, A., Valiani, A., Monge García, M. I., Murillo, J., & Caleffi, V. (2020). Computational hemodynamics in arteries with the one-dimensional augmented fluid-structure interaction system: viscoelastic parameters estimation and comparison with in-vivo data. *Journal of Biomechanics*, 100, 109595.
- Blanco, P. J., Watanabe, S. M., Dari, E. A., Passos, M. A. R. F., & Feijóo, R. A. (2014). Blood flow distribution in an anatomically detailed arterial network model: criteria and algorithms. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 13(6), 1303–1330.
- Blanco, P. J., Watanabe, S. M., Passos, M. A. R. F., Lemos, P. A., & Feijóo, R. A. (2015). An anatomically detailed arterial network model for one-dimensional computational hemodynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 62(2), 736–753.
- Boileau, E., Nithiarasu, P., Blanco, P. J., Muller, L. O., Fossan, F. E., Hellevik, L. R., Donders, W. P., Huberts, W., Willemet, M., & Alastruey, J. (2015). A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, e02732.
- Dumbser, M., & Toro, E. F. (2011). A simple extension of the Osher Riemann solver to non-conservative hyperbolic systems. *Journal of Scientific Computing*, 48(1–3), 70–88.
- Formaggia, L., Lamponi, D., & Quarteroni, A. (2002). One-dimensional models for blood flow in arteries. *Journal of Engineering Mathematics* 47, 251–276.
- Formaggia, L., Quarteroni, A., & Veneziani, A. (2009). Cardiovascular Mathematics. Modeling and simulation of the circulatory system. *Springer*.
- Lakes, R. (2009). Viscoelastic Materials. *Cambridge University Press*.
- Muller, L. O., Leugering, G., & Blanco, P. J. (2016). Consistent treatment of viscoelastic effects at junctions in one-dimensional blood flow models. *Journal of Computational Physics*, 314, 167–193.
- Nichols, W. W., O'Rourke, M. F., Vlachopoulos, C., Hoeks, A. P., & Reneman, R. S. (2011). McDonald's blood flow in arteries theoretical, experimental and clinical principles. *CRC Press*.
- Pareschi, L., & Russo, G. (2005). Implicit-explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation. *Journal of Scientific Computing*, 25(1), 129–155.
- Reymond, P., Merenda, F., Perren, F., Rüfenacht, D., & Stergiopoulos, N. (2009). Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree. *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology*, 297(1), 208–222.
- Salvi, P. (2012). Pulse Waves. How Vascular Hemodynamics Affects Blood Pressure. *Springer*.
- Sherwin, S. J., Franke, V., Peiró, J., & Parker, K. (2003). One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics*, 47(3–4), 217–250.