

**ISBN:** 9788894379914

**Titolo:** Atti del 37° Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche.

**Sottotitolo:** Ingegneria delle acque: cambiamenti globali e sostenibilità.

**Curatori:** Felice Arena, Stefano Lanzoni, Giovanni Malara

# MODELLAZIONE DEL FLUSSO SANGUIGNO IN VASI VISCOELASTICI

Giulia Bertaglia <sup>1</sup>, Valerio Caleffi <sup>2\*</sup> & Alessandro Valiani <sup>2</sup>

(1) Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara (Ferrara, Italy)

(2) Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi di Ferrara (Ferrara, Italy)

\*email: valerio.caleffi@unife.it

## ASPETTI CHIAVE

- Si presenta un nuovo modello matematico di interazione fluido-struttura per il flusso sanguigno.
- Il modello Standard Linear Solid descrive il comportamento viscoelastico delle pareti dei vasi.
- Si ricava un'unica legge del tubo in forma differenziale valida sia per arterie che per vene.
- A differenza dei modelli finora utilizzati, il modello proposto è nativamente iperbolico.
- Il modello è integrabile numericamente mediante uno schema al secondo ordine FVM IMEX Runge-Kutta.

## 1 PREMESSA

I modelli matematici del flusso sanguigno rappresentano una risorsa sempre più preziosa in ambito medico, permettendo di ottenere dati utili evitando al contempo misurazioni invasive.

La teoria alla base della circolazione del sangue è direttamente riconducibile allo studio del moto di un fluido viscoso incomprimibile in condotte a parete sottile, deformabili ed eventualmente collassabili. Tale teoria è stata quindi affrontata con approcci tipici della Meccanica dei Continui applicati all'interazione fluido-struttura, nella maggior parte dei casi assumendo un legame costitutivo elastico fra sforzi e deformazioni per le pareti dei vasi (*Formaggia et al.*, 2003).

Solo recentemente sono stati dimostrati i vantaggi di una corretta modellazione del comportamento meccanico della parete del vaso con una legge viscoelastica, considerando quindi anche lo smorzamento viscoso delle onde di pressione (*Alastruey et al.*, 2011). In questo contesto, si presenta in questo lavoro un modello efficiente, robusto, estremamente versatile e facilmente integrabile per il flusso sanguigno in arterie e vene che tiene conto della viscoelasticità delle pareti.

## 2 IL MODELLO MATEMATICO

Le principali equazioni di governo del flusso sanguigno in vasi medio-grandi sono ottenute applicando i principi di conservazione della massa e della quantità di moto:

$$\partial_t A + \partial_x (Au) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t (Au) + \partial_x (Au^2) + \frac{A}{\rho} \partial_x p = 0 \quad (1b)$$

dove  $A$  è la sezione trasversale,  $u$  è la velocità mediata sulla sezione,  $p$  è la pressione interna al vaso,  $\rho$  è la densità del sangue, mentre  $x$  e  $t$  sono rispettivamente lo spazio ed il tempo. Nell'Eq. (1b) sono trascurate le perdite di carico dovute alla viscosità del sangue.

La chiusura di questo sistema di equazioni richiede la definizione di una legge del tubo, rappresentativa dell'interazione fra la parete del vaso ed il sangue, che mette in relazione la pressione interna al movimento della parete, essendo questo a sua volta rappresentato dalla variazione temporale della sezione trasversale. La legge del tubo più utilizzata in letteratura è rappresentata da un'espressione algebrica ottenuta assumendo un legame costitutivo puramente elastico per la parete (*Müller & Toro*, 2013). Per meglio riprodurre il comportamento reale dei vasi, in questo lavoro si introduce invece una legge del tubo viscoelastica (*Lakes*, 2009), ottenuta utilizzando il legame costitutivo per il materiale previsto dal modello Standard Linear Solid (SLS). Differenziando nel tempo l'equazione costitutiva del modello SLS, e ricorrendo all'Eq. (1a), si deriva la seguente legge in forma differenziale:

$$\partial_t p + d \partial_x (Au) = s \quad \text{con: } d = \frac{K}{A} (m \alpha^m - n \alpha^n) \quad \text{e} \quad S = \frac{1}{\tau_r} \left[ \frac{E_\infty}{E_0} K (\alpha^m - \alpha^n) - (p - p_{ext}) \right] \quad (2)$$

essendo  $p_{ext}$  la pressione esterna al vaso e  $\alpha = A/A_0$  la sezione trasversale adimensionale, calcolata rispetto ad  $A_0$ , sezione trasversale di equilibrio.  $K$  è il coefficiente elastico del materiale che tiene conto della variazione nello spazio combinata del modulo istantaneo di Young,  $E_0$ , e dello spessore della parete del vaso, mentre  $m$  e  $n$  sono parametri specifici, differenti per arterie e vene, che caratterizzano il diverso comportamento dei vasi in risposta alle variazioni di pressione (*Shapiro, 1977*).  $E_\infty$  è il modulo di Young asintotico e  $\tau_r$  è il tempo di rilassamento che, insieme a  $E_0$ , definiscono il comportamento viscoelastico del vaso.

Inoltre, per tenere in considerazione in modo formalmente corretto (*Toro & Siviglia, 2013*) le variazioni longitudinali, eventualmente discontinue, delle proprietà meccaniche e geometriche dei vasi, sono anche considerate le seguenti equazioni:  $\partial_t A_0 = 0$ ;  $\partial_t E_0 = 0$ ;  $\partial_t p_{ext} = 0$ . Queste equazioni, unitamente alle equazioni (1) e (2), possono essere scritte in forma compatta come:

$$\partial_t \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \partial_x \mathbf{Q} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}) \quad (3)$$

essendo:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A \\ Au \\ p \\ A_0 \\ E_0 \\ p_{ext} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 & 2u & \frac{A}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Il sistema monodimensionale (3) costituisce il nuovo sistema aumentato viscoelastico di governo dell'interazione fluido-struttura (a-FSI) proposto in questo lavoro. È interessante notare che annullando il termine sorgente dell'Eq. (2) si ottiene la classica legge del tubo elastica, ma scritta nella sua formulazione differenziale.

Indipendentemente dalla scelta del modello reologico per la parete del vaso, il modello a-FSI risulta nativamente iperbolico, a differenza dei precedenti approcci di letteratura, in cui considerare la viscosità della parete comporta l'aggiunta di un termine diffusivo all'equazione di bilancio della quantità di moto (*Montecinos et al., 2014*). La discretizzazione numerica ne risulta quindi notevolmente semplificata. Il termine sorgente  $S$  dell'Eq. (2) può essere interpretato come un termine di rilassamento e come tale è trattato numericamente (*Pareschi & Russo, 2005*). Per valori del tempo di rilassamento  $\tau_r$  piccoli, questo termine può diventare *stiff*, ovvero può diventare predominante rispetto al primo membro dell'equazione (*Pareschi & Russo, 2005*). Ciò comporta la necessità di una scelta attenta delle tecniche di integrazione numerica.

### 3 IL MODELLO NUMERICO

Il sistema a-FSI è integrato numericamente utilizzando lo schema IMEX-SSP2(3,3,2) proposto da *Pareschi & Russo (2005)* per applicazioni a sistemi iperbolici con termini di rilassamento stiff. Lo schema è accurato al secondo ordine, preserva lo stato asintotico ed è asintoticamente accurato al tendere di  $\tau_r$  a zero. Lo schema mostra inoltre un'elevata robustezza data dal trattamento Runge-Kutta (RK) implicito della parte stiff. Infatti, nello schema IMEX adottato, al termine di rilassamento viene applicato un metodo RK diagonalmente implicito (DIRK). I termini non stiff del sistema di equazioni sono invece trattati esplicitamente mediante uno schema *Strong Stability Preserving (SSP)*.

La discretizzazione spaziale del sistema è realizzata usando un metodo ai volumi finiti (FVM) unitamente al solutore di Riemann Dumbser-Osher-Toro (DOT), proposto da *Dumbser & Toro (2011)*, esteso al secondo ordine, applicato in analogia a quanto fatto per il moto di un fluido comprimibile in condotte polimeriche (*Bertaglia et al., 2018*).

È inoltre da sottolineare che, per il sistema di equazioni qui discusse, ci si riconduce ad un algoritmo totalmente esplicito, che comporta una consistente riduzione del costo computazionale.

Tecniche di integrazione più semplici per la trattazione del termine di rilassamento (ad esempio lo *Strang Splitting*, anch'esso generalmente accurato al secondo ordine) non possono essere prese in considerazione per questa applicazione. Infatti, queste tecniche mostrano una riduzione al primo ordine di accuratezza quando il problema diventa stiff, quindi quando le scale temporali più piccole giocano un ruolo di primo piano nella fisica globale dei fenomeni. L'impossibilità di applicare queste tecniche al sistema (3) è dimostrata da alcuni test numerici sviluppati in questo lavoro.

#### 4 VALIDAZIONE DEL MODELLO

Il modello proposto è validato (per la sola parte elastica) utilizzando 5 problemi di Riemann (RP) per i quali sono disponibili le soluzioni esatte (Müller & Toro, 2013). Il primo di questi problemi è stato selezionato per verificare il bilanciamento dello schema, ovvero l'esatto mantenimento di uno stato iniziale di quiete in un vaso. Gli altri problemi riguardano moti idealizzati non stazionari in un tratto ideale dell'aorta e della vena giugulare interna. Il corretto bilanciamento dello schema è validato anche in un caso in cui la soluzione presenta una soluzione continua a tratti.

Inoltre, considerando l'indisponibilità di soluzioni esatte per il moto del sangue in condotte viscoelastiche, la validazione del modello, per quanto concerne i contributi associati alla viscosità delle pareti, è compiuta applicando il *Metodo della Manufactured Solution* (MMS) proposto da Roache (2002). Il caso test è quindi ottenuto perturbando il sistema originale attraverso l'introduzione di un opportuno termine sorgente, successivamente applicando il sistema perturbato ad una generica vena e ad una generica arteria. A titolo di esempio, nel paragrafo 4.1 si descrive il test costruito per la generica vena.

L'ordine di accuratezza atteso è verificato conducendo un'analisi di accuratezza su questi ultimi casi test, anche confrontando i risultati con quelli ottenibili dall'applicazione di più semplici tecniche di splitting per l'integrazione nel tempo dei termini di rilassamento. Validazioni del sistema a-FSI in un contesto più applicativo, ad esempio sfruttando misurazioni in-vivo, sono presentate in Bertaglia et al. (2020).

##### 4.1 Validazione del contributo elastico per una generica vena

Nel contesto del MMS, una soluzione continua esatta del sistema perturbato è definita a priori come:

$$\widehat{\mathbf{Q}}(x, t) = \begin{bmatrix} \widehat{A}(x, t) \\ \widehat{Au}(x, t) \\ \widehat{p}(x, t) \\ \widehat{A}_0(x, t) \\ \widehat{E}_0(x, t) \\ \widehat{p}_{ext}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 + \tilde{a}_0 \sin(\omega_L x) \cos(\omega_T t) \\ \tilde{A}_0 u + \tilde{a}_0 \frac{L}{T_0} \sin(\omega_L x) \cos(\omega_T t) \\ \tilde{P} + \tilde{p} \cos(\omega_L x) \sin(\omega_T t) \\ \tilde{A}_0 + \tilde{a}_0 \sin(\omega_L x) \\ \tilde{E}_0 + \tilde{e}_0 \sin(\omega_L x) \\ \tilde{P}_{ext} + \tilde{p}_{ext} \sin(\omega_L x) \end{bmatrix} \quad (5)$$

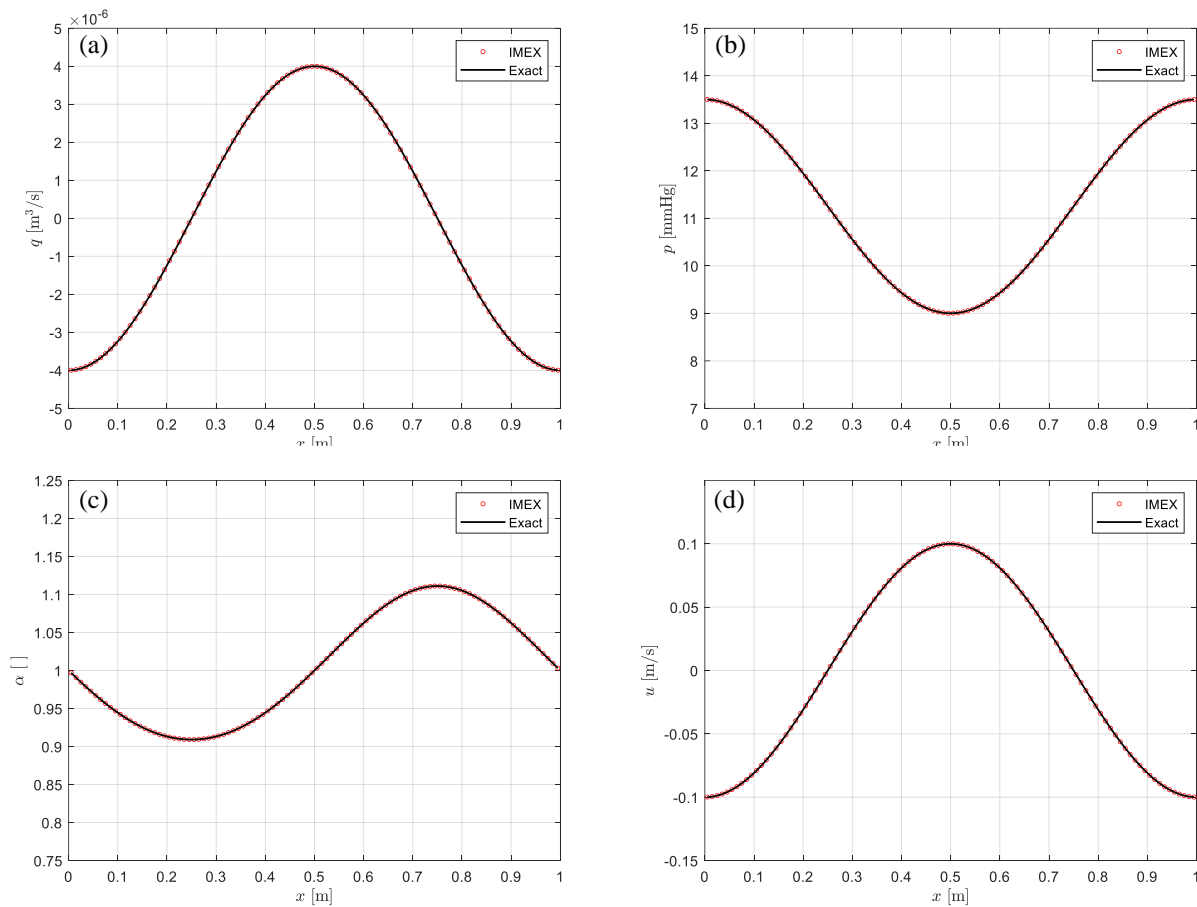
con  $\omega_L = \frac{2\pi}{L}$  e  $\omega_T = \frac{2\pi}{T_0}$ , e con  $L = 1.0$  m,  $T_0 = 1.0$  s,  $\tilde{A}_0 u = 0.0$  m<sup>3</sup>/s,  $\tilde{P}_{ext} = 0.0$  Pa,  $\tilde{p}_{ext} = 50.0$  Pa,  $\tilde{A}_0 = 0.4$  mm<sup>2</sup>,  $\tilde{a}_0 = 0.04$  mm<sup>2</sup>,  $\tilde{P} = 1.5$  kPa,  $\tilde{p} = 0.3$  kPa,  $\tilde{E}_0 = 1.75$  MPa,  $\tilde{e}_0 = 0.1$  MPa,  $E_\infty = 1.5$  MPa e  $\tau_r = 0.06$  ms. Introducendo  $\widehat{\mathbf{Q}}$  nel sistema (3), è possibile ottenere, in forma analitica esatta, un termine sorgente residuale  $\mathbf{R}(x, t)$  (non nullo perché  $\widehat{\mathbf{Q}}$  non è soluzione esatta del sistema originale):

$$\mathbf{R}(x, t) = \partial_t \widehat{\mathbf{Q}} + \mathbf{A}(\widehat{\mathbf{Q}}) \partial_x \widehat{\mathbf{Q}} - \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}). \quad (6)$$

Il sistema perturbato risulta allora definito come:

$$\partial_t \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \partial_x \mathbf{Q} = \mathbf{S}(\mathbf{Q}) + \mathbf{R}(x, t) \quad (7)$$

la cui unica soluzione è necessariamente  $\widehat{\mathbf{Q}}(x, t)$ . La condizione iniziale del problema è  $\widehat{\mathbf{Q}}(x, 0)$ , mentre le condizioni al contorno sono periodiche. I risultati della risoluzione numerica del sistema (7) sono riportati in Fig. 1, insieme con la corrispondente soluzione esatta. Il confronto fra le due soluzioni conferma la validità del modello proposto, relativamente al trattamento dei contributi viscoelastici.



**Figura 1.** Risultati della validazione del contributo viscoelastico in una generica vena, a  $t = 0.75$  s, risolvendo il modello a-FSI, in termini di (a) portata, (b) pressione interna, (c) sezione trasversale adimensionale e (d) velocità, rispetto alla soluzione esatta.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Alastruey, J., Khir, A.W., Matthys, K.S., Segers, P., Sherwin, S.J., Verdonck, P.R., Parker, K.H. & Peirò, J. Pulse wave propagation in a model human arterial network: Assessment of 1-D visco-elastic simulations against in vitro measurements, *Journal of Biomechanics*, 2011, 44(12), 2250–2258.
- Bertaglia, G., Ioriatti, M., Valiani, A., Dumbser, M. & Caleffi, V. Numerical methods for hydraulic transients in visco-elastic pipes, *Journal of Fluids and Structures*, 2018, 81, 230–254.
- Bertaglia, G., Navas-Montilla, A., Valiani, A., Monge García, M.I., Murillo, J. & Caleffi, V. Modellazione del flusso sanguigno con sistema a-FSI: stima dei parametri e validazione in-vivo. XXXVII Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, 2020.
- Dumbser, M. & Toro E.F., A simple extension of the Osher Riemann solver to non-conservative hyperbolic systems, *Journal of Scientific Computing*, 2011, 48(1–3), 70-88.
- Formaggia, L., Lamponi, D. & Quarteroni, A. One-dimensional models for blood flow in arteries, *Journal of Engineering Mathematics*, 2003, 47(3-4), 251-276.
- Lakes, R. *Viscoelastic Materials*, Cambridge University Press, New York, USA, 2009.
- Montecinos, G.I., Müller, L.O. & Toro, E.F. Hyperbolic reformulation of a 1D viscoelastic blood flow model and ADER finite volume schemes, *Journal of Computational Physics*, 2014, 266, 101-123.
- Müller, L.O. & Toro, E.F. Well-balanced high-order solver for blood flow in networks of vessels with variable properties. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2013, 29(12), 1388-1411.
- Pareschi, L. & Russo, G. Implicit-explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation, *Journal of Scientific Computing*, 2005, 25(1), 129–155.
- Roache, P.J., Code verification by the method of manufactured solutions, *Journal of Fluids Engineering*, 2002, 124(1), 4-10.
- Shapiro, A.H. Steady flow in collapsible tubes, 1977, *Journal of Biomechanical Engineering*, 99 (3), pp. 126-147.
- Toro, E.F. & Siviglia, A. Flow in Collapsible Tubes with Discontinuous Mechanical Properties: Mathematical Model and Exact Solutions. *Communications in Computational Physics*, 2013, 13(2), 361-385.